Remarque
On rencontrera cette formule sous différentes formes (différentes valeurs pour x et y). On a notamment :

- $(x+y)^n = (y+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$
- $(x-y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^{n-k} y^k$
- $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$
- $(1+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

  Si E est un ensemble à n éléments, on a :

  $$\mathcal{P}(E) = \bigcup_{k=0}^{n} P_k \text{ (union disjointe) et donc } \operatorname{Card} E = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Card}(P_k)$$

  On obtient ainsi une nouvelle démonstration de : $\operatorname{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.
- $(1-1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

Exercice
Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^k$

b) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1} x^k$

CH VIII : Dénombrement
(Ensembles finis - cœfficients binomiaux)

I. Les ensembles finis

I.1. Cardinal d'un ensemble fini

Afin de définir correctement la notion de cardinal, nous avons besoin de montrer quelques résultats au préalable.

Lemme 1 (`POLY`)**.**
Soit $m \geqslant 2$ et $a \in [\![1, m]\!]$.
Alors $[\![1, m]\!] \setminus \{a\}$ et $[\![1, m-1]\!]$ sont en bijection.
(si $m = 1$, ce lemme revient à dire que $\varnothing$ est en bijection avec lui-même)

Démonstration.
Il suffit de considérer l'application :

$$h : \begin{array}{|rcl} [\![1, m]\!] \setminus \{a\} & \to & [\![1, m-1]\!] \\ x & \mapsto & \begin{cases} x & \text{si } x < a \\ x-1 & \text{si } x > a \end{cases} \end{array}$$

□

Lemme 2 (`POLY`)**.**
Soient $[\![1, n]\!]$ et $[\![1, m]\!]$ deux intervalles entiers ($n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$).
S'il existe une injection de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, m]\!]$, alors $n \leqslant m$.

Démonstration.
On montre par récurrence que : $\forall n \geqslant 1, \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n) : \forall m \geqslant 1$, (il existe une injection de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, m]\!]$) $\Rightarrow (n \leqslant m)$.

Initialisation : prenons $n = 1$. Soit $m \geqslant 1$. L'implication est vérifiée car son membre de droite l'est ($1 = n \leqslant m$). Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.
Hérédité : soit $n \geqslant 1$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. Soit $m \geqslant 1$. Supposons qu'il existe une injection f de $[\![1, n+1]\!]$ sur $[\![1, m]\!]$. On alors $m \geqslant 2$ (si l'on suppose par l'absurde $m = 1$ alors ...). Notons $a = f(n+1)$ et considérons l'application $g : \left| \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] & \to & [\![1,m]\!] \setminus \{a\} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$. Cette fonction est injective car restriction d'une fonction injective. D'après le lemme précédent, il existe une bijetion $h : [\![1,m]\!] \setminus \{a\} \to [\![1, m-1]\!]$. L'application $h \circ g : [\![1,n]\!] \to [\![1, m-1]\!]$ est injective donc, par principe de récurrence, on a $n \leqslant m-1$ et ainsi $n+1 \leqslant m$. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
Par principe de récurrence, on a montré : $\forall n \geqslant 1, \mathcal{P}(n)$. □

Proposition 1 (POLY).
Soient $[\![1,n]\!]$ et $[\![1,m]\!]$ deux intervalles entiers.
S'il existe une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,m]\!]$, alors $m = n$.

Démonstration.
Une telle bijection f est notamment une injection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,m]\!]$ et sa réciproque f^{-1} est une injection de $[\![1,m]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$. D'après le lemme 2, on a $n \leqslant m$ et $m \leqslant n$. D'où $n = m$. □

On peut maintenant donner une définition rigoureuse d'ensemble fini et de cardinal.

Définition

Soit E un ensemble non vide.

- On dit que E est un **ensemble fini** s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une application bijective $\varphi : E \to [\![1,n]\!]$.
- Si E est un ensemble fini, on appelle **cardinal de** E l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E et $[\![1,n]\!]$ sont en bijection. Cet entier est unique : si E est en bijection avec $[\![1,n_1]\!]$ et $[\![1,n_2]\!]$ alors $n_1 = n_2$.
- Si E est fini, on note $\mathrm{Card}\, E$ son cardinal.
  (autrement dit, $\mathrm{Card}\, E = n \Leftrightarrow E$ *est en bijection avec* $[\![1,n]\!]$*)*

