CH XVI : Intégrales impropres

I. Définition des intégrales impropres

Définition

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, +\infty[$.
  - × On dit que l'objet $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ est une **intégrale impropre en** $+\infty$.
  - × On dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ est **convergente** si la fonction

$$F \ : \ \left| \begin{array}{ccc} [a, +\infty[& \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \to & \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt \end{array} \right.$$

admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.
Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ est donnée par :

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)\ dt \ = \ \lim_{x \to +\infty} \ \int_a^x f(t)\ dt}$$

  - × Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ **diverge**.

- Soit $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]-\infty, b]$.
  - × On dit que l'objet $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\ dt$ est une **intégrale impropre en** $-\infty$.
  - × On dit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\ dt$ **converge** si la fonction

$$F : \left| \begin{array}{ccc}]-\infty, b] & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \to & \displaystyle\int_{x}^{b} f(t)\ dt \end{array} \right.$$

admet une limite finie lorsque x tend vers $-\infty$.

Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\ dt$ est donnée par :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(t)\ dt \ = \ \lim_{x \to -\infty} \int_{x}^{b} f(t)\ dt}$$

  - × Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\ dt$ **diverge**.
- Soit $f :]-\infty, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]-\infty, +\infty[$.
  - × On dit que l'objet $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ est une **intégrale impropre à la fois en $-\infty$ et $+\infty$**.
  - × On dit $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ **converge** lorsqu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(t)\ dt$ sont toutes deux convergentes.

Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ est donnée par :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \ = \ \int_{-\infty}^{c} f(t)\ dt \ + \ \int_{c}^{+\infty} f(t)\ dt}$$

× Dans le cas contraire, *i.e.* si l'une des intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(t)\ dt$ ou $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(t)\ dt$ diverge, on dit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ **diverge**.

Remarque

- $\boxed{\texttt{MÉTHODO}}$: étude de l'objet $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(t)\ dt$.

  × On introduit $\displaystyle\int_{a}^{x} f(t)\ dt$ qui est une <u>intégrale sur le segment</u> $[a, x]$. *(la fonction f est supposée continue sur $[a, +\infty[$ donc est notamment continue sur $[a, x]$)*

  × On étudie si $\displaystyle\int_{a}^{x} f(t)\ dt$ admet une limite finie lorsque $x \to +\infty$.

- Ainsi, les propriétés des intégrales impropres (étudiées dans ce chapitre) sont déduites des propriétés des intégrales sur un segment (étudiées dans le chapitre précédent) à l'aide, lorsqu'il est légitime, d'un passage à la limite.

Exemple

- L'intégrale impropre $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} t\ dt$ diverge.

  × Si $x \geqslant 1$, on a : $\displaystyle\int_{1}^{x} t\ dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$.

  × Or $\displaystyle\frac{x^2}{2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

- L'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} 1\ dt$ diverge.

  × Si $x \geqslant 0$, on a : $\displaystyle\int_{0}^{x} 1\ dt = [\ t\ ]_0^x = x$.

  × Or $x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

- L'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge.

  × Si $x \geqslant 1$, on a : $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t} \;=\; [\,\ln t\,]_1^x \;=\; \ln x$.

  × Or $\ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

- L'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t}}$ converge et vaut 2.

  × Si $x \geqslant 1$, on a : $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t\sqrt{t}} \;=\; \left[\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_1^x \;=\; -2\frac{1}{\sqrt{x}} + 2$.

  × Comme $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t}} \;=\; 2$.

$$\boxed{\text{Penser à faire apparaître les quantités comme des puissances : } \frac{1}{t\sqrt{t}} = t^{-\frac{3}{2}}}$$

- L'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge et vaut 1.

  × Si $x \geqslant 1$, on a : $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t^2} \;=\; \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x \;=\; -\frac{1}{x} + 1$.

  × Comme $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \;=\; 1$

- L'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

  × Si $x \geqslant 1$, on a : $\displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{-t}\,dt \;=\; \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_1^x \;=\; -\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-1}$.

