

I.3. Loi d'une v.a.r.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit X une variable aléatoire réelle.

- On appelle **loi de X** la donnée de toutes les probabilités $\mathbb{P}(X \in A)$ où A est une réunion au plus dénombrable d'intervalles de \mathbb{R} .

Théorème 3.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles.

$$\left. \begin{array}{l} X \text{ et } Y \text{ ont même} \\ \text{fonction de répartition} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} X \text{ et } Y \text{ ont même loi} \\ \text{de probabilité} \end{array}$$

Démonstration.

Admis. □

Remarque

- Contrairement au v.a.r. qui sont des fonctions non aléatoires, F_X dépend d'une probabilité \mathbb{P} . En fait, F_X donne précisément la répartition des images de X pour la probabilité \mathbb{P} .
Autrement dit, F_X définit la répartition aléatoire de X et permet ainsi d'expliquer le terme de v.a.r.
- Évidemment, ce résultat est une équivalence.
On dira alors que la fonction de répartition caractérise la loi d'une var.

CH XIX : Généralités sur les variables aléatoires réelles

I. Variables aléatoires réelles

I.1. Définition

Définition

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable.

- On dit que X est une **variable aléatoire réelle** définie sur (Ω, \mathcal{A}) si :
 - (i) X est une application de Ω dans \mathbb{R} ($X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$)
 - (ii) $\forall x \in \mathbb{R}, [X \leq x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$
- L'image de X , notée $X(\Omega)$ est nommée **support** de X .
 $X(\Omega)$ contient l'ensemble des valeurs que prend la fonction X .



Le terme de « variable aléatoire réelle » peut paraître trompeur :

- X n'est pas une variable, c'est une fonction !
- X n'a rien d'aléatoire, la notion de probabilité n'entre même pas en jeu dans sa définition !

Remarque

- Reprenons la définition. X est une variable aléatoire si :
 - (i) X est une fonction,
 - (ii) X est une machine à créer des événements.

- Dans ce chapitre s'opère un changement de point de vue par rapport au précédent : on s'intéressait précédemment aux événements (des ensembles), l'objet de base est maintenant celui de variable aléatoire (des fonctions).
- À terme, on se servira donc de résultats issus des chapitres d'analyse sur les fonctions.

Exemple

1) On s'intéresse à l'expérience aléatoire consistant à observer le résultat d'1 lancer simultané de 2 dés.

- $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket \times \llbracket 1, 6 \rrbracket$ (on effectue un seul lancer, avec deux dés).
- L'univers Ω étant fini, on choisit $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- Considérons X la variable aléatoire consistant à calculer la somme des deux résultats obtenus :

$$X : \left\{ \begin{array}{l} \llbracket 1, 6 \rrbracket \times \llbracket 1, 6 \rrbracket \\ (i, j) \end{array} \right. \rightarrow \mathbb{R} \quad \mapsto i + j$$

Cette variable aléatoire est bien à valeurs dans \mathbb{R} .

On peut préciser l'image de cette v.a.r. : $X(\Omega) = \llbracket 2, 12 \rrbracket \subseteq \mathbb{R}$

- L'ensemble $A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq 4\}$ est un bien un événement :
 $A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$ ($A \in \mathcal{P}(\Omega)$)
 On notera : $A = [X \leq 4] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq 4\}$

L'ensemble $B = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > 10\}$ est aussi un événement :

B : « la somme des deux dés est strictement supérieur à 10 »

$B = \{(5, 6), (6, 6), (6, 5)\}$ ($B \in \mathcal{P}(\Omega)$)

On notera : $B = [X > 10] = [X \leq 10]^c = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > 10\}$

De même, on peut considérer les événements :

$$\begin{aligned} \times [2 < X \leq 7] &= [X > 2] \cap [X \leq 7], & \times [2 \leq X < 7] &= [X \leq 2] \cap [X < 7], \\ \times [2, 3 \leq X < 7, 5] &= [3 \leq X \leq 7], & \times [-32 \leq X < e^2 7] &= [2 \leq X \leq 12], \\ \times \dots & \end{aligned}$$

Corollaire 1.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire réelle.

$$F_X \text{ continue en } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathbb{P}([X = x]) = 0$$

Démonstration.

