

CH XV : Intégration sur un segment

I. Définition de l'intégrale sur un segment

Dans cette section, on note a et b deux réels tels que $a < b$. On considère des fonctions $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

I.1. Aire sous une courbe

Définition

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur $[a, b]$.

Notons \mathcal{C}_f la courbe représentative de f .

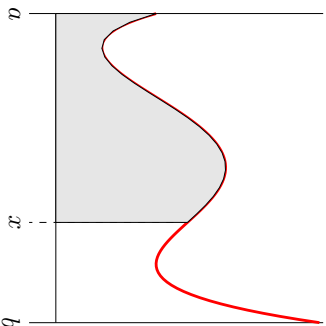
On appelle fonction aire sous la courbe de f et note \mathcal{A}_f la « fonction » :

$$\mathcal{A}_f : \left| \begin{array}{l} [a, b] \\ x \end{array} \right| \begin{array}{l} \rightarrow \\ \mapsto \end{array} \begin{array}{l} \mathbb{R} \\ \mathcal{A}_f(x) \end{array} = \begin{array}{l} \text{l'aire de la surface délimitée par } \mathcal{C}_f \text{ et l'axe} \\ \text{des abscisses entre les abscisses } a \text{ et } x. \end{array}$$

Remarque

- Cette définition n'est pas du tout rigoureuse. Vous avez appris, au collège à calculer l'aire de polygones. Mais le problème de la mesure de « l'aire sous une courbe » est autrement plus complexe. Il n'est donc pas clair que cette fonction \mathcal{A}_f existe.
- Cette définition a un avantage : elle permet l'interprétation géométrique et donne une bonne intuition des résultats que l'on va exposer dans ce chapitre.

Représentation graphique.



Aire sous la courbe d'une fonction continue positive

Propriété

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur $[a, b]$.

Alors la fonction \mathcal{A}_f est positive et croissante sur $[a, b]$.

Théorème 1.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur $[a, b]$.

Alors la fonction \mathcal{A}_f est dérivable sur $[a, b]$, et vérifie :

$$\boxed{\mathcal{A}'_f(x) = f(x)}$$

Démonstration.

On se limite, ici, au cas où la fonction f est monotone, par exemple croissante.

Soit $x \in [a, b]$. Afin de montrer que la fonction \mathcal{A}_f est dérivable en x , on doit déterminer la quantité suivante :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}_f(x+h) - \mathcal{A}_f(x)}{h}$$

Remarque

- Ce théorème est en fait valable pour toute somme de Riemann (notamment (T_n) et (M_n)). La démonstration est similaire à remplacement de x_k par ξ_k près avec :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |t - \xi_k| dt \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |t - x_k| dt$$

- En fait si f est C^2 , on a même un théorème plus précis pour (M_n) montrant que la convergence est plus rapide dans ce cas.

$$\left| \int_a^b f(t) dt - M_n \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Application.

Grâce à ce théorème, on peut calculer une approximation de l'intégrale

$$\int_a^b f(t) dt \text{ à } \varepsilon \text{ près par un calcul de } S_n.$$

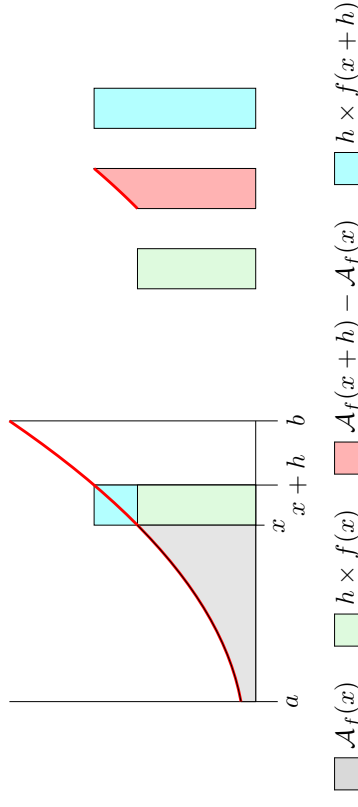
- Trouver un entier n_0 tel que : $\frac{(b-a)^2}{2n_0} M_1 \leq \varepsilon$

$$\text{Il suffit de prendre } n_0 = \left\lceil \frac{(b-a)^2}{2\varepsilon} M_1 \right\rceil$$

- S_{n_0} est alors une approximation à ε près de $\int_a^b f(t) dt$:

$$\left| \int_a^b f(t) dt - S_{n_0} \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2n_0} M_1 \leq \varepsilon$$

↪ cf TP d'informatique !



× Considérons $h > 0$:

- Par définition de \mathcal{A}_f , la quantité $\mathcal{A}_f(x+h) - \mathcal{A}_f(x)$ est l'aire sous la courbe \mathcal{C}_f sur le segment $[x, x+h]$.
- On peut borner cette quantité par l'aire de deux rectangles, l'un au-dessus et l'un au-dessous de \mathcal{C}_f sur $[x, x+h]$ (cf dessin). Plus précisément, on a :

$$h \times f(x) \leq \mathcal{A}_f(x+h) - \mathcal{A}_f(x) \leq h \times f(x+h)$$

$$\text{et donc } f(x) \leq \frac{\mathcal{A}_f(x+h) - \mathcal{A}_f(x)}{h} \leq f(x+h)$$

- Or $f(x) \xrightarrow[h \rightarrow 0^+]{}$ $f(x)$ et $f(x+h) \xrightarrow[h \rightarrow 0^+]{}$ $f(x)$.

Par le théorème d'encadrement, \mathcal{A}_f est dérivable à droite en x car :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{A}_f(x+h) - \mathcal{A}_f(x)}{h} = f(x)$$

× Considérons $h < 0$:

On démontre de même que \mathcal{A}_f est dérivable à gauche en x et :

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\mathcal{A}_f(x+h) - \mathcal{A}_f(x)}{h} = f(x)$$

Ainsi, \mathcal{A}_f est dérivable en x et on a : $\mathcal{A}'_f(x) = f(x)$. □

I.2. Primitives

Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I .

- On appelle **primitive de f sur I** toute fonction $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie :
 - a) F est dérivable sur I .
 - b) $F' = f$.

Théorème 2.

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur cet intervalle.

Démonstration.

Admis. □

Théorème 3.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I .

Soit F une primitive de f sur I .

- 1) G est une primitive de f sur $I \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in I, G(x) = F(x) + \lambda$
- 2) Soit $c \in I$. Il existe une unique primitive de f sur I s'annulant en c .
C'est la fonction $x \mapsto F(x) - F(c)$.

Démonstration.

- 1) Si G est une primitive de f sur I alors, par définition, $G' = f = F'$.