  × Comme $\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt \;=\; \frac{1}{\mathrm{e}}$

Exercice
Donner la nature des intégrales impropres suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{t+\sqrt{t}}\,dt$

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}$

c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} t^2\,\ln\left(\frac{t^2-1}{t^2}\right)\,dt$

VI. Conclusion

- Ce chapitre a été présenté hors du chapitre « Intégration sur un segment » : les intégrales impropres ne sont pas des intégrales sur un segment !
- Cependant, le lien entre ces deux chapitres est fort puisque les intégrales impropres se définissent à l'aide des intégrales sur un segment.
- Un exercice portant sur les intégrales impropres peut donc `TOUJOURS` se ramener à un exercice sur les intégrales sur un segment !

Remarque
Que dire de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \ln t\;dt$?
La fonction $t \mapsto \ln t$ est continue sur $]0,1]$ (pas en 0 !). On définit ainsi une intégrale impropre en 0. On pourrait définir de même la convergence de ce type d'intégrales. Mais ce type d'objet n'est pas au programme ...

Démonstration.

1) Comme $0 \leqslant f \leqslant g$, on a (technique de majoration du chapitre précédent) pour tout $x \geqslant a$:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt & \leqslant & \displaystyle\int_a^x g(t)\, dt \\ & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 0 & \leqslant & F(x) & \leqslant & G(x) \end{array}$$

a. Comme $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\, dt$ converge, la propriété précédente énonce que G est majorée : il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geqslant a$, $G(x) \leqslant M$. Et donc, pour tout $x \geqslant a$, on a :

$$0 \leqslant F(x) \leqslant G(x) \leqslant M$$

La fonction F est elle aussi majorée par M, ce qui démontre que $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\, dt$ converge.

b. Dans ce cas, $F(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et ainsi $G(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2) Inégalité obtenue par passage à la limite dans l'inégalité précédente. □

Remarque

- On a démontré précédemment que : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente (et vaut 1).
  D'autre part, pour tout $\alpha \geqslant 2$, on a : $\forall t \in [1, +\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{t^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.
  Ainsi, pour tout $\alpha \geqslant 2$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge.
- De même, si $\beta \leqslant 1$, on a : $\forall t \in [1, +\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{t^\beta}$.
  Ainsi, pour tout $\beta \leqslant 1$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$ diverge.
- On démontre ainsi une partie du théorème sur les intégrales de Riemann.
- On retiendra la méthode : on compare f à des fonctions de référence.

ECE1-B 2015-2016

Remarque

- Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ converge. Qu'en est-il de $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\, dt$? de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$? ou encore de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ avec $a \in \mathbb{R}$?
  Toutes ces intégrales sont convergentes. En effet, d'après la relation de Chasles du chapitre intégration sur un segment, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
  $$\int_1^x f(t)\, dt = \int_1^a f(t)\, dt + \int_a^x f(t)\, dt$$
  $$\text{et donc} \quad \int_a^x f(t)\, dt = \int_1^x f(t)\, dt - \int_1^a f(t)\, dt$$
  Par hypothèse, $\displaystyle\int_1^x f(t)\, dt$ admet une limite finie en $+\infty$.
  On en déduit que $\displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$ admet aussi une limite finie en $+\infty$ et que cette limite vérifie :
  $$\int_a^{+\infty} f(t)\, dt = \int_1^{+\infty} f(t)\, dt - \int_1^a f(t)\, dt$$
- Ainsi, la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ implique la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
- La convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ ne dépend donc pas de l'élément c apparaissant dans la définition.

II. Calcul des intégrales impropres

On se pose la question ici de savoir comment utiliser les techniques de calcul du chapitre « Intégration sur un segment » dans le but de :

× démontrer qu'une intégrale impropre est convergente,

× la calculer lorsque c'est le cas.

II.1. Primitive à vue : un exemple

Exemple

Déterminer la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}\, dt$.

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}$ est continue (notamment) sur $[0,+\infty[$.

On peut donc considérer la fonction :

$$F : \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt \end{array} \right.$$

primitive sur $[0,+\infty[$ de la fonction f qui s'annule en 0.
On fait apparaître une primitive classique en remarquant que pour tout $t \geqslant 0$, on a : $f(t) = \mathrm{e}^t\ (1+\mathrm{e}^t)^{-2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}\, dt &= \int_0^x \mathrm{e}^t\ (1+\mathrm{e}^t)^{-2}\, dt = \left[\frac{(1+\mathrm{e}^t)^{-1}}{-1} \right]_0^x \\ &= -\left[\ (1+\mathrm{e}^t)^{-1}\ \right]_0^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \end{aligned}$$

Or : $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en conclut que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}\, dt$ convergente et :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(t)\, dt \ = \ \lim_{x\to+\infty} \left(\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}\, dt \right) \ = \ \frac{1}{2}}$$

Propriété

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,+\infty[$.