Par définition :

$$F_X \text{ continue en } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow x^+} F_X(t) = F_X(x) = \lim_{t \rightarrow x^-} F_X(t)$$

Or, comme vu dans le théorème précédent, $\lim_{t \rightarrow x^-} F_X(t) = \mathbb{P}([X < x])$.

De plus, $\mathbb{P}([X \leq x]) = \mathbb{P}([X < x]) + \mathbb{P}([X = x])$.

(puisque $[X \leq x] = [X < x] \cup [X = x]$ et que \mathbb{P} est additive)

Ainsi, $F_X(x) = \lim_{t \rightarrow x^-} F_X(t)$ signifie que :

$$\mathbb{P}([X < x]) + \mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{P}([X < x])$$

ce qui équivaut à : $\mathbb{P}([X = x]) = 0$. □

Propriété

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire réelle.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

$$\mathbb{P}([a < X \leq b]) = F_X(b) - F_X(a)$$

Démonstration.

On remarque tout d'abord que :

$$[a < X \leq b] = [X \leq b] \setminus [X \leq a]$$

On en déduit que : $\mathbb{P}([a < X \leq b]) = \mathbb{P}([X \leq b]) - \mathbb{P}([X \leq a] \cap [X \leq b])$.

Enfin, comme $a < b$, on a $[X \leq a] \cap [X \leq b] = [X \leq a]$. □

Il reste alors à démontrer que : $\bigcup_{n=0}^{+\infty} [X \leq n] = \Omega$.

(c) $\bigcup_{n=0}^{+\infty} [X \leq n]$ est un événement donc $\bigcup_{n=0}^{+\infty} [X \leq n] \subset \Omega$.

(d) Soit $\omega \in \Omega$. Notons $m = \lceil X(\omega) \rceil$.

Par définition, $X(\omega) \leq \lceil X(\omega) \rceil = m$.

Ainsi, $\omega \in [X \leq m] \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} [X \leq n]$.

4) La fonction F_X est croissante sur $[x, +\infty[$ et minorée par 0. Elle admet donc une limite à droite en x et :

$$\lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t > x}} F_X(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X\left(x + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left([X \leq x + \frac{1}{n}]\right)$$

Or, comme $([X \leq x + \frac{1}{n}])_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements, le théorème de la limite monotone permet d'affirmer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left([X \leq x + \frac{1}{n}]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} [X \leq x + \frac{1}{n}]\right)$$

Et enfin (par double inclusion ...), on a : $\bigcap_{n=1}^{+\infty} [X \leq x + \frac{1}{n}] = [X \leq x]$.

5) La fonction F_X est croissante sur $] - \infty, x]$ et majorée par 1. Elle admet donc une limite à gauche en x et :

$$\lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t < x}} F_X(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X\left(x - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left([X \leq x - \frac{1}{n}]\right)$$

Or, comme $([X \leq x - \frac{1}{n}])_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements, le théorème de la limite monotone permet d'affirmer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left([X \leq x - \frac{1}{n}]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [X \leq x - \frac{1}{n}]\right)$$

Et enfin (par double inclusion ...), on a : $\bigcup_{n=1}^{+\infty} [X \leq x - \frac{1}{n}] = [X < x]$

2) On s'intéresse à l'expérience aléatoire consistant à observer le résultat d'1 lancer simultané de 4 pièces.

- $\Omega = \{P, F\}^4$.
 - L'univers étant fini, on choisit $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
 - Considérons X la v.a.r. consistant à compter le nombre de P obtenus lors du lancer.
 - L'ensemble $C = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq 2\}$ est un bien un événement : C : « le lancer a produit, au plus, deux P ».
- Des lancers tels que (P, P, F, F) , (F, F, F, F) , (F, F, P, F) réalisent cet événement.

