

CH XII : Systèmes linéaires

I. Généralités sur les systèmes linéaires

Définition

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

On appelle **système linéaire** de n équations à p inconnues x_1, \dots, x_p tout système de la forme :

$$(S) \begin{cases} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,p} x_p = b_1 & L_1 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,p} x_p = b_2 & L_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \dots + a_{n,p} x_p = b_n & L_n \end{cases}$$

- × les réels $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ sont les **coefficients** du système.
- × le n -uplet de réels (b_1, \dots, b_n) est le **second membre** du système.
- × la $i^{\text{ème}}$ équation du système est notée L_i : c'est la $i^{\text{ème}}$ ligne du système.
- × le système (S) est dit **homogène** si $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$.
- × on appelle **système homogène associé à (S)** et on note (S_H) le système (S) dont le second membre est remplacé par $(0, \dots, 0)$.
- × on appelle **solution** de (S) tout p -uplet (x_1, \dots, x_p) qui satisfait les n équations du système (S) .
- × si $n = p$ le système (S) sera dit **système de Cramer** s'il admet un unique n -uplet solution.
- × deux systèmes (S_1) et (S_2) sont dits **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions. On notera alors : $(S_1) \Leftrightarrow (S_2)$.

Remarque

- Tout système homogène admet au moins une solution, le p -uplet $(0, \dots, 0)$.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ x + 5y + z = 0 \\ -4x + 2y + 7z = 0 \end{cases}$$

admet $(0, 0, 0)$ pour solution.

- Un système homogène admettant le même nombre d'équations que d'inconnues ($n = p$) est donc de Cramer ssi $(0, \dots, 0)$ est son unique solution.
- Un système (S) peut n'admettre aucune solution :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = -7 \\ -x + z = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = -7 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

Les lignes L_2 et L_3 sont dites **incompatibles**.

- Un système (S) peut admettre une unique solution :

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ x + z = 7 \\ 2x + 2y + z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = (1, -2, 6)$$

- Un système (S) peut admettre une infinité de solutions :

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ y + z = -2 \\ -x + 2z = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 3 \\ y + z = -2 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 + z \\ y = -2 - z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (5 + 2z, -2 - z, z)$$

Ainsi, $(5, -2, 0)$, $(7, -3, 1)$, $(-1, 1, -3)$... sont solutions.

Remarque

- Pour programmer cet algorithme en **Scilab**, on programme tout d'abord la fonction `Pivot_Gauss_A` puis la fonction `Pivot_Gauss_B`. Ces deux fonctions prennent en paramètre un système linéaire et renvoie un système linéaire équivalent. La fonction finale s'écrit alors :

```

1 // Algorithme du pivot de Gauss
2 fonction D = pivot_Gauss(S)
3     T = pivot_Gauss_A(S)
4     D = pivot_Gauss_B(T)
5 endfunction

```

Remarque (*un peu de culture informatique*)

- Dans l'étape 4) de l'algorithme `Pivot_Gauss_A`, on réalise un appel à l'algorithme `Pivot_Gauss_A`. On est donc en train de définir `Pivot_Gauss_A` en fonction de lui-même! On dit alors que l'on effectue une définition **réursive** de la fonction `Pivot_Gauss_A`.
- La terminaison de cet algorithme est assuré par le fait que les différents appels se font sur des systèmes possédant de moins en moins (strictement) d'équations. On aboutit donc forcément toujours à un sous-système qui ne possède plus d'équations, ce qui correspond au cas d'arrêt de l'algorithme.
- On aurait aussi pu choisir une autre présentation. En effet, comme on effectue successivement un travail sur chacune des colonnes du système linéaire, une boucle **for** est tout à fait envisageable pour cet algorithme.

II. Résolution d'un système linéaire**II.1. Les systèmes échelonnés et triangulaires supérieurs****Définition**

Soit (S) un système linéaire de n équations et p inconnues.

- Le système (S) est dit **échelonné** lorsque :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$$
- Le système (S) est dit **triangulaire (supérieur)** si :
 - 1) il a le même nombre d'équations que d'inconnues ($n = p$),
 - 2) il est échelonné.

Cette définition n'est pas très stricte. Par exemple, un système linéaire dont tous les coefficients sont nuls, est un système échelonné.

II.2. Résolution d'un système triangulaire (cas $n = p$)

Un système triangulaire supérieur à n équations et n inconnues est de la forme suivante.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,i} x_i + \dots + a_{1,n} x_n = b_1 \\ a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,i} x_i + \dots + a_{2,n} x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{i,i} x_i + \dots + a_{i,n} x_n = b_i \\ \dots \\ a_{n,n} x_n = b_n \end{array} \right.$$

Si on suppose de plus que tous les coefficients diagonaux sont non nuls, alors on peut résoudre aisément ce système « en cascade » :

× la dernière équation fournit : $x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$.

