CH XIX : Généralités sur les variables aléatoires réelles

I. Variables aléatoires réelles

I.1. Définition

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

- On dit que X est une **variable aléatoire réelle** définie sur $(\Omega, \mathscr{A})$ si :
  - *(i)* X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ $(X : \Omega \to \mathbb{R})$
  - *(ii)* $\forall x \in \mathbb{R}, \ \ [X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \ \leqslant \ x\} \in \mathscr{A}$
- L'image de X, notée $X(\Omega)$ est nommée **support** de X.
  $X(\Omega)$ contient l'ensemble des valeurs que prend la fonction X.

> Le terme de « variable aléatoire réelle » peut paraître trompeur :
> - X n'est pas une variable, c'est une fonction !
> - X n'a rien d'aléatoire, la notion de probabilité n'entre même pas en jeu dans sa définition !

Remarque

- Reprenons la définition. X est une variable aléatoire si :
  - *(i)* X est une fonction,
  - *(ii)* X est une machine à créer des événements.

- Dans ce chapitre s'opère un changement de point de vue par rapport au précédent : on s'intéressait précédemment aux événements (des ensembles), l'objet de base est maintenant celui de variable aléatoire (des fonctions).
- À terme, on se servira donc de résultats issus des chapitres d'analyse sur les fonctions.

Exemple

1) On s'intéresse à l'expérience aléatoire consistant à observer le résultat d'1 lancer simultané de 2 dés.
- $\Omega = [\![1, 6]\!] \times [\![1, 6]\!]$ (on effectue un seul lancer, avec deux dés).
- L'univers Ω étant fini, on choisit $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- Considérons X la variable aléatoire consistant à calculer la somme des deux résultats obtenus :

$$X \ : \left| \begin{array}{ccccc} [\![1,6]\!] & \times & [\![1,6]\!] & \to & \mathbb{R} \\ (i & , & j) & \mapsto & i+j \end{array} \right.$$

  Cette variable aléatoire est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$.
  On peut préciser l'image de cette v.a.r. : $X(\Omega) = [\![2, 12]\!] \subseteq \mathbb{R}$
- L'ensemble $A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant 4\}$ est un bien un événement :
  A : « la somme des deux dés est inférieur à 4 ».
  $A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\} \quad (A \in \mathcal{P}(\Omega))$
  On notera : $A = [X \leqslant 4] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant 4\}$

  L'ensemble $B = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > 10\}$ est aussi un événement :
  B : « la somme des deux dés est strictement supérieur à 10 »
  $B = \{(5, 6), (6, 6), (6, 5)\} \quad (B \in \mathcal{P}(\Omega))$
  On notera : $B = [X > 10] = \overline{[X \leqslant 10]} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > 10\}$

  De même, on peut considérer les événements :
  - × $[2 < X \leqslant 7] = [X > 2] \cap [X \leqslant 7]$,
  - × $[2 \leqslant X < 7] = [X \leqslant 2] \cap [X < 7]$,
  - × $[2.3 \leqslant X < 7.5] = [3 \leqslant X \leqslant 7]$,
  - × $[-32 \leqslant X < e^{27}] = [2 \leqslant X \leqslant 12]$,
  - × ...

2) On s'intéresse à l'expérience aléatoire consistant à observer le résultat d'1 lancer simultané de 4 pièces.

- $\Omega = \{P, F\}^4$.
- L'univers étant fini, on choisit $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- Considérons X la v.a.r. consistant à compter le nombre de P obtenus lors du lancer.
- L'ensemble $C = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant 2\}$ est un bien un événement :
  C : « le lancer a produit, au plus, deux P ».
  Des lancers tels que (P, P, F, F), (F, F, F, F), (F, F, P, F) réalisent cet événement.
  On notera $C = [X \leqslant 2]$.

  On peut aussi considérer les événements :
  × $[X = 2]$: « le lancer contient exactement 2 P ».
  × $[1 < X \leqslant 3]$: « le lancer contient soit 2 soit 3 P ».
  × ...

Théorème 1.