On en déduit que : $F' - G' = 0$ et donc $(F - G)' = 0$.

Ainsi, $F - G$ est une fonction constante : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, F - G = \lambda$.

- 2) Si de plus G s'annule en c , alors $G(c) = F(c) + \lambda = 0$ et donc $\lambda = -F(c)$. □

Retour à l'intuition

Si f est continue positive, la fonction \mathcal{A}_f (si elle existe!) est une primitive de f sur $[a, b]$. On peut même être plus précis : c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_a^b f(t) dt - S_n \right| \\
 &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dt \right| \\
 &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) dt \right| \\
 &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) dt \right| \\
 &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)| dt
 \end{aligned}$$

Inégalité triangulaire
sur les réels

Inégalité triangulaire
sur les intégrales

Or, par le théorème des accroissements finis, on a que :

$$|f(t) - f(x_k)| \leq M_1 |t - x_k|$$

Ainsi : $\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)| dt \leq M_1 \int_{x_k}^{x_{k+1}} |t - x_k| dt$

Et comme $t \geq x_k$ pour tout $t \in [x_k, x_{k+1}]$, on a :

$$\begin{aligned}
 \int_{x_k}^{x_{k+1}} |t - x_k| dt &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k) dt = \left[\frac{1}{2} (t - x_k)^2 \right]_{x_k}^{x_{k+1}} \\
 &= \frac{1}{2} (x_{k+1} - x_k)^2
 \end{aligned}$$

Au final, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \left| \int_a^b f(t) dt - S_n \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M_1}{2} (x_{k+1} - x_k)^2 \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M_1}{2} \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 = \frac{M_1}{2} \frac{(b-a)^2}{n^2} = \frac{(b-a)^2}{2n} M_1
 \end{aligned}$$

□

L'énoncé du cas particulier nous invite à faire apparaître la quantité $\frac{k}{n}$ dans la somme finie. Or on a :

$$n+k = n \left(1 + \frac{k}{n} \right) \text{ donc } \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$$

$$\text{Ainsi : } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ avec } f : t \mapsto \frac{1}{1+t}.$$

On en déduit que la suite de l'énoncé est convergente et que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2 - \ln 1$$

IV.2.c) Vitesse de convergence dans le cas de fonctions C^1 (CULTURE)

Théorème 18.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[a, b]$.

Notons $M_1 = \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$.

$$\text{Alors on a : } \left| \int_a^b f(t) dt - S_n \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} M_1$$

Démonstration.

Remarquons tout d'abord que M_1 est bien défini. En effet, comme f est C^1 , f' est continue. Sur le segment $[a, b]$ elle est donc bornée et atteint ses bornes, ce qui démontre l'existence de $M_1 = \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)| =$

$$\max_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

Par la relation de Chasles, on a : $\int_a^b f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt$.

D'autre part, par définition, on a : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(x_k)$.

On remarque de plus que : $(x_{k+1} - x_k) f(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dt$.

I.3. Définition de l'intégrale sur un segment

I.3.a) Cas des fonctions continues

Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I .

Soit F une primitive de f sur I et soit $(a, b) \in I^2$.
(on ne suppose pas ici $a < b$)

- On appelle **intégrale de a à b** de la fonction f , et on note $\int_a^b f(t) dt$ la quantité :

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Retour à l'intuition

- Si f est continue et positive (et si \mathcal{A}_f existe !), alors \mathcal{A}_f est une primitive de f sur $[a, b]$. Ainsi, on pourra penser l'intégrale de f sur $[a, b]$ comme l'aire de la surface définie sous la courbe \mathcal{C}_f entre a et b .

Remarque

- La notion d'intégrale sur un segment est indépendante de la primitive choisie. En effet, si F et G sont deux primitives de f , alors pour un $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$F = G + \lambda$$

$$\text{Ainsi : } F(b) - F(a) = (G(b) + \lambda) - (G(a) + \lambda) = G(b) - G(a).$$

- La lettre t de la définition est une variable muette.
On notera donc, sans distinction :

$$\int_a^b f(t) dt \text{ ou } \int_a^b f(x) dx \text{ ou } \int_a^b f(u) du \dots$$

- Notez que la définition reste valable pour $a \geq b$.

Propriété

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I .

Soit $(a, b) \in I^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. (on ne suppose pas ici $a < b$)

$$1) \int_a^b 0 \, dt = 0$$

$$2) \int_a^b \lambda f(t) \, dt = \lambda \int_a^b f(t) \, dt$$

$$3) \int_a^a f(t) \, dt = 0$$

$$4) \int_b^a f(t) \, dt = - \int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b -f(t) \, dt$$

Démonstration.

Soit F une primitive de f sur I . Par définition, $\int_a^b f(t) \, dt = F(b) - F(a)$.

1) Dans ce cas, $F' = f = 0$ donc la fonction F est constante et $F(b) = F(a)$.

2) λF est une primitive de λf puisque : $(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f$.

$$\text{Ainsi, } \int_a^b \lambda f(t) \, dt = [\lambda F]_a^b = \lambda F(b) - \lambda F(a).$$

3) Dans ce cas, $\int_a^a f(t) \, dt = F(a) - F(a) = 0$.

4) On a : $\int_b^a f(t) \, dt = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = - \int_a^b f(t) \, dt$

Retour à l'intuition

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, la propriété 2) permet d'affirmer

$$\text{que : } \int_a^b f(t) \, dt = - \int_a^b -f(t) \, dt.$$

Par analogie avec cette propriété, on définit l'aire sous la courbe entre a et b d'une fonction **continue** doit être pensée comme une aire orientée :

× cette aire est positive si f positive.

× cette aire est négative si f négative.

(et c'est l'opposé de l'aire définie par $-f$, fonction positive)

IV.2.b) Convergence de la méthode

Théorème 17. Cas des fonctions continues

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$.

• Convergence de la somme (S_n) .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) \, dt$$

• Convergence de la somme (T_n) .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a+k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) \, dt$$

• Convergence de la somme (M_n) .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{2k+1}{2} \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) \, dt$$

Démonstration.

Admis dans le cas des fonctions continues. □

Cas particulier

• Les exercices sur les sommes de Riemann se traitent en faisant apparaître le cas particulier : $a = 0$, $b = 1$. On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) \, dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

• Illustrons ce procédé par un énoncé classique.

Démontrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}\right)$ est convergente et calculer sa limite.

Remarque

Les sommes de Riemann dépendent des paramètres a , b et f . En toute rigueur, il faudrait donc écrire $S_n(a, b, f)$. On se permettra d'alléger cette notation pour ne conserver que S_n en précisant par ailleurs ces paramètres.