× on substitue x_n par sa valeur dans l'équation précédente, ce qui permet d'obtenir x_{n-1} .

Par remontées successives, on obtient de manière unique toutes les valeurs de x_i . On obtient ainsi un unique n -uplet solution.

Il est primordial de supposer que tous les coefficients diagonaux sont non nuls. Par la suite, on nomme (H) cette hypothèse : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,i} \neq 0$.

Théorème 1.

Soit (S) un système linéaire tel que :

- × (S) a n équations et n inconnues,
- × (S) est triangulaire (supérieur),
- × (S) vérifie l'hypothèse (H).

Alors (S) est un système de Cramer.

(ce qui revient à dire que (S) possède une unique solution)

Exemple

On peut résoudre le système suivant en cascade.

$$\begin{cases} x + y + 2z - t = 3 \\ 3y + 5z + 2t = -7 \\ z - t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$$

Par remontées successives, ce système admet une unique solution : (8, -7, 2, 2).

Remarque

Le caractère unique est fourni par les deux conditions : $n = p$ et H.

Si cette hypothèse (H) n'est pas vérifiée, alors :

× le système peut n'avoir aucune solution.

$$\begin{cases} x + y + 2z - t = 3 \\ 5z - 2t = 8 \\ z - t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$$

× le système peut avoir une infinité de solution.

$$\begin{cases} x + y + 2z - t = 3 \\ 5z - 2t = 6 \\ z - t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$$

B. Résolution par remontées successives.

Pivot_Gauss_B(S) :

1) Deux cas se présentent.

- Soit la dernière colonne de (S) ne contient que des coefficients nuls. Dans ce cas, on passe directement à l'étape **B3**.

- Sinon, on fixe la dernière ligne L_d du système.

Notons z la variable présente dans cette ligne.

2) On annule alors les coefficients devant z pour les autres lignes.

Pour ce faire, on retire à L_i suffisamment de fois la ligne L_d :

$$L_i \leftarrow L_i + a_i L \quad (\text{pour tout } i \leq d)$$

3) L_d et C_d (colonne d) omis, on a ainsi créé un sous-système (S') possédant une ligne et une variable (une colonne) de moins.

4) • Si (S') ne contient plus aucune équation, on s'arrête.

- Sinon, on recommence les différentes étapes de cet algorithme sur ce nouveau système (S') en réalisant l'appel : Pivot_Gauss_B(S').

À l'issue de cette étape, tous les coefficients non diagonaux sont nuls.

On en déduit les solutions du système initial.

II.4.c) L'algorithme du pivot de Gauss (POLY)

A. Mise sous forme triangulaire de (S) .

Pivot_Gauss_A(S) :

- 1) Deux cas se présentent.
 - Soit la première colonne de (S) ne contient que des coefficients nuls. Dans ce cas, on passe directement à l'étape **A3**.
 - Sinon, on note x l'inconnue la plus à gauche de (S) . On choisit alors la première ligne L dont le coefficient a devant x est non nul. Quitte à effectuer une permutation ($L \leftrightarrow L_1$), on place cette ligne en première position. (*le coefficient a est appelé pivot de Gauss de cette étape*)
- 2) On annule alors les coefficients devant x pour les autres lignes. Pour ce faire, on retire à L_i suffisamment de fois la ligne L_1 :

$$L_i \leftarrow L_i + \alpha_i L_1 \quad (\text{pour tout } i \geq 2)$$

- 3) L_1 et C_1 (colonne 1) omis, on a ainsi créé un sous-système (S') possédant une ligne et une variable (une colonne) de moins.
- 4) • Si (S') ne contient plus aucune équation, on s'arrête.
 - Sinon, on recommence les différentes étapes de cet algorithme sur ce nouveau système (S') en réalisant l'appel : Pivot_Gauss_A(S').

À l'issue de cette étape **A**, on transfère, si besoin, les inconnues auxiliaires dans le membre de droite.

Le système obtenu est sous la forme triangulaire suivante.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,i} x_i + \dots + a_{1,n} x_n = b_1 - a_{1,n+1} x_{n+1} - \dots - a_{1,p} x_p \\ a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,i} x_i + \dots + a_{2,n} x_n = b_2 - a_{2,n+1} x_{n+1} - \dots - a_{2,p} x_p \\ \dots \\ a_{i,i} x_i + \dots + a_{i,n} x_n = b_i - a_{i,n+1} x_{n+1} - \dots - a_{i,p} x_p \\ \dots \\ a_{n,n} x_n = b_n - a_{n,n+1} x_{n+1} - \dots - a_{n,p} x_p \end{array} \right.$$

On passe alors à l'étape de résolution.