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

Soit X une variable aléatoire réelle.

$$\boxed{\textit{Pour tout } I \textit{ intervalle de } \mathbb{R},\ \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\} \in \mathscr{A}}$$

Plus précisément, les ensembles suivants sont des événements :

- $[X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\}$ *où* $x \in \mathbb{R}$
- $[X \geqslant x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant x\}$ *où* $x \in \mathbb{R}$
- $[X < x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\}$ *où* $x \in \mathbb{R}$
- $[X > x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\}$ *où* $x \in \mathbb{R}$
- $[X = x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ *où* $x \in \mathbb{R}$
- $[x \leqslant X \leqslant y] = \{\omega \in \Omega \mid x \leqslant X(\Omega) \leqslant y\}$ *où* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
- ...

Démonstration.
C'est une conséquence directe du fait que X est une v.a.r. et des propriétés de stabilité vérifiées par une tribu.
Soient X une v.a.r. et $x \in \mathbb{R}$.

- $[X \leqslant x]$ est un événement par définition de v.a.r.
- $[X \geqslant x] = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \left[X > x - \frac{1}{n}\right]$.
  C'est la seule difficulté de la démonstration.
  ($\subset$) Soit $\omega \in [X \geqslant x]$. Ceci signifie que $X(\omega) \geqslant x$.
  Soit $n \geqslant \mathbb{N}$. Comme $x > x - \frac{1}{n}$, on a : $X(\omega) \geqslant x > x - \frac{1}{n}$.
  Ainsi, $\omega \in \left[X > x - \frac{1}{n}\right]$.
  ($\supset$) Soit $\omega \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \left[X > x - \frac{1}{n}\right]$. Ceci signifie que : $(\forall n \in \mathbb{N},\ X(\omega) > x - \frac{1}{n})$.
  On peut démontrer, par contraposée, que ceci implique que : $X(\omega) \geqslant x$.
- $[X = x] = [X \leqslant x] \cap [X \geqslant x]$.
- $[X < x] = [X \leqslant x] \setminus [X = x]$.
- $[X > x] = [X \geqslant x] \setminus [X = x]$.
- $[x \leqslant X \leqslant y] = [x \leqslant X] \cap [X \leqslant y]$.
- ... □

I.2. Fonction de répartition d'une v.a.r

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire réelle.

- On appelle **fonction de répartition de** X et on note F_X l'application :

$$\boxed{F_X \ : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F_X(x) \ = \ \mathbb{P}([X \leqslant x]) \end{array} \right.}$$

Théorème 2.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire réelle.

La fonction de répartition F_X vérifie les propriétés suivantes.

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ \ 0 \leqslant F_X(x) \leqslant 1.$

2) F_X *est croissante.*

3) $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0}$ *et* $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1}$

4) F_X *est continue à droite en tout point* $x \in \mathbb{R}$.

Autrement dit : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{\substack{t \to x \\ t > x}} F_X(t) = F_X(x)}$

5) F_X *admet une limite finie à gauche en tout point* $x \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{\substack{t \to x \\ t < x}} F_X(t) \ = \ F_X(x) - \mathbb{P}([X = x]) \ = \ \mathbb{P}([X < x])}$$

Démonstration.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_X(x) = \mathbb{P}[X \leqslant x] \in [0, 1]$ par définition de $\mathbb{P}$.

2) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leqslant y$. Alors $[X \leqslant x] \subseteq [X \leqslant y]$.
Par croissance des fonctions probabillités, on a alors :

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) \ \leqslant \ \mathbb{P}([X \leqslant y]) = F_X(y)$$

3) On démontre $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ (même idée pour l'autre propriété).
La fonction F_X est croissante et majorée par 1.
Elle admet donc une limite finie en $+\infty$ et :

$$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = \lim_{n \to +\infty} F_X(n) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}([X \leqslant n])$$

Or, comme $([X \leqslant n])_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements, le théorème de la limite monotone permet d'affirmer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}([X \leqslant n]) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} [X \leqslant n] \right)$$

Il reste alors à démontrer que : $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} [X \leqslant n] \ = \ \Omega.$

$(\subset)$ $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} [X \leqslant n]$ est un événement donc $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} [X \leqslant n] \subset \Omega$.

$(\supset)$ Soit $\omega \in \Omega$. Notons $m = \lceil X(\omega) \rceil$.
Par définition, $X(\omega) \leqslant \lceil X(\omega) \rceil = m$.
Ainsi, $\omega \in [X \leqslant m] \subset \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} [X \leqslant n]$.