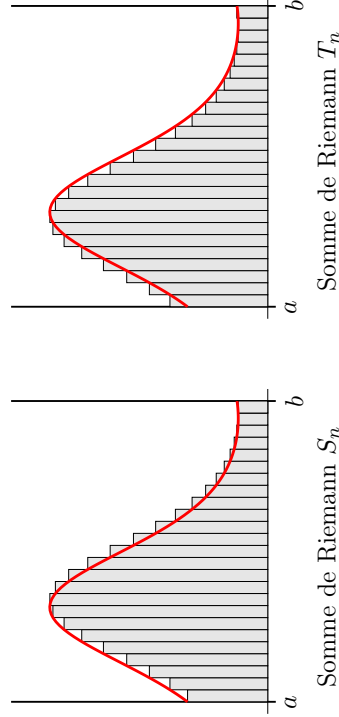
IV.2. Méthode des rectangles**IV.2.a) Définition****Définition**

La méthode des rectangles est une méthode d'analyse numérique consistant à approcher le calcul de l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$.

- On considère une subdivision $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.
- On approche $\int_a^{x_{k+1}} f(t) dt$ par l'aire d'un rectangle de côté $[x_k, x_{k+1}]$ et s'appuyant sur la courbe \mathcal{C}_f .

- On approche alors $\int_a^b f(t) dt$ par la somme de toutes les aires de rectangles ainsi définis.

Autrement dit, $\int_a^b f(t) dt$ est approchée par une somme de Riemann.



Découpage avec $n = 25$

Exemple

- $\int_3^8 4 dt = [4t]_3^8 = (4 \times 8 - 4 \times 3) = 4 \times (8 - 3) = 20$
- $\int_0^1 (2t^2 + 5t - 1) dt = \left[\frac{2}{3} t^3 + \frac{5}{2} t^2 - t \right]_0^1 = \frac{13}{6}$
- $\int_0^1 \frac{1}{t+1} dt = [\ln(t+1)]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$
- $\int_0^1 \frac{t}{t+1} dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = [t - \ln(t+1)]_0^1 = 1 + \ln 2$
- $\int_0^1 e^{2t} dt = \left[\frac{1}{2} e^t \right]_0^1 = \frac{1}{2}(e^1 - e^0) = \frac{1}{2}(e - 1)$
- $\int_0^1 te^{-t^2} dt = \int_0^1 -\frac{1}{2} (-2te^{-t^2}) dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} - 1 \right)$

Théorème 4.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et $c \in I$.

La fonction $H : I \rightarrow \mathbb{R}$ est la primitive de f
 $x \mapsto \int_c^x f(t) dt$ sur I qui s'annule en c .

- 1) En particulier, cette fonction H est de classe C^1 et de dérivée f .
 Ce que l'on pourra noter (avec abus de notation) :

$$\left(\int_c^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

- 2) Si de plus $u, v : J \rightarrow I$ sont deux fonctions dérivables sur l'intervalle J , alors les fonctions

$$x \mapsto \int_c^{u(x)} f(t) dt, \quad x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt, \quad x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$$

sont dérivables sur J .

Les dérivées de ces fonctions sont (avec l'abus de notation précédent) :

$$\left(\int_c^{v(x)} f(t) dt \right)' = v'(x) f(v(x)) \qquad \left(\int_{u(x)}^c f(t) dt \right)' = -u'(x) f(u(x))$$

$$\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \right)' = v'(x) \times f(v(x)) - u'(x) \times f(u(x))$$

Démonstration.

Soit F une primitive de f sur I .

1) Par définition, $\int_c^x f(t) dt = F(x) - F(c)$.

La fonction $H : x \mapsto F(x) - F(c)$ est dérivable sur I car F l'est.

De plus, on a : $H' = F' = f$.

H est donc bien une primitive de f .

De plus, elle s'annule en c puisque $H(c) = F(c) - F(c) = 0$.

2) • Remarquons tout d'abord que : $\int_c^{v(x)} f(t) dt = H(v(x))$.

La fonction $H \circ v$ est dérivable sur J car c est la composée de :

× v , dérivable sur J .

De plus, $v(J) \subset I$.

× H , dérivable sur I .

Par la formule de dérivation d'une composée, on a :

$$\forall x \in J, \quad (H \circ v)'(x) = H'(v(x)) \times v'(x) = f(v(x)) \times v'(x)$$

• De même, $\int_{u(x)}^c f(t) dt = - \int_c^{u(x)} f(t) dt = -H(u(x))$.

La fonction $H \circ u$ est dérivable sur J en tant que fonction composée.

$$\forall x \in J, \quad (H \circ u)'(x) = H'(u(x)) \times u'(x) = f(u(x)) \times u'(x)$$

3) Utilisez la relation de Chasles (cf plus loin).

$$\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = \int_{u(x)}^c f(t) dt + \int_c^{v(x)} f(t) dt \dots \right)$$

□

IV. Somme de Riemann, méthode des rectangles

IV.1. Définition

Définition

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ une subdivision finie de $[a, b]$.

• On appelle **somme de Riemann** toute somme s'écrivant :

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(\xi_k)$$

où pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, ξ_k est un élément choisi dans $[x_k, x_{k+1}]$.

Remarque

On considère en particulier des sommes de Riemann définies sur des subdivisions régulières *i.e.* telles que : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$.

• En prenant pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\xi_k = x_k$.

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k \frac{b-a}{n}\right)$$

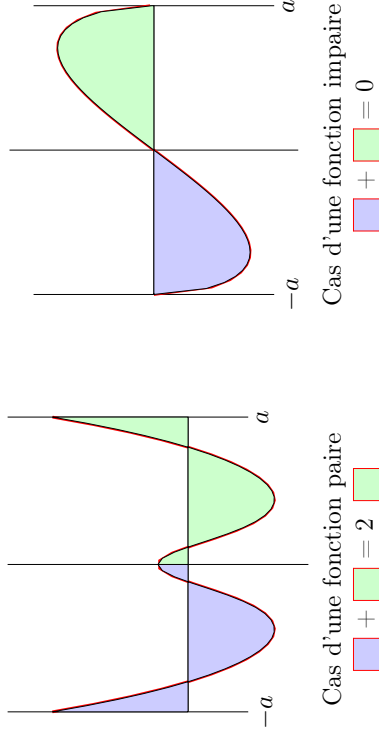
• En prenant pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\xi_k = x_{k+1}$.

$$T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a+k \frac{b-a}{n}\right)$$

• En prenant pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\xi_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

$$M_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{2k+1}{2} \frac{b-a}{n}\right)$$

Représentation graphique.



Exemple

Calculer l'intégrale : $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x \sqrt{4-x^2} dx$.

Considérons la fonction $f : x \mapsto x \sqrt{4-x^2}$.