II.3. Résolution d'un système échelonné (cas $n < p$)

Un système échelonné est alors de la forme suivante.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,i} x_i + \dots + a_{1,n} x_n + \dots + a_{1,p} x_p = b_1 \\ a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,i} x_i + \dots + a_{2,n} x_n + \dots + a_{2,p} x_p = b_2 \\ \dots \\ a_{i,i} x_i + \dots + a_{i,n} x_n + \dots + a_{i,p} x_p = b_i \\ \dots \\ a_{n,n} x_n + \dots + a_{n,p} x_p = b_n \end{array} \right.$$

Plaçons-nous dans le cas où l'hypothèse **(H)** est vérifiée ($\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,i} \neq 0$).

- On va alors distinguer les inconnues x_{n+1}, \dots, x_p , appelées **inconnues auxiliaires**. En transférant ces inconnues auxiliaires dans le membre droit, on fait apparaître un membre gauche à n lignes et n colonnes, correspondant au cas précédent.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,i} x_i + \dots + a_{1,n} x_n = b_1 - a_{1,n+1} x_{n+1} - \dots - a_{1,p} x_p \\ a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,i} x_i + \dots + a_{2,n} x_n = b_2 - a_{2,n+1} x_{n+1} - \dots - a_{2,p} x_p \\ \dots \\ a_{i,i} x_i + \dots + a_{i,n} x_n = b_i - a_{i,n+1} x_{n+1} - \dots - a_{i,p} x_p \\ \dots \\ a_{n,n} x_n = b_n - a_{n,n+1} x_{n+1} - \dots - a_{n,p} x_p \end{array} \right.$$

- Une résolution en cascade de ce système fournit alors toutes les valeurs de x_i ($i \in \llbracket 1, n \rrbracket$) en fonction des variables auxiliaires. On obtient ainsi une infinité de solutions.

Théorème 2.

Soit (S) un système linéaire tel que :

- (S) a n équations, p inconnues et $n < p$,
- (S) est échelonné,
- (S) vérifie (H).

Alors (S) possède une infinité de solutions.

Exemple

On peut résoudre le système suivant en cascade.

$$\begin{cases} x + y + 2z - t = 3 \\ 3y + 5z + 2t = -7 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

Remarque

L'existence de solution est fourni par la condition : (H).

Si cette hypothèse (H) n'est pas vérifiée alors :

× le système peut n'avoir aucune solution.

$$\begin{cases} x + y + 2z - t = 3 \\ -2z + 2t = 5 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

× le système peut avoir une infinité de solutions.

$$\begin{cases} x + y + 2z - t = 3 \\ 5z - 2t = 6 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

En conclusion, la résolution d'un système triangulaire supérieur est simple. Il convient donc d'essayer de transformer tout système en un système triangulaire supérieur. Ceci peut se faire à l'aide des opérations élémentaires.

C. Mise sous forme diagonale et résolution du système.

On résout alors le système par cascade (i.e. par remontées successives).

1) On commence par la 3^{ème} colonne et la variable z .

Le but est de ne conserver qu'une occurrence de z dans cette colonne.

• Pour ce faire, on ajoute / retranche suffisamment de fois la 3^{ème} ligne aux autres.

$$(S) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \end{array} \iff \begin{cases} x + 2y & = 2 - 21w \\ y & = 1 + 11w \\ z & = -9w \end{cases}$$

2) On agit alors de même pour la 2^{ème} colonne et y : on ajoute / retranche suffisamment de fois la 2^{ème} ligne aux autres.

$$(S) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \end{array} \iff \begin{cases} x & = -43w \\ y & = 1 + 11w \\ z & = -9w \end{cases}$$

3) Le système obtenu est diagonal.

L'algorithme du pivot de Gauss est alors terminé.

L'ensemble des solutions de (S) est $\{(-43w, 1 + 11w, -9w) \mid w \in \mathbb{R}\}$.

Théorème 4.

Soit (S) un système linéaire.

Par application de la méthode du pivot de Gauss, on transforme (S) en un système diagonal (tous les coefficients non diagonaux sont nuls) équivalent.

Théorème 5.

Soit (S) un système à n équations et n inconnues.

(S) est un système \iff L'algorithme du pivot de Gauss fait apparaître n pivots successifs non nuls de Cramer

Démonstration.

C'est n'est qu'une reformulation du Théorème 1. □

Le pivot de la 2^{ème} étape est le coefficient placé devant la variable y de la ligne utilisée. Ici, il s'agit encore de 1.

3) Si on met de côté les lignes L_1 et L_2 , on obtient un système qui ne contient plus les variables x et y . Ce système amputé ne contient plus qu'une seule ligne et le procédé s'arrête alors.

Le pivot de la 3^{ème} étape (où l'on ne fait rien) est le coefficient placé devant la variable z . Ici, il s'agit encore de 1.