Notons $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$.

Supposons de plus : $\forall x \in [a,+\infty[,\ f(x) \geqslant 0$.

1) $\boxed{\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad F \text{ est majorée}}$

2) Si F est non majorée, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

Démonstration.
$F' = f \geqslant 0$ donc F est croissante sur $[a,+\infty[$. En vertu du théorème de la limite monotone, F admet donc une limite (finie ou non) en $+\infty$. De plus :

× cette limite est finie si F est majorée.

× cette limite est $+\infty$ si F non majorée. □

Théorème 8.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f, g : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,+\infty[$.

Supposons de plus : $\forall t \in [a,+\infty[,\ 0 \ \leqslant\ f(t) \ \leqslant\ g(t)$.

1) *Alors on a :*

a. $\boxed{\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\, dt \textit{ converge} \quad \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(t)\, dt \textit{ converge}}$

b. $\boxed{\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt \textit{ diverge} \quad \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} g(t)\, dt \textit{ diverge}}$

2) *De plus, dans le cas de la convergence, on a :*

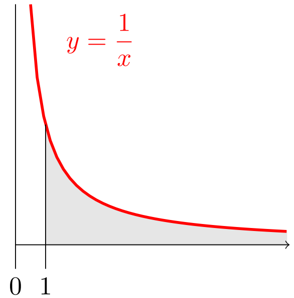
$$\boxed{0 \ \leqslant\ \int_a^{+\infty} f(t)\, dt \ \leqslant\ \int_a^{+\infty} g(t)\, dt}$$

V. Le cas des fonctions continues positives

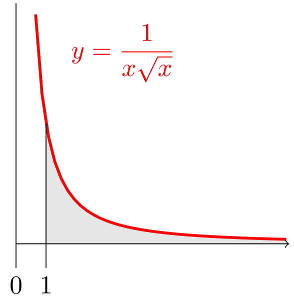
Remarque préliminaire

- L'intérêt des fonctions continues positives a été souligné dans le chapitre « Intégration sur un segment ». Lorsque la fonction f est continue et positive, l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ est l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre a et x.
- L'aire sous la courbe entre a et $+\infty$ est donc définie comme limite, quand $x \to +\infty$, de l'aire sous la courbe de $\mathscr{C}_f$ entre a et x.

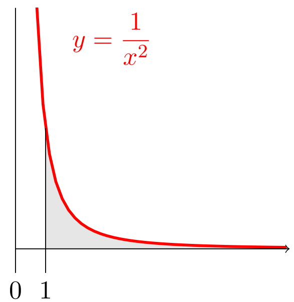
Représentation graphique des exemples précédents.



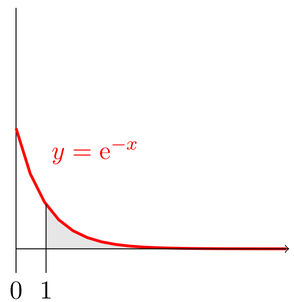
$= +\infty$



$= 2$



$= 1$



$= \frac{1}{e}$

II.2. Intégration par parties : un exemple

Exemple

Déterminer la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^3}\ dt$.

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{t^3}$ est continue (notamment) sur $[1, +\infty[$.

On peut donc considérer la fonction :

$$F : \left|\begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_1^x f(t)\ dt \end{array}\right.$$

primitive sur $[1, +\infty[$ de la fonction f qui s'annule en 1.

On procède alors par IPP pour calculer $F(x)$: $\left|\begin{array}{ll} u = \dfrac{1}{t} & u' = -\dfrac{1}{t^2} \\ v' = \dfrac{1}{t^2}\, e^{\frac{1}{t}} & v = -e^{\frac{1}{t}} \end{array}\right.$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^3}\ dt &= \left[-\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}\ dt \\ &= \left(e^1 - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \right) - \left[-e^{\frac{1}{t}} \right]_1^x \\ &= \left(\cancel{e^1} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \right) - \left(\cancel{e^1} - e^{\frac{1}{x}} \right) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \end{aligned}$$

Or $e^{\frac{1}{x}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1$. On en conclut que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente et :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} f(t)\ dt = \lim_{x \to +\infty} \left(\int_1^x \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}\ dt \right) = 1}$$

II.3. Changement de variable : un exemple

Exemple

Déterminer la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{e}^t+1}$.