- La fonction f est définie et continue sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.
- On peut donc considérer son intégrale sur le segment $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.
- Démontrons que f est impaire. Soit $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

$$f(-x) = -x \sqrt{4-(-x)^2} = -x \sqrt{4-x^2} = -f(x)$$

On en conclut, par le théorème précédent, que : $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x \sqrt{4-x^2} dx = 0$.

Exercice. EDHEC 2016

Pour chaque entier n on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in [n, +\infty[, f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt$$

- a) Montrer que f_n est de classe C^1 sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n .

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- a) La fonction $t \mapsto e^{\sqrt{t}}$ est continue sur \mathbb{R} donc sur $[n, +\infty[$.

La fonction f_n est la primitive, qui s'annule en n de la fonction $t \mapsto e^{\sqrt{t}}$. On en déduit que f_n est C^1 sur $[n, +\infty[$ et que :

$$\forall x \in [n, +\infty[, f_n'(x) = e^{\sqrt{x}} > 0$$

Ainsi, f_n est strictement croissante sur $[n, +\infty[$. \square

Exemple

On reprend les calculs précédents. En écrivant ces calculs d'intégrales entre $c \in \mathbb{R}$ et x , on exhibe la primitive de la fonction s'annulant en c .

- $\int_3^x 4 dt = [4t]_3^x = 4(x-3)$
- $\int_0^x (2t^2 + 5t - 1) dt = \left[\frac{2}{3} t^3 + \frac{5}{2} t^2 - t \right]_0^x = \frac{2}{3} x^3 + \frac{5}{2} x^2 - x$
- $\int_0^x \frac{1}{t+1} dt = [\ln(t+1)]_0^x = \ln(1+x)$ (pour $x > -1$)
- $\int_0^x \frac{t}{t+1} dt = [t - \ln(t+1)]_0^x = x + \ln(x+1)$ (pour $x > -1$)
- $\int_0^x e^{2t} dt = \left[\frac{1}{2} e^t \right]_0^x = \frac{1}{2}(e^x - 1)$
- $\int_0^x te^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^x = -\frac{1}{2}(e^{-x^2} - 1)$

I.3.b) Cas des fonctions continues par morceaux

Définition

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$.

Il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$ telle que :

- × f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$,
- × f admet une limite à droite finie en a_i ,
- × f admet une limite à gauche finie en a_{i+1} .

On note alors \tilde{f}_i le prolongement par continuité de f sur $[a_i, a_{i+1}]$.

Notons F_i une primitive de \tilde{f}_i sur $[a_i, a_{i+1}]$.

- On appelle **intégrale de a à b** de la fonction f , et on note $\int_a^b f(t) dt$:

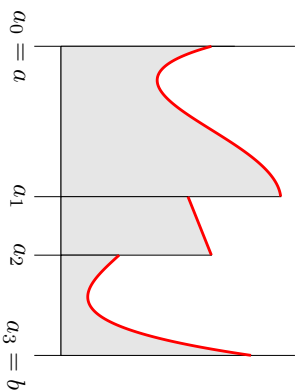
$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} \tilde{f}_i(t) dt = \sum_{i=1}^n (F_i(a_i) - F_i(a_{i-1}))$$

Idée derrière cette définition.

On calcule l'aire sous la courbe pour chaque « intervalle de continuité »

$[a_i, a_{i+1}]$. La quantité $\int_a^b f(t) dt$ est obtenue comme somme de ces aires.

Représentation graphique.



III.3.b) Changement de variable et parité

Théorème 16.

Soit $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[-a, a]$.

1) Si f est paire :

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(u) du$$

2) Si f est impaire :

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 0$$

Démonstration.

Par la relation de Chasles, on a : $\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt$

1) On effectue le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left| \begin{array}{l} u = -t \quad (\text{donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \bullet \quad t = -a \Rightarrow u = -(-a) = a \\ \bullet \quad t = 0 \Rightarrow u = -0 = 0 \end{array} \right.$$

On obtient ainsi :

$$\int_{-a}^0 f(t) dt = \int_a^0 -f(-u) du = \int_a^0 -f(u) du = \int_0^a f(u) du$$

(la deuxième égalité est obtenue par parité de la fonction f)

2) À l'aide du changement de variable $\boxed{u = -t}$, on obtient :

$$\int_{-a}^0 f(t) dt = \int_a^0 -f(-u) du = \int_a^0 f(u) du = - \int_0^a f(u) du \quad \square$$

Lien entre le théorème et la méthode symbolique

- La méthode symbolique a évidemment un lien direct avec le théorème initial. Considérons l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$. Poser un changement de variable u en fonction de t , revient à écrire :

$$u = \varphi^{-1}(t)$$

Lorsque l'on effectue ce changement de variable, on obtient :

$$u = \varphi^{-1}(t) \quad (\text{donc } t = \varphi(u))$$

$$\Leftrightarrow du = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} dt \quad \text{et} \quad dt = \varphi'(\varphi^{-1}(t)) du = \varphi'(u) du$$

- $t = a \Rightarrow u = \varphi^{-1}(a)$
- $t = b \Rightarrow u = \varphi^{-1}(b)$

$$\text{Ainsi : } \int_a^b f(t) dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

(par rapport au théorème, $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \varphi(\beta)$)

- L'écriture $\varphi^{-1}(t)$ suppose que la fonction φ réalise une bijection de $[\alpha, \beta]$ sur $[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]$. C'est pourquoi le cadre « φ C^1 bijectif » est un cadre considéré comme idéal pour les changements de variable. C'est celui qui sera adopté dans les énoncés.
- Ainsi, le changement de variable $u = t^2$ est problématique.

En effet, pour pouvoir exprimer t en fonction de u (i.e. exhiber la fonction φ), il faut que t soit de signe constant sur $[a, b]$. On ne peut donc pas poser un tel changement de variable pour une intégrale entre $a = -1$ et $b = 5$ (sauf à découper cette intégrale comme somme d'une intégrale sur $[-1, 0]$ et d'une intégrale sur $[0, 5]$).

II. Propriétés de l'intégrale sur un segment

II.1. Relation de Chasles

Théorème 5.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I .

Soit $(a, b, c) \in I^3$ (on ne suppose pas ici $a < b$).

Alors on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Démonstration.

Notons F une primitive de f sur I . On a alors :

$$\begin{aligned} \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt &= (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt \end{aligned}$$

□

II.2. Linéarité de l'intégrale

Théorème 6.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur I .

Soit $(a, b) \in I^2$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ (on ne suppose pas ici $a < b$).

Alors on a :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$$

Démonstration.

Soient F une primitive de f et G une primitive de g .

Alors $\lambda F + \mu G$ est dérivable et $(\lambda F + \mu G)' = \lambda F' + \mu G' = \lambda f + \mu g$.