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\,y^{n-k}\right)\\
&= x\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\,y^{n-k}\right) + y\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\,y^{n-k}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}\,y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\,y^{n+1-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^k\,y^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\,y^{n+1-k}\\
&= \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^k\,y^{n-(k-1)}\right) + \binom{n}{n}\,x^{n+1}y^0\\
&+ \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k\,y^{n+1-k}\right) + \binom{n}{0}\,x^0y^{n+1}\\
&= x^0y^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)x^k\,y^{n+1-k}\right) + x^{n+1}y^0\\
&= x^0y^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^k\,y^{n+1-k}\right) + x^{n+1}y^0\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k\,y^{n+1-k}
\end{aligned}$$

L'avant dernière ligne est obtenue grâce à la formule du triangle de Pascal.
La dernière est obtenue en remarquant que :
$x^0y^{n+1} = \binom{n+1}{0}\,x^0y^{n+1}$ et $x^{n+1}y^0 = \binom{n+1}{n+1}\,x^{n+1}y^0$.
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Ainsi, par principe de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$. □

II.8.a) Formule du binôme

Théorème 6.

Soient x et y des réels.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\, y^k}$$

Démonstration.
Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n)$: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}$.

1. **<u>Initialisation</u>**

$(x+y)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k\, y^{0-k} = \binom{0}{0} x^0\, y^0 = 1 \times 1 \times 1 = 1$.

La propriété $\mathcal{P}(0)$ est donc vérifiée.

2. **<u>Hérédité</u> :** soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée.

Démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. (*i.e.* $(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}$)

$$(x+y)^{n+1} = (x+y) \times (x+y)^n$$

or, par hypothèse de récurrence ($\mathcal{P}(n)$), on sait que :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}$$

On a donc :

$$(x+y)^{n+1} = (x+y) \times \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k} \right)$$

On distribue alors la somme $(x+y)$.

Remarque

- L'unicité de n peut être démontrée via la proposition 1.
  En effet, s'il existe deux bijections $f : E \to [\![1, n]\!]$ et $g : E \to [\![1, p]\!]$ alors $f \circ g^{-1} : [\![1, p]\!] \to [\![1, n]\!]$ est bijective. On conclut donc que $p = n$.
- Une bijection entre un ensemble E et $[\![1, n]\!]$ n'est rien d'autre qu'une **numérotation** des éléments de E.

$$\begin{array}{rcl} [\![1, n]\!] & \to & E \\ i & \mapsto & x_i \end{array}$$

  Autrement dit, si E est fini, on pourra l'écrire sous la forme $\{x_1, \dots, x_n\}$.
- Avec cette définition, l'ensemble vide n'est pas un ensemble fini !
- On étend donc la définition précédente. Par convention, l'ensemble vide est considéré comme fini et de cardinal 0.
  (en accord avec la définition précédente si on considère que $[\![1, 0]\!] = \varnothing$)

Proposition 2.

Soit A un ensemble fini.

Soit B un ensemble.

S'il existe une bijection de A sur B alors B est fini et $\text{Card}\, B = \text{Card}\, A$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} A \textit{ ensemble fini} \\ \textit{Il existe } \varphi : A \to B \textit{ bijective} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \bullet\ B \textit{ est fini} \\ \bullet\ \text{Card}\, B = \text{Card}\, A \end{array}}$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ le cardinal de A, ensemble fini (on note $\text{Card}\, A = n$).
Ainsi, il existe $\psi : A \mapsto [\![1, n]\!]$ bijective.
L'application $\psi \circ \varphi^{-1} : B \mapsto [\![1, n]\!]$ est bijective. On en conclut que B est un ensemble fini et que $\text{Card}\, B = n = \text{Card}\, A$. □

I.2. Cardinal d'un sous-ensemble d'un ensemble fini

Lemme 3 (POLY).

Soit A une partie de $[\![1,n]\!]$ ($A \subset [\![1,n]\!]$).

1) *Alors A est fini et* $\mathrm{Card}\, A \leqslant n$.

2) *De plus :* $(\mathrm{Card}\, A = n) \ \Leftrightarrow\ (A = [\![1,n]\!])$

Démonstration.
Par récurrence sur n. □

Théorème 1.

Soit E un ensemble fini.

Soit A une partie de E ($A \subset E$).

1) *Alors A est fini et* $\mathrm{Card}\, A \leqslant \mathrm{Card}\, E$.