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^t+1}$ est continue (notamment) sur $[0,+\infty[$.

On peut donc considérer la fonction :

$$F : \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt \end{array} \right.$$

primitive sur $[0,+\infty[$ de la fonction f qui s'annule en 0.

Posons le changement de variable $\boxed{u = \mathrm{e}^t}$:

- $u = \mathrm{e}^t$ donc $du = \mathrm{e}^t\, dt$ et $dt = \dfrac{du}{\mathrm{e}^t} = \dfrac{du}{u}$
- Si $t = 0$ alors $u = \mathrm{e}^0 = 1$
- Si $t = x$ alors $u = \mathrm{e}^x$

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{\mathrm{e}^t+1} &= \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{du}{u(u+1)} \\ &= \int_1^{\mathrm{e}^x} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du = \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{du}{u} - \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{du}{u+1} \\ &= [\ \ln u\ ]_1^{\mathrm{e}^x} - [\ \ln(u+1)\ ]_1^{\mathrm{e}^x} = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\right) + \ln 2 \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente et :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \lim_{x\to+\infty} \left(\int_0^x \frac{dt}{\mathrm{e}^t+1}\, dt\right) = \ln 2}$$

IV.6. Inégalité triangulaire

Théorème 7.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue sur $[a,+\infty[$.

Supposons de plus que : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ est absolument convergente.

1) *Alors : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente.*

2) $\boxed{\left| \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt \right| \leqslant \displaystyle\int_a^{+\infty} |\ f(t)\ |\ dt}$

Démonstration.

1) C'est le résultat du théorème 6.

2) On se ramène (encore et toujours !) au cas des intégrales sur un segment. Soit $x \geqslant a$. Alors on a :

$$|F(x)| = \left| \int_a^x f(t)\, dt \right| \leqslant \int_a^x |\ f(t)\ |\ dt$$

La quantité de droite converge, par hypothèse, vers $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|\, dt$.
D'autre part (théorème de composition des limites), on a :

$$\lim_{x\to+\infty} |F(x)| = |\lim_{x\to+\infty} F(x)| = \left| \int_a^{+\infty} f(t)\, dt \right|$$

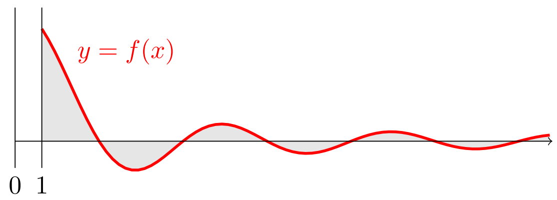
*(on rappelle que F admet une limite finie en $+\infty$ d'après **1)**)*
L'inégalité souhaitée est donc vérifiée par passage à la limite dans l'inégalité précédente. □

Remarque
Globalement, on obtient les mêmes propriétés que sur les intégrales sur un segment. Cependant, notez qu'on suppose `TOUJOURS` de la convergence pour pouvoir écrire ces propriétés dans le cas des intégrales impropres.

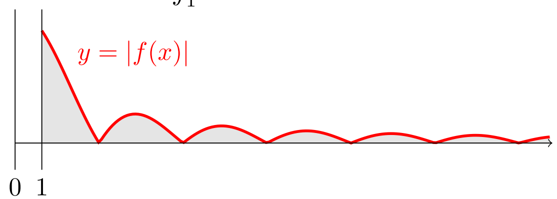
Remarque
Ce résultat n'est pas une équivalence : il existe des intégrales impropres convergentes mais non absolument convergentes. Dans ce cas, on parle parfois de **semi-convergence**.

- Pour construire un exemple d'intégrale semi-convergente, l'idée est de choisir une fonction successivement positive puis négative de sorte qu'un phénomène de compensation s'opère :
  - × sur un intervalle où f est positive, l'aire est comptée positivement.
  - × sur l'intervalle « suivant », f est négative, l'aire est comptée négativement et réduit l'aire précédente.