Ainsi, $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$.

$$\begin{aligned}
 \text{D'où : } \int_a^b (\lambda f + \mu g)(t) dt &= [\lambda F + \mu G]_a^b \\
 &= (\lambda F(b) + \mu G(b)) - (\lambda F(a) + \mu G(a)) \\
 &= \lambda(F(b) - F(a)) + \mu(G(b) - G(a)) \\
 &= \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt \quad \square
 \end{aligned}$$

Remarque (POLY uniquement)

Cette propriété signifie que l'application « intégrale entre a et b d'une fonction continue » (notée ici $\text{Int}_{a,b}$ et définie ci-dessous) est linéaire.

$$\text{Int}_{a,b} : \begin{array}{ccc} C([a,b], \mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_a^b f(t) dt \end{array}$$

Autrement dit, on a : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (f, g) \in (C([a,b], \mathbb{R}))^2,$

$$\text{Int}_{a,b}(\lambda f + \mu g) = \lambda \text{Int}_{a,b}(f) + \mu \text{Int}_{a,b}(g)$$

Théorème 7. (Généralisation au cas de n fonctions)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Soit $(a, b) \in I^2$ (on ne suppose pas ici $a < b$).

Soient $f_1, \dots, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues sur I .

Alors on a :

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right) (t) dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_a^b f_i(t) dt$$

Remarque (POLY uniquement)

Cette propriété signifie la compatibilité de l'application intégrale avec les combinaisons linéaires, ce qui est vérifié pour toute application linéaire.

$$\text{Int}_{a,b} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{Int}_{a,b}(f_i)$$

- Le programme officiel précise que les « changements de variables autres qu'affines seront précisés dans les exercices ».

Il faut donc comprendre que le changements de variable affines (ceux du type $\boxed{u = ct + d}$) ne seront pas (forcément) précisés.

Exercice

Considérons par exemple : $I = \int_0^3 \frac{t}{\sqrt{2t+3}} dt$.

Montrer que $I = \frac{1}{4} \int_3^9 \frac{u-3}{\sqrt{u}} du$ et en déduire la valeur de I .

On effectue le changement de variable $\boxed{u = 2t + 3}$

$$\begin{array}{l}
 u = 2t + 3 \quad (\text{donc } 2t = u - 3) \\
 \Leftrightarrow du = 2 dt \quad \text{et} \quad dt = \frac{1}{2} du \\
 \bullet t = 0 \Rightarrow u = 2 \times 0 + 3 = 3 \\
 \bullet t = 3 \Rightarrow u = 2 \times 3 + 3 = 9
 \end{array}$$

$$\text{Ainsi : } I = \int_3^9 \frac{\frac{1}{2}(u-3)}{\sqrt{u}} \frac{1}{2} du = \frac{1}{4} \int_3^9 \frac{u-3}{\sqrt{u}} du$$

$$\text{Or : } \frac{u-3}{\sqrt{u}} = \frac{u}{\sqrt{u}} - \frac{3}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} - \frac{3}{\sqrt{u}}. \text{ Ainsi :}$$

$$\begin{aligned}
 4I &= \int_3^9 \sqrt{u} du - 3 \int_3^9 \frac{1}{\sqrt{u}} du \\
 &= \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_3^9 - 3 \left[\frac{u^{1/2}}{1/2} \right]_3^9 = \frac{2}{3} (9\sqrt{9} - 3\sqrt{3}) - 6(\sqrt{9} - \sqrt{3}) \\
 &= \cancel{6\sqrt{9}} - 2\sqrt{3} - \cancel{6\sqrt{9}} + 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } I = \sqrt{3}.$$

- L'idée du changement de variable est de faire disparaître une partie « gênante » de la quantité $f(t)$. Ainsi, on posera souvent le changement de variable : « $u =$ la racine présente dans l'intégrale ».

MÉTHODO : calcul de $\int_1^2 \frac{dt}{t+2\sqrt{t}}$ à l'aide du changement de variable

$$u = \sqrt{t}$$

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{t} \quad (\text{donc } t = u^2) \\ \hookrightarrow du &= \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \quad \text{et} \quad dt = 2\sqrt{t} du = 2u du \\ \bullet \quad t = 1 &\Rightarrow u = \sqrt{1} = 1 \\ \bullet \quad t = 2 &\Rightarrow u = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } \int_1^2 \frac{dt}{t+2\sqrt{t}} &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{u^2+u} 2u du \\ \text{Or : } \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{u(u+1)} 2u du &= 2 [\ln(|u+1|)]_1^{\sqrt{2}} = 2 \ln \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2} \right) \end{aligned}$$

- **MÉTHODO** : calcul de $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+e^t}} dt$ en posant $u = \sqrt{1+e^t}$

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{1+e^t} \quad (\text{donc } e^t = u^2 - 1) \\ \hookrightarrow du &= \frac{e^t}{2\sqrt{1+e^t}} dt \quad \text{et} \quad dt = \frac{2\sqrt{1+e^t}}{e^t} du = \frac{2u}{u^2-1} du \\ \bullet \quad t = 0 &\Rightarrow u = \sqrt{1+e^0} = \sqrt{2} \\ \bullet \quad t = 1 &\Rightarrow u = \sqrt{1+e} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+e^t}} dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{1}{u} \frac{2u}{u^2-1} du$$

On termine ce calcul en remarquant que : $\frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{u-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{u+1}$

II.3. Positivité de l'application d'intégration

II.3.a) Énoncé

Théorème 8.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I .

Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$.

$$\begin{aligned} 1) \quad & f \geq 0 \text{ sur } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \geq 0 \\ 2) \quad & f > 0 \text{ sur } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(t) dt > 0 \end{aligned}$$

Démonstration.

Notons F une primitive de f sur I .

- 1) Supposons $f \geq 0$. Alors $F' = f \geq 0$ et F est croissante. De plus, comme $a < b$, on a $F(a) \leq F(b)$ et donc : $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \geq 0$.
- 2) Supposons $f > 0$. Alors $F' = f > 0$ et F est strictement croissante. Et comme $a < b$, on a $F(a) < F(b)$ et donc : $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) > 0$. □

Remarque

On peut déduire de ce théorème précédent :

$$f \leq 0 \text{ sur } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \leq 0$$

En effet, si $f \leq 0$, alors $-f \geq 0$ et donc, en intégrant sur $[a, b]$ ($b \geq a$), $\int_a^b -f(t) dt \geq 0$, ce qui montre $-\int_a^b f(t) dt \geq 0$ et donc $\int_a^b f(t) dt \leq 0$.