2) *Lorsque E est fini, on a alors :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} A \subset E \\ \mathrm{Card}\, A = \mathrm{Card}\, E \end{array}\right\} \ \Leftrightarrow\ A = E}$$

Démonstration.
E est ensemble fini donc il existe $n \in \mathbb{N}$ et une bijection f de E sur $[\![1,n]\!]$.
Soit $A \subset E$.
On considère alors $g : A \to f(A)$ telle que : $\forall x \in A, g(x) = f(x)$.
L'ensemble $f(A)$ est une partie de $[\![1,n]\!]$ donc, par le lemme 3, il est fini et $\mathrm{Card}\, f(A) \leqslant n$. L'application g est une bijection de A sur $f(A)$, donc, d'après la proposition 2, $\mathrm{Card}\, A = \mathrm{Card}\, f(A)$. Ainsi, $\mathrm{Card}\, A = \mathrm{Card}\, f(A) \leqslant n = \mathrm{Card}\, E$.
(cas d'égalité : distinguer dans la preuve le cas $A = E$ et le cas $A \subsetneq E$) □

Méthodologie

Ce théorème fournit une méthode pour démontrer que deux ensembles **finis** sont égaux. Plus précisément : soit E est un ensemble fini.
Pour montrer que $A = E$, il suffit de démontrer :

- $A \subset E$,
- $\mathrm{Card}\, A = \mathrm{Card}\, E$.

× Méthode théorique.
On s'intéresse au nombre de couples formés d'un ensemble $A \in P_k$ et d'un élément a pris dans A. Il y en a : $\mathrm{Card}\, P_k \times \mathrm{Card}\, A = \binom{n}{k} \times k$.
On aurait pu raisonner différement : choisir d'abord un élément $a \in E$ puis former l'ensemble A en choisissant $k-1$ éléments autres que a et en ajoutant a. Au final, on obtient : $\mathrm{Card}\, E \times \mathrm{Card}\, P_k^a = n \binom{n-1}{k-1}$

g) Encore et toujours deux méthodes pour démontrer cette égalité.

× Méthode calculatoire.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Il s'agit de remarquer que : $(1+x)^{a+b} = (1+x)^a(1+x)^b$ et d'appliquer la formule du binôme (*cf* Théorème 6).

× Méthode théorique.
Si E est un ensemble à $a+b$ éléments, on peut l'écrire comme union disjointe de F (à a éléments) et de G (à b éléments). Pour choisir une partie à p éléments de E on peut choisir une partie à k éléments de F et la compléter par une partie à $p-k$ éléments de G. Plus précisément, l'ensemble P_k est en bijection avec :

$$\bigcup_{k=0}^{p} (T_k \times R_{p-k})$$

où T_k est l'ensemble des parties à k éléments de F
et R_k est l'ensemble des parties à $p-k$ éléments de G.

□

e) Ici aussi, il y a deux méthodes pour démontrer cette égalité.

× Méthode calculatoire.

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-\cancel{1})-(k-\cancel{1}))!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{k\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!\,((n-1)-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} = \frac{(n-k)\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!}$$

En sommant ces deux éléments, on obtient :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(k+(n-k))\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

× Méthode théorique.
Soit E est un ensemble à n éléments. Soit $a \in E$. Notons alors P_k^a l'ensemble des parties de E à k éléments contenant a et $P_k^{\bar{a}}$ l'ensemble des parties de E à k éléments contenant a ne contenant pas a.
Tout $A \in P_k$ vérifie : $(A \in P_k^a)$ OU $(A \in P_k^{\bar{a}})$.
Autrement dit : $P_k = P_k^a \cup P_k^{\bar{a}}$ (union disjointe).
On en déduit que : $\text{Card}(P_k) = \text{Card}(P_k^a) + \text{Card}(P_k^{\bar{a}})$.
On conclut en remarquant tout d'abord que : $\text{Card}(P_k) = \binom{n}{k}$

puis que : $\text{Card}(P_k^a) = \binom{n-1}{k-1}$ (on choisit $k-1$ éléments dans $E \setminus \{a\}$ et on ajoute a)

et enfin : $\text{Card}(P_k^{\bar{a}}) = \binom{n-1}{k}$ (on choisit k éléments dans $E \setminus \{a\}$)

f) Encore deux méthodes pour démontrer cette égalité.

× Méthode calculatoire.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a :

$$n\binom{n-1}{k-1} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = k\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = k\binom{n}{k}$$

I.3. Applications entre ensembles finis

Proposition 3.

Soient E et F deux ensembles finis.

Soit $f : E \to F$ une application.

1) *Alors $f(E)$ est fini et* $\text{Card}\, f(E) \leqslant \min(\text{Card}\, E, \text{Card}\, F)$.