On notera $C = [X \leq 2]$.

On peut aussi considérer les événements :

- × $[X = 2]$: « le lancer contient exactement 2 P ».
- × $[1 < X \leq 3]$: « le lancer contient soit 2 soit 3 P ».
- × ...

Théorème 1.

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable.

Soit X une variable aléatoire réelle.

Pour tout I intervalle de \mathbb{R} , $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\} \in \mathcal{A}$

Plus précisément, les ensembles suivants sont des événements :

- $[X \leq x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$ où $x \in \mathbb{R}$
- $[X \geq x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq x\}$ où $x \in \mathbb{R}$
- $[X < x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\}$ où $x \in \mathbb{R}$
- $[X > x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\}$ où $x \in \mathbb{R}$
- $[X = x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ où $x \in \mathbb{R}$
- $[x \leq X \leq y] = \{\omega \in \Omega \mid x \leq X(\omega) \leq y\}$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
- ...

Démonstration.

C'est une conséquence directe du fait que X est une v.a.r. et des propriétés de stabilité vérifiées par une tribu.

Soient X une v.a.r. et $x \in \mathbb{R}$.

- $[X \leq x]$ est un événement par définition de v.a.r.

- $[X \geq x] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} [X > x - \frac{1}{n}]$.

C'est la seule difficulté de la démonstration.

- (\subset) Soit $\omega \in [X \geq x]$. Ceci signifie que $X(\omega) \geq x$.

Soit $n \geq \mathbb{N}$. Comme $x > x - \frac{1}{n}$, on a : $X(\omega) \geq x > x - \frac{1}{n}$.
Ainsi, $\omega \in [X > x - \frac{1}{n}]$.

- (\supset) Soit $\omega \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [X > x - \frac{1}{n}]$. Ceci signifie que : $(\forall n \in \mathbb{N}, X(\omega) > x - \frac{1}{n})$.

On peut démontrer, par contraposée, que ceci implique que : $X(\omega) \geq x$.

- $[X = x] = [X \leq x] \cap [X \geq x]$.
- $[X < x] = [X \leq x] \setminus [X = x]$.
- $[X > x] = [X \geq x] \setminus [X = x]$.
- $[x \leq X \leq y] = [x \leq X] \cap [X \leq y]$.
- ...

□

1.2. Fonction de répartition d'une v.a.r

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire réelle.

- On appelle **fonction de répartition** de X et on note F_X l'application :

$$F_X : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F_X(x) = \mathbb{P}([X \leq x]) \end{matrix}$$

Théorème 2.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire réelle.

La fonction de répartition F_X vérifie les propriétés suivantes.

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(x) \leq 1$.

- 2) F_X est croissante.

- 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$

- 4) F_X est continue à droite en tout point $x \in \mathbb{R}$.

Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{t \rightarrow x^+} F_X(t) = F_X(x)$$

- 5) F_X admet une limite finie à gauche en tout point $x \in \mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{t \rightarrow x^-} F_X(t) = F_X(x) - \mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{P}([X < x])$$

Démonstration.

- 1) Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x] \in [0, 1]$ par définition de \mathbb{P} .

- 2) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leq y$. Alors $[X \leq x] \subseteq [X \leq y]$.

Par croissance des fonctions probabilités, on a alors :

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leq x]) \leq \mathbb{P}([X \leq y]) = F_X(y)$$

- 3) On démontre $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ (même idée pour l'autre propriété).

La fonction F_X est croissante et majorée par 1.

Elle admet donc une limite finie en $+\infty$ et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([X \leq n])$$

Or, comme $([X \leq n])_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements, le théorème de la limite monotone permet d'affirmer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([X \leq n]) = \mathbb{P} \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} [X \leq n] \right)$$