Remarque (POLY uniuquement)

Ce résultat peut se réécrire à l'aide de l'application $\text{Int}_{a,b}$.

$$f \geq 0 \Rightarrow \text{Int}_{a,b}(f) \geq 0$$

Théorème 9. (zéro de l'application d'intégration)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I .

Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$.

$$\left. \begin{aligned} & \int_a^b f(t) dt = 0 \\ & f \text{ positive sur } [a, b] \\ & (\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} & f \text{ est nulle sur } [a, b] \\ & (\forall x \in [a, b], f(x) = 0) \end{aligned}$$

Démonstration.

Notons F une primitive de f sur I .

On reprend la démonstration du théorème 8.

- Comme $F' = f \geq 0$ sur $[a, b]$, la fonction F est croissante sur $[a, b]$.
On en déduit que : $F(a) = \min_{[a,b]} F$ et $F(b) = \max_{[a,b]} F$.

- De plus, $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = 0$ par hypothèse.

Ainsi, $\min_{[a,b]} F = F(a) = F(b) = \max_{[a,b]} F$.

On en conclut que F est constante sur $[a, b]$ et que $F' = f = 0$ sur $[a, b]$. □

Remarque

Ainsi, si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et positive sur $[a, b]$ (avec $a < b$).

$$\int_a^b f(t) dt = 0 \Leftrightarrow f \text{ est nulle sur } [a, b]$$

Le sens direct (\Rightarrow) est l'énoncé du théorème 9.

La réciproque (\Leftarrow) est l'une des propriétés de base de l'intégrale.

Aspect pratique

- Si on se réfère au théorème précédent, un changement de variable est la donnée d'une fonction φ .

\hookrightarrow calcul de $\int_1^2 \frac{dt}{e^t + 1}$ à l'aide du changement de variable $\varphi : t \mapsto \ln t$.

$$\left| \begin{array}{ll} \varphi(t) = \ln t & \text{et} & \varphi'(t) = \frac{1}{t} \\ \bullet \varphi(\alpha) = 1 & \Rightarrow & \alpha = e \\ \bullet \varphi(\beta) = 2 & \Rightarrow & \beta = e^2 \end{array} \right.$$

Ainsi, $\int_1^2 \frac{dt}{e^t + 1} = \int_e^{e^2} \frac{1}{t+1} \frac{1}{t} dt$.

On termine ce calcul en remarquant : $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$

- En pratique, les changements de variable seront réalisés à l'aide de la méthode symbolique décrite ci-dessous.

MÉTHODE : calcul de $\int_1^2 \frac{dt}{e^t + 1}$ à l'aide du changement de variable

$$\left| \begin{array}{ll} u = e^t & \\ \hookrightarrow du = e^t dt & \text{et} & dt = \frac{1}{e^t} du = \frac{1}{u} du \\ \bullet t = 1 \Rightarrow u = e^1 & \\ \bullet t = 2 \Rightarrow u = e^2 & \end{array} \right.$$

En remplaçant dt par $\frac{1}{u} du$ et e^t par u , on obtient :

$$\int_1^2 \frac{dt}{e^t + 1} = \int_{e^1}^{e^2} \frac{1}{u+1} \frac{1}{u} du$$

ce qui correspond au calcul précédent.

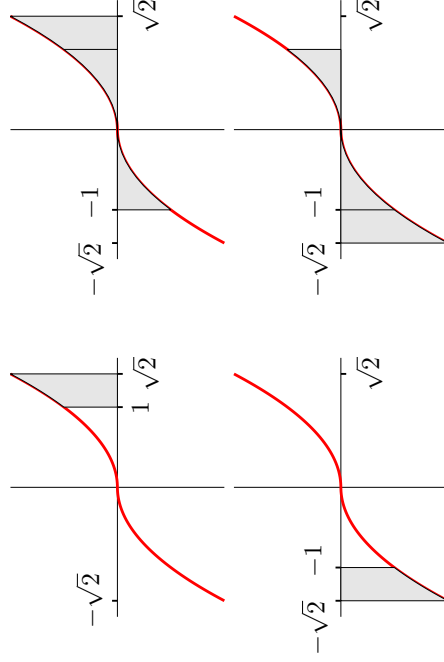
- Pour illustrer ce propos, considérons par exemple $\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{t} dt$.
Autrement dit, on cherche à déterminer l'intégrale de $f : t \mapsto \sqrt{t}$.
Appliquons maintenant le théorème précédent avec $\varphi : t \mapsto t^2$.

$$\left| \begin{array}{l} \varphi(t) = t^2 \quad \text{et} \quad \varphi'(t) = 2t \\ \bullet \varphi(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow (\alpha = 1 \text{ OU } \alpha = -1) \\ \bullet \varphi(\beta) = 2 \Leftrightarrow \beta^2 = 2 \Leftrightarrow (\beta = \sqrt{2} \text{ OU } \beta = -\sqrt{2}) \\ (f \circ \varphi)(t) = \sqrt{t^2} = |t| \end{array} \right.$$

En appliquant le théorème, on aboutit aux intégrales suivantes :

$$\int_1^{\sqrt{2}} |t| \times 2t dt \quad \int_{-1}^{-\sqrt{2}} |t| \times 2t dt \quad \int_1^{-\sqrt{2}} |t| \times 2t dt$$

Laquelle est « la bonne » ? En réalité, elles sont toutes valides.



- Notons que si la fonction $\varphi : I \rightarrow J$ choisie pour le changement de variable est une bijection de I sur J , la question précédente ne se pose plus puisque $\varphi(\alpha)$ admet comme un unique antécédent par φ l'élément $\varphi^{-1}(\varphi(\alpha)) = \alpha$.

II.3.b) Techniques de majoration

Théorème 10.

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur un intervalle I .

Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$.

Alors :

$$f \leq g \text{ sur } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$$

Démonstration.

On applique le théorème précédent à la fonction $g - f \geq 0$. En intégrant sur $[a, b]$ ($b \geq a$), on a : $\int_a^b (g - f)(t) dt \geq 0$ et $\int_a^b g(t) dt \geq \int_a^b f(t) dt$. \square

Remarque

Cette propriété signifie que $\text{Int}_{a,b}$ est une application croissante.

$$f \leq g \Rightarrow \text{Int}_{a,b}(f) \leq \text{Int}_{a,b}(g)$$

Exemple

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}$. Montrer que $J_n \rightarrow 0$.

Soit $x \in [0, 1]$. Comme : $0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ et $x^n \geq 0$, on a :

$$0 \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$$

et donc, en intégrant sur le segment $[0, 1]$ ($1 \geq 0$), on obtient :

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$\text{ainsi} \quad 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Par le théorème d'encadrement, (J_n) est convergente et de limite $\ell = 0$.