2) $\text{Card}\, f(E) = \text{Card}\, E \;\Leftrightarrow\; f$ *est injective*

3) $\text{Card}\, f(E) = \text{Card}\, F \;\Leftrightarrow\; f$ *est surjective*

Démonstration.

1) Cette inégalité signifie : $\text{Card}\, f(E) \leqslant \text{Card}\, E$ et $\text{Card}\, f(E) \leqslant \text{Card}\, F$.
- $f(E)$ est une partie de F (fini) donc est fini et $\text{Card}\, f(E) \leqslant \text{Card}\, F$.
- Comme f est une application, à tout élément x de E on associe seulement un élément y de F, qui est alors, par définition, dans $f(E)$.
  Ainsi : $\text{Card}\, f(E) \leqslant \text{Card}\, E$.

2) L'égalité $(\text{Card}\, E = \text{Card}\, f(E))$ siginifie qu'il y a autant d'éléments dans E que d'éléments dans $f(E)$. Autrement dit, tout élément de $f(E)$ n'est atteint qu'une fois par f, ce qui signifie que f est injective.

3) On a égalité $(\text{Card}\, F = \text{Card}\, f(E))$ ssi $F = f(E)$ (ce qui signifie que f est surjective). □

Proposition 4.

Soient E et F deux ensembles **finis**.

Soit $f : E \to F$ une application de E dans F.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f : E \to F \\ \text{Card}\, E = \text{Card}\, F \end{array}\right\} \Rightarrow \textit{(f injective} \Leftrightarrow f \textit{ surjective} \Leftrightarrow f \textit{ bijective)}}$$

Démonstration.
On suppose $\text{Card}\, E = \text{Card}\, F$. D'après la proposition 3, on a :

$$\begin{array}{rcl} f \text{ injective} & \Leftrightarrow & \text{Card}\, f(E) = \text{Card}\, E \\ & \Leftrightarrow & \text{Card}\, f(E) = \text{Card}\, F \\ & \Leftrightarrow & f \text{ surjective} \end{array}$$

□

Proposition 5.

Soit E un ensemble fini.

Soit F un ensemble fini.

1) *Il existe une injection de E dans F ssi* $\mathrm{Card}\, E \leqslant \mathrm{Card}\, F$.

2) *Il existe une surjection de E sur F ssi* $\mathrm{Card}\, E \geqslant \mathrm{Card}\, F$.

3) *Il existe une bijection de E sur F ssi* $\mathrm{Card}\, E = \mathrm{Card}\, F$.

Démonstration.
C'est une application directe de la proposition 3. □

I.4. Ensemble (infini) dénombrable

Les ensembles qui ne sont pas finis sont dits infinis. Parmi ces ensembles, on peut distinguer ceux dont on peut numéroter les éléments.

Définition
Un ensble E est (infini) **dénombrable** s'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et E.

Exemple
- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sont infinis dénombrables : on peut numéroter leurs éléments.
- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable : on ne peut numéroter les éléments de $\mathbb{R}$.

Ceci signifie qu'il existe différentes « tailles » d'infinis. Ce chapitre étant consacré aux ensembles finis, nous ne développerons pas ces considérations.

Exercice
On note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs.
Démontrer que les applications suivantes sont bijectives.

a. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & 2\mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array} \right.$

b. $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} -2n & \text{si } n \leqslant 0 \\ 2n+1 & \text{si } n > 0 \end{cases} \end{array} \right.$

Conclusion :

× *il y a « autant » d'entiers naturels pairs que d'entiers naturels !*

× *il y a « autant » d'entiers relatifs que d'entiers naturels !*

Cette formule s'écrit souvent sous la forme d'un triangle :

n \ k	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
⋮	...						

f) $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\boxed{k \dbinom{n}{k} = n \dbinom{n-1}{k-1}}$

g) <u>Formule de Vandermonde</u> :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2, \forall p \in [\![0, a+b]\!], \quad \boxed{\sum_{k=0}^{p} \binom{a}{k}\binom{b}{p-k} = \binom{a+b}{p}}$$

Démonstration.

d) Il y a deux méthodes pour démontrer cette égalité.

× Méthode calculatoire.

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

× Méthode théorique.
Soit E est un ensemble à n éléments.
Notons P_k l'ensemble des parties à k éléments de E.

L'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} P_k & \to & P_{n-k} \\ A & \mapsto & \overline{A} \end{array} \right.$ est une bijection.