Le système obtenu à la fin de l'étape **A.** :

× possède les mêmes solutions que le système initial (S),
 (d'après le *Théorème 3*)
 × est échelonné.

B. Mise sous forme triangulaire du système obtenu.

Avant de passer à l'étape suivante, on transfère les inconnues auxiliaires (il s'agit ici de w) dans le membre droit.

$$(S) \iff \begin{cases} x + 2y - 2z = 2 - 3w \\ y + z = 1 + 2w \\ z = -9w \end{cases}$$

Le système obtenu est triangulaire.

II.4. La méthode du pivot de Gauss

II.4.a) Opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire

On commence par introduire la notion d'opération élémentaire, nécessaire pour décrire précisément la méthode du pivot.

Définition

On appelle **opération élémentaire sur les lignes** L_1, \dots, L_n d'un système (S) l'une des trois opérations suivantes :

1) multiplier la ligne L_i par un réel $\alpha \neq 0$:

$$L_i \leftarrow \alpha L_i$$

2) ajouter à la ligne L_i β fois une autre ligne L_j :

$$L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$$

3) échanger les lignes L_i et L_j :

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

Remarque

À l'aide de ces trois opérations de base, on peut construire de nouvelles opérations. On peut notamment citer l'opération suivante :

4) multiplier une ligne L_i par $\alpha \neq 0$ et lui ajouter β fois une autre ligne L_j :

$$L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$$

qui admet la généralisation suivante :

4') multiplier une ligne L_i par $\alpha \neq 0$ et lui ajouter une combinaison linéaire d'autres lignes :

$$L_i \leftarrow \alpha L_i + \lambda_1 L_{j_1} + \dots + \lambda_r L_{j_r}$$

L'intérêt de ces opérations élémentaires réside dans le théorème suivant.

Théorème 3.

Soit (S) un système linéaire.

Soit (S') un système linéaire obtenu par applications successives d'opérations élémentaires sur les lignes de (S) .

Alors (S) et (S') sont équivalents.

II.4.b) Illustration de la méthode sur un exemple

Effectuer une opération élémentaire sur un système (S) ne change pas son ensemble des solutions. L'algorithme du pivot de Gauss exploite ce constat. Il se déroule en trois étapes.

A. Par une succession d'opérations élémentaires, on transforme le système (S) en un système échelonné qui admet les mêmes solutions.

B. Si besoin (si le système obtenu en **A.** n'est pas triangulaire), on transfère les inconnues auxiliaires dans le membre droit du système. Le système obtenu est triangulaire.

C. On résout par cascade le système triangulaire précédent. Ses solutions sont celles du système initial (S) .

Illustrons ce procédé par la résolution du système linéaire suivant.

$$(S) \begin{cases} 2x + 5y - 3z + 4w = 5 \\ 5x + 12y - 7z + 20w = 12 \\ x + 2y - 2z + 3w = 2 \end{cases}$$

A. Mise sous forme échelonnée de (S) .

1) On considère tout d'abord la première colonne.

Le but est de ne conserver qu'une occurrence de x dans cette colonne.

• Pour ce faire, on commence par échanger la 1^{ère} et 3^{ème} ligne.

$$(S) \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \iff \\ \begin{cases} x + 2y - 2z + 3w = 2 \\ 5x + 12y - 7z + 20w = 12 \\ 2x + 5y - 3z + 4w = 5 \end{cases} \end{matrix}$$

• On ne conserve que l'occurrence de x en 1^{ère} ligne en ajoutant / retirant suffisamment de fois la 1^{ère} ligne aux autres.

(on a fait en sorte que x soit porté par le coefficient 1 en ligne L_1 ce qui facilite les calculs)

$$(S) \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ \iff \\ \begin{cases} x + 2y - 2z + 3w = 2 \\ 2y + 3z + 5w = 2 \\ y + z - 2w = 1 \end{cases} \end{matrix}$$

On appelle **pivot** de cette 1^{ère} étape le coefficient placé devant x dans la ligne utilisée. Ici, le pivot est 1.

2) On met alors de côté la 1^{ère} ligne. On obtient ainsi un sous-système qui ne contient plus aucune occurrence de la variable x .

• On commence par échanger la 2^{ème} et 3^{ème} ligne.

$$(S) \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \iff \\ \begin{cases} x + 2y - 2z + 3w = 2 \\ 2y + 3z + 5w = 2 \\ y + z - 2w = 1 \end{cases} \end{matrix}$$

(on conserve la 1^{ère} ligne dans le système pour que le nouveau système soit encore équivalent à (S) mais on ne l'utilise plus)

• On utilise alors le procédé précédent sur la variable y .

$$(S) \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ \iff \\ \begin{cases} x + 2y - 2z + 3w = 2 \\ y + z - 2w = 1 \\ z + 9w = 0 \end{cases} \end{matrix}$$