Exercice. EDHEC 2016 (suite)

Pour chaque entier n on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in [n, +\infty[, f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt$$

b) En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.

c) En déduire que pour chaque entier naturel n , il existe un unique réel, noté u_n , élément de $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.

d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Démonstration.

b) Soit $t \in [n, +\infty[$. On a alors $t \geq n$.

Par croissance de la fonction racine sur \mathbb{R}^+ puis par croissance de la fonction exponentielle, on a : $e^{\sqrt{t}} \geq e^{\sqrt{n}}$.

Soit $x \geq n$. En intégrant sur le segment $[n, x]$ ($x \geq n$), on obtient :

$$f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt \geq \int_n^x e^{\sqrt{n}} dt = (x - n) e^{\sqrt{n}}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - n) e^{\sqrt{n}} = +\infty$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.

c) La fonction f_n est :

× continue sur $[n, +\infty[$

× strictement croissante sur $[n, +\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $[n, +\infty[$ sur $f_n([n, +\infty[)$. Or :

$$f_n([n, +\infty[) = [f_n(n), \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)] = [0, +\infty[$$

Comme $1 \in [0, +\infty[$, l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution, notée u_n , dans $[n, +\infty[$.

d) D'après la question précédente, $u_n \geq n$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. □

III.3. Changement de variable**III.3.a) Calculs d'intégrales par changement de variable****Théorème 15.**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I .

Soit φ une fonction de classe C^1 sur $J = [\alpha, \beta]$ tq $\varphi([\alpha, \beta]) \subseteq I$.

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt$$

Démonstration.

Soit F une primitive de f sur I . Alors on a $(F \circ \varphi)' = F' \circ \varphi \times \varphi'$.

Autrement dit, $F \circ \varphi$ est une primitive de $f \circ \varphi \times \varphi'$.

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt &= [(F \circ \varphi)(t)]_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= [F(t)]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt \quad \square \end{aligned}$$

Aspect théorique (CULTURE)

• On a démontré l'égalité de droite à gauche :

on part de l'intégrale $\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt$ et on aboutit $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt$.

On peut en effet utiliser cet énoncé dans ce sens. Par exemple :

$$\int_2^3 \frac{dt}{t \ln t} = \int_2^3 \frac{1}{\ln t} \frac{1}{t} dt = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{t} dt = [\ln |t|]_{\ln 2}^{\ln 3} = \ln(\ln 3) - \ln(\ln 2)$$

avec $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $\varphi : t \mapsto \ln t$.

• Cette utilisation est en fait rarissime. On utilise généralement cet énoncé de la gauche $\left(\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt \right)$ vers la droite $\left(\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt \right)$.

Principe.

Effectuer une IPP consiste donc à écrire la fonction dont on doit calculer l'intégrale comme un produit de deux fonctions ($u \times v'$).

- × dont l'une sera dérivée ($v \rightsquigarrow v'$),
- × et l'autre sera intégrée ($u' \rightsquigarrow u$).

Exemple

- $\int_1^2 \ln t \, dt = [t \ln t]_1^2 - \int_1^2 1 \, dt = 2 \ln 2 - 1$
- $\int_1^2 t^2 \ln t \, dt = \frac{1}{3} [t^3 \ln t]_1^2 - \frac{1}{3} \int_1^2 t^2 \, dt = \dots$
- $\int_1^2 t^k \ln t \, dt = \frac{1}{k+1} [t^{k+1} \ln t]_1^2 - \frac{1}{k+1} \int_1^2 t^k \, dt = \dots$
- $\int_1^2 (\ln t)^2 \, dt = [(\ln t)^2]_1^2 - 2 \int_1^2 \ln t \, dt = \dots$
- $\int_1^2 \frac{t \ln t}{(t^2+1)^2} \, dt = -\frac{1}{2} [(t^2+1)^{-1} \ln t]_1^2 + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{t(1+t^2)} \, dt$
Or $\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t^2}$ donc ...
- $\int_0^1 t^3 e^{t^2} \, dt = \frac{1}{2} [t^2 e^{t^2}]_0^1 - \int_0^1 t e^{t^2} \, dt = \dots$

À retenir

Il faut s'empresse de dériver la fonction \ln : en la dérivant, on tombe sur le calcul de la primitive d'une fonction rationnelle.

Application : calcul d'une primitive de \ln .

Soit $x > 0$. Le calcul précédent nous fournit la primitive de la fonction \ln qui s'annule en 1.

$$\int_1^x \ln t \, dt = [t \ln t]_1^x - \int_1^x 1 \, dt = x \ln x - (x - 1)$$

Théorème 11. (Inégalité triangulaire)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I .

Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$.

$$\left| \int_a^b f(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \, dt$$

Démonstration.

On doit démontrer que : $\left| \int_a^b f(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \, dt$, ce qui équivaut

$$\text{à :} \quad - \int_a^b |f(t)| \, dt \leq \int_a^b f(t) \, dt \leq \int_a^b |f(t)| \, dt$$

Considérons alors les fonctions $f^+ = \frac{|f|+f}{2}$ et $f^- = \frac{|f|-f}{2}$.

- Comme $|f| \geq f$ et $|f| \geq -f$, les fonctions f^+ et f^- sont positives.
- De plus, $|f| = f^+ + f^-$ et $f = f^+ - f^-$.

Revenons alors à la double inégalité. On commence par remplacer f et $|f|$ par leur valeur en fonction de f^+ et f^- .

(i) L'inégalité de gauche équivaut à :

$$- \int_a^b (f^+(t) + f^-(t)) \, dt \leq \int_a^b (f^+(t) - f^-(t)) \, dt$$

$$\text{et à :} \quad - \int_a^b f^+(t) \, dt - \int_a^b f^-(t) \, dt \leq \int_a^b f^+(t) \, dt - \int_a^b f^-(t) \, dt$$

i.e. :

$$0 \leq 2 \int_a^b f^+(t) \, dt$$

(ii) De même, l'inégalité de droite équivaut à : $-2 \int_a^b f^-(t) \, dt \leq 0$

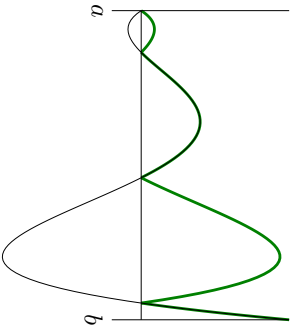
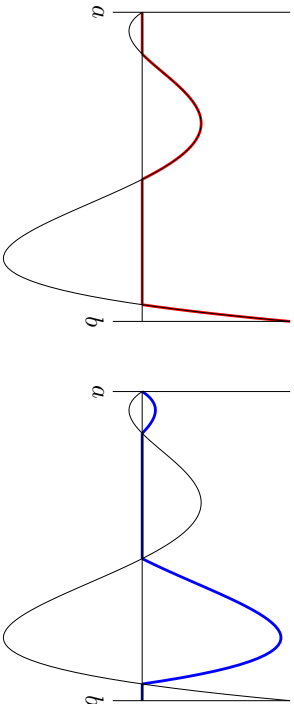
Ces deux inégalités sont vérifiées puisque f^+ et f^- sont positives. \square

Remarque

Les fonctions f^+ et f^- sont appelées réciproquement partie positive et partie négative de la fonction f . Notez que ces deux fonctions sont positives.