Représentation graphique d'une intégrale semi-convergente.



L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente.



L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f(t)|\ dt$ n'est pas convergente.

III. Intégrales classiques

Théorème 1.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) $$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1}$$

(Critère de Riemann)

2) $$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\ dt \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 0}$$

Démonstration.

1) Soit $x \geqslant 1$.

Si $\alpha = 1$: $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t} = [\ \ln t\ ]_1^x = \ln x$

Comme $\ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge.

Si $\alpha \neq 1$: $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \int_1^x t^{-\alpha}\ dt = \left[\ \frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\ \right]_1^x = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1}$

Enfin si $-\alpha+1 < 0$ alors $x^{-\alpha+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

et si $-\alpha+1 > 0$ alors $x^{-\alpha+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2) Soit $x \geqslant 0$.

Si $\alpha = 0$: $\displaystyle\int_0^x 1\ dt = [\ t\ ]_0^x = x$

Comme $x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\ dt$ diverge.

Si $\alpha \neq 0$: $\displaystyle\int_0^x e^{-\alpha t}\ dt = \left[\ \frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha}\ \right]_0^x = -\left(\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}$

Enfin si $\alpha > 0$ alors $e^{-\alpha x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

et si $\alpha < 0$ alors $e^{-\alpha x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

□

Remarque

- La démonstration nous permet de connaître la valeur de ces intégrales (lorsqu'elles convergent) :

$$\boxed{\text{Si } \alpha > 1 \text{ alors } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}}$$

$$\boxed{\text{Si } \alpha > 0 \text{ alors } \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} \, dt = \frac{1}{\alpha}}$$

- On peut en déduire un résultat similaire pour la convergence des intégrales impropres $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ pour tout $a > 0$.
- Ainsi qu'un résultat pour la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} \, dt$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
- La condition importante lorsque l'on change une borne d'un intégrale impropre est de vérifier que la fonction à intégrer reste continue sur le nouvel intervalle d'étude ($[a, +\infty[$ en l'occurrence).

Théorème 6.
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue sur $[a, +\infty[$.

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(t) \, dt \textit{ est absolument convergente} \quad \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(t) \, dt \textit{ est convergente}}$$

Démonstration.
Notons $f^+ = \dfrac{|f| + f}{2}$ et $f^- = \dfrac{|f| - f}{2}$.

× $f^+ : x \mapsto \max(f(x), 0)$ est la partie positive de f.

× $f^- : x \mapsto -\min(f(x), 0) = \max(-f(x), 0)$ est la partie négative de f.

Supposons $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t) \, dt$ absolument convergente.

- On a : $\forall t \geqslant a, \ 0 \leqslant f^+(t) \leqslant |f(t)|$.
  Or $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)| \, dt$ est convergente. Donc, d'après le théorème 8, l'intégral impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f^+(t) \, dt$ est aussi convergente.
- On a : $\forall t \geqslant a, \ 0 \leqslant f^-(t) \leqslant |f(t)|$.
  Or $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)| \, dt$ est convergente. Donc, d'après le théorème 8, l'intégral impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f^-(t) \, dt$ est aussi convergente.

Enfin, on a : $f = f^+ - f^-$. On en conclut, par linéarité, que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t) \, dt$ est convergente. □

IV.4. Technique de majoration

Théorème 5.

Soient $a \in \mathbb{R}$ *et* $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *continues sur* $[a, +\infty[$.

Supposons de plus que : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ *et* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\ dt$ *convergent.*

Et supposons enfin : $\forall x \in [a, +\infty[,\ f(x) \leqslant g(x)$.

Alors on a :

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)\ dt \leqslant \int_a^{+\infty} g(t)\ dt}$$

Démonstration.
On se ramène (encore et toujours !) au cas des intégrales sur un segment.
Soit $x \geqslant a$. Alors on a :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt \leqslant \int_a^x g(t)\ dt = G(x)$$

Et comme F et G admettent une limite en $+\infty$, on peut passer à la limite dans cette inégalité. □

IV.5. Convergence absolue

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue sur $[a, +\infty[$.

- On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ est **absolument convergente** si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} |\ f(t)\ |\ dt$ converge.