4) La fonction F_X est croissante sur $[x, +\infty[$ et minorée par 0.
Elle admet donc une limite à droite en x et :

$$\lim_{\substack{t \to x \\ t > x}} F_X(x) = \lim_{n \to +\infty} F_X\left(x + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left([X \leqslant x + \frac{1}{n}]\right)$$

Or, comme $\left([X \leqslant x + \frac{1}{n}]\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements, le théorème de la limite monotone permet d'affirmer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left([X \leqslant x + \frac{1}{n}]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} [X \leqslant x + \frac{1}{n}] \right)$$

Et enfin (par double inclusion ...), on a : $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [X \leqslant x + \frac{1}{n}] = [X \leqslant x]$.

5) La fonction F_X est croissante sur $]-\infty, x]$ et majorée par 1.
Elle admet donc une limite à gauche en x et :

$$\lim_{\substack{t \to x \\ t < x}} F_X(x) = \lim_{n \to +\infty} F_X\left(x - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left([X \leqslant x - \frac{1}{n}]\right)$$

Or, comme $\left([X \leqslant x - \frac{1}{n}]\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements, le théorème de la limite monotone permet d'affirmer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left([X \leqslant x - \frac{1}{n}]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [X \leqslant x - \frac{1}{n}] \right)$$

Et enfin (par double inclusion ...), on a : $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} [X \leqslant x - \frac{1}{n}] = [X < x]$. $\square$

Corollaire 1.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé.*

Soit X *une variable aléatoire réelle.*

$$\boxed{F_X \text{ continue en } x \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow\ \mathbb{P}([X = x]) = 0}$$

Démonstration.
Par définition :

$$F_X \text{ continue en } x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t \to x^+} F_X(t) = F_X(x) = \lim_{t \to x^-} F_X(t)$$

Or, comme vu dans le théorème précédent, $\lim\limits_{t \to x^-} F_X(t) = \mathbb{P}([X < x])$.
De plus, $\mathbb{P}([X \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([X < x]) + \mathbb{P}([X = x])$.
(puisque $[X \leqslant x] \ = \ [X < x] \cup [X = x]$ *et que* $\mathbb{P}$ *est additive)*
Ainsi, $F_X(x) = \lim\limits_{t \to x^-} F_X(t)$ signifie que :

$$\mathbb{P}([X < x]) + \mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{P}([X < x])$$

ce qui équivaut à : $\mathbb{P}([X = x]) = 0$. □

Propriété

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire réelle.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

$$\boxed{\mathbb{P}([a < X \leqslant b]) = F_X(b) - F_X(a)}$$

Démonstration.
On remarque tout d'abord que :

$$[a < X \leqslant b] \ = \ [X \leqslant b] \setminus [X \leqslant a]$$

On en déduit que : $\mathbb{P}([a < X \leqslant b]) \ = \ \mathbb{P}([X \leqslant b]) - \mathbb{P}([X \leqslant a] \cap [X \leqslant b])$.
Enfin, comme $a < b$, on a $[X \leqslant a] \cap [X \leqslant b] \ = \ [X \leqslant a]$. □

I.3. Loi d'une v.a.r.

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire réelle.

- On appelle **loi de** X la donnée de toutes les probabilités $\mathbb{P}(X \in A)$ où A est une réunion au plus dénombrable d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Théorème 3.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé.*

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires réelles.*

$$\boxed{\left.\begin{array}{c} X \text{ et } Y \text{ ont même} \\ \text{fonction de répartition} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} X \text{ et } Y \text{ ont même loi} \\ \text{de probabilité} \end{array}}$$

Démonstration.
Admis. □

Remarque

- Contrairement au v.a.r. qui sont des fonctions non aléatoires, F_X dépend d'une probabilité $\mathbb{P}$. En fait, F_X donne précisément la répartition des images de X pour la probabilité $\mathbb{P}$.
  Autrement dit, F_X définit la répartition aléatoire de X et permet ainis d'expliquer le terme de v.a.r.
- Évidemment, ce résultat est une équivalence.
  On dira alors que la fonction de répartition caractérise la loi d'une var.