- $f^+ : x \mapsto \max(f(x), 0) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- $f^- : x \mapsto -\min(f(x), 0) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Représentation graphique.



Valeur absolue de f

III.2. Intégration par parties**Théorème 14.**

Soient $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I .

Soit $(a, b) \in I^2$.

$$\int_a^b u'(t) v(t) dt = [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u(t) v'(t) dt$$

Ce qu'on peut lire :

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$$

Démonstration.

On a $(uv)' = u'v + uv'$. Ainsi, la fonction uv est une primitive de $u'v + uv'$. Cette dernière fonction est continue par somme/produit de fonctions continues ($u \in C^1 \Rightarrow u' \in C^0$). Elle admet donc une intégrale entre a et b .

$$\int_a^b (u'(t)v(t) + u(t)v'(t)) dt = [u(t)v(t)]_a^b$$

On conclut par linéarité de l'intégrale. \square

Remarque

- On utilisera l'abréviation IPP.
- Cela permet de déplacer le problème : passer du calcul de $\int_a^b u'(t)v(t) dt$ au calcul de $\int_a^b u(t)v'(t) dt$ (ou inversement).
- Moyen mnémotechnique : $\begin{matrix} u = \dots & u' = \dots \\ v' = \dots & v = \dots \end{matrix}$

Primitives classiques.

Fonction	Une primitive
$x \mapsto \lambda$	$x \mapsto \lambda x$
$x \mapsto x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$x \mapsto x^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x $
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$
$x \mapsto \lambda^x$ (avec $\lambda > 0$)	$x \mapsto \frac{\lambda^x}{\ln \lambda}$
$x \mapsto u'(x) (u(x))^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	$x \mapsto \frac{(u(x))^{n+1}}{n+1}$
$x \mapsto u'(x) (u(x))^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$x \mapsto \frac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$	$x \mapsto \ln u(x) $
$x \mapsto u'(x) e^{u(x)}$	$x \mapsto e^{u(x)}$

Théorème 12.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I .

Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$.

$$(b-a) \min_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b-a) \max_{[a,b]} f$$

Démonstration.

f est continue sur le segment $[a, b]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes.

Ainsi, $\min_{[a,b]} f$ et $\max_{[a,b]} f$ existent bien. Soit $t \in [a, b]$. On a :

$$\min_{[a,b]} f \leq f(t) \leq \max_{[a,b]} f$$

et donc, en intégrant sur $[a, b]$ ($b \geq a$), on obtient :

$$\int_a^b \left(\min_{[a,b]} f \right) dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b \left(\max_{[a,b]} f \right) dt$$

$$\text{ainsi } (b-a) \min_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b-a) \max_{[a,b]} f \quad \square$$

Application

• Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et décroissante sur $[a, b]$, on a :

$$\min_{[a,b]} f = f(b) \quad \text{et} \quad \max_{[a,b]} f = f(a)$$

En reprenant la démonstration précédente, on obtient :

$$f(b) \leq \int_a^b f(t) dt \leq f(a)$$

et donc en intégrant sur $[a, b]$ ($b \geq a$), on obtient :

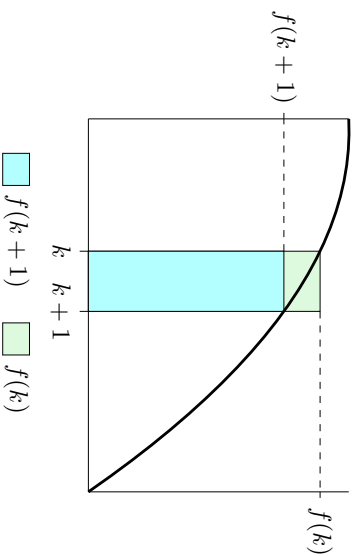
$$\int_a^b f(b) dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b f(a) dt$$

$$\text{ainsi } (b-a) f(b) \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b-a) f(a)$$

- Ainsi, si l'on considère un segment de longueur 1, de type $[k, k + 1]$ (avec $k \in \mathbb{N}$), on obtient que :

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$$

On retrouve le schéma (cas décroissant) de la démonstration du théorème 1.



Théorème 13.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I .

Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$.

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt \leq (b-a) \max_{[a,b]} |f|$$

Démonstration.

Combinaison des résultats du théorème 11 et 12 sachant que $x \mapsto |f(x)|$ est continue sur $[a, b]$ (comme composée de fonctions continues ...). \square

III. Techniques de calcul des intégrales

III.1. Calcul de primitives « à vue »

Principe.

Il s'agit ici de calculer une intégrale en devinant une de ses primitives. Autrement dit, il faut être capable de voir la fonction f à intégrer comme la dérivée d'une autre fonction.

Exemple

- $\int_0^1 5 dt = [5t]_0^1 = 5 [t]_0^1 = 5(1-0) = 5$
- $\int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} (1-0) = \frac{1}{3}$
- $\int_0^1 \sqrt{t} dt = \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3} [t^{\frac{3}{2}}]_0^1 = \frac{2}{3} (1-0) = \frac{2}{3}$
- $\int_1^2 \frac{1}{t} dt = [\ln t]_1^2 = \ln 2 - \ln 1$
- $\int_0^1 e^t dt = [e^t]_0^1 = (e^1 - e^0) = e^1 - 1$
- $\int_0^1 \frac{t}{(t^2+1)^3} dt = \int_0^1 t (t^2+1)^{-3} dt = \left[\frac{1}{-2} (t^2+1)^{-2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{(t^2+1)^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{1} \right) = \frac{3}{8}$
- $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt = \int_0^1 t (t^2+1)^{-\frac{1}{2}} dt = \left[(t^2+1)^{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = \sqrt{2} - \sqrt{1} = \sqrt{2} - 1$
- $\int_0^1 \frac{t}{(t^2+1)} dt = \left[\frac{1}{2} \ln(t^2+1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} [\ln(t^2+1)]_0^1 = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1)$
- $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2} dt = [-e^{\frac{1}{t}}]_1^2 = -\left(e^{\frac{1}{2}} - e^1\right) = e - \sqrt{e}$