IV. Propriétés des intégrales impropres

> On écrira les propriétés suivantes pour les intégrales impropres de type $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$. **Évidemment on peut écrire des résultats similaires pour les autres cas**.

IV.1. Relation de Chasles

Théorème 2.

Soient $a \in \mathbb{R}$ *et* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *continue sur* $[a, +\infty[$.

Supposons de plus que : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ *converge.*

Soit $c \in [a, +\infty[$. *Alors on a :*

1) $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)\ dt$ *converge.*

2) *De plus, on a :* $\boxed{\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt = \int_a^c f(t)\ dt + \int_c^{+\infty} f(t)\ dt}$

Démonstration.
La démonstration a déjà été faite (cf deuxième remarque du chapitre).
Soit $c \geqslant a$ et $x \geqslant c$:

$$\int_a^x f(t)\ dt = \int_a^c f(t)\ dt + \int_c^x f(t)\ dt$$

$$\text{et donc} \quad \int_c^x f(t)\ dt = \int_a^x f(t)\ dt - \int_a^c f(t)\ dt$$

Par hypothèse, $\displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ admet une limite finie en $+\infty$.

On en déduit que $\displaystyle\int_c^x f(t)\ dt$ admet aussi une limite finie en $+\infty$ et que :

$$\int_c^{+\infty} f(t)\ dt = \int_a^{+\infty} f(t)\ dt - \int_a^c f(t)\ dt$$

□

Remarque
L'hypothèse $c \geqslant a$ est importante. Comme f est continue sur $[a,+\infty[$ et $c \geqslant a$, alors f est continue sur le segment $[a,c]$. Ceci assure que l'intégrale $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ est bien définie.

IV.2. Linéarité

Théorème 3.
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f,g : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ continues sur $[a,+\infty[$.
Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
Supposons de plus que : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ <u>convergent</u>.

1) *Alors : $\displaystyle\int_a^{+\infty} (\lambda f+\mu g)(t)\,dt$ converge.*

2) *De plus, on a :*

$$\boxed{\int_a^{+\infty} (\lambda f+\mu g)(t)\,dt \;=\; \lambda\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \;+\; \mu\int_a^{+\infty} g(t)\,dt}$$

Démonstration.
On se ramène (encore et toujours !) au cas des intégrales sur un segment.
Soit $x \geqslant a$, alors on a, par linéarité de l'intégrale sur un segment :

$$\int_a^{x} (\lambda f+\mu g)(t)\,dt \;=\; \lambda\int_a^{x} f(t)\,dt \;+\; \mu\int_a^{x} g(t)\,dt$$

Comme F et G admettent des limites en $+\infty$, on en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} (\lambda f+g)(t)\,dt$ est convergente. Par passage à la limite dans cette égalité, on a de plus :

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f+g)(t)\,dt \;=\; \lambda\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \;+\; \mu\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$$

□

IV.3. Positivité

Théorème 4.
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue sur $[a,+\infty[$.
Supposons de plus que : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ <u>converge</u>.
Et supposons enfin : $\forall x \in [a,+\infty[,\ f(x) \geqslant 0$.

1) $\boxed{\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \;\geqslant\; 0}$

2) $\boxed{f \;>\; 0 \text{ sur } [a,+\infty[\quad\Rightarrow\quad \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \;>\; 0}$

3) $\boxed{\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \;=\; 0 \quad\Rightarrow\quad f \;=\; 0 \text{ sur } [a,+\infty[}$

Démonstration.
On se ramène (encore et toujours !) au cas des intégrales sur un segment.
Soit $x \geqslant a$.

1) Par positivité de l'intégrale sur un segment : $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \geqslant 0$.
Il suffit alors de passer à la limite dans cette égalité.

2) Si $f \neq 0$, alors $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt > 0$. Le passage à la limite dans cette inégalité ne permet pas de conclure ici (l'inégalité stricte devient large). Il faut donc être plus précis. Soit $c > a$. La relation de Chasles fournit :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \;=\; \underbrace{\int_a^{c} f(t)\,dt}_{>0} \;+\; \underbrace{\int_c^{+\infty} f(t)\,dt}_{\geqslant 0}$$

La stricte positivité est une nouvelle fois un résultat du chapitre « Intégration sur un segment ».

□