Il y a donc autant de parties à k éléments de E que de parties à $n-k$ éléments de E (les complémentaires des précédents).

II.8. Propriétés des coefficients binomiaux $\dbinom{n}{k}$

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

a) $\boxed{\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}}$

b) Si $k < 0$ ou si $k > n$, on convient que $\dbinom{n}{k} = 0$.

c) Quelques cas simples :

- $\dbinom{n}{0} = 1$: la seule partie à 0 élément d'un ensemble à n éléments est l'ensemble vide.
- $\dbinom{n}{n} = 1$: la seule partie à n éléments d'un ensemble E à n éléments est l'ensemble E.
- $\dbinom{n}{1} = n$: il y a n parties à un élément d'un ensemble E à n éléments (ce sont les singletons $\{x_i\}$).
- $\dbinom{n}{n-1} = n$: il y a n parties à $n-1$ éléments d'un ensemble E à n éléments (ce sont les ensembles $E \setminus \{x_i\}$).

d) $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\boxed{\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}}$

e) Formule du triangle de Pascal :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \boxed{\dbinom{n}{k} = \dbinom{n-1}{k-1} + \dbinom{n-1}{k}}$$

II. Dénombrement

Dénombrer un ensemble fini non vide E, c'est déterminer le cardinal de E. Autrement dit, c'est compter les éléments de l'ensemble E. On s'intéresse donc dans cette section à lister des méthodes permettant le calcul du cardinal en fonction de la forme de l'ensemble E.

II.1. Cardinal d'une union disjointe d'ensembles finis : principe additif

Proposition 6.

*Soient A et B **deux ensembles finis**.*

*Supposons $A \cap B = \varnothing$ (**ensembles disjoints**).*

1) *$A \cup B$ est fini.*

2) $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}\, A + \mathrm{Card}\, B$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} A \text{ et } B \text{ finis} \\ A \cap B = \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \bullet\ A \cup B \text{ fini} \\ \bullet\ \mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}\, A + \mathrm{Card}\, B \end{array}}$$

Démonstration.
A est fini, de cardinal noté n, et B est fini, de cardinal noté m.
Il suffit de construire une bijection entre $A \cup B$ et $[\![1, n+m]\!]$. □

Exemple
On considère un jeu de 32 cartes.
Combien y a-t-il de mains (ensembles de 5 cartes) contenant au moins 3 rois ?

Démonstration.
Notons M_{3R} l'ensemble des mains contenant exactement 3 rois et M_{4R} l'ensemble des mains contenant exactement 4 rois. Ces deux ensembles sont disjoints et l'ensemble M recherché s'écrit : $M = M_{3R} \cup M_{4R}$. On a donc :

$$\mathrm{Card}\, M = \mathrm{Card}\, M_{3R} + \mathrm{Card}\, M_{4R}$$

□

(Card M_{3R} et Card M_{4R} sont à déterminer)

On peut généraliser cette proposition au cas de l'union d'un nombre quelconque d'ensembles disjoints deux à deux.

Théorème 2.

*Soient $A_1, \dots, A_n$ des ensembles **finis** et **deux à deux disjoints**.*
(i.e. $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour tout $i \neq j$)

1) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ *est fini.*

2) $\displaystyle\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{Card}\, A_i$

$$\left.\begin{array}{l} A_1, \dots, A_n \text{ finis} \\ A_1, \dots, A_n \text{ deux à deux disjoints} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \bullet \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ est fini} \\ \bullet \text{ Card}\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \text{Card}\, A_i \end{array}$$

Démonstration.
La démonstration consiste à démontrer, par récurrence, que : $\forall n \geqslant 2,\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: Toute famille $(A_1, \dots, A_n)$ d'ensembles finis et deux à deux disjoints vérifie ($\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est fini) et ($\displaystyle\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{Card}\, A_i$).
L'intialisation n'est autre que le résultat de la proposition 6.
L'étape d'hérédité est laissée en exercice. □

Exemple
On considère un jeu de 32 cartes.
Combien y a-t-il de mains (ensembles de 5 cartes) contenant au moins 2 rois ?

Démonstration.
Avec les notations précédentes, l'ensemble T dont on recherche le cardinal s'écrit : $T = M_{2R} \cup M_{3R} \cup M_{4R}$. Ces ensembles étant deux à deux disjoints, on a :

$$\text{Card}\, T = \text{Card}\, M_{2R} + \text{Card}\, M_{3R} + \text{Card}\, M_{4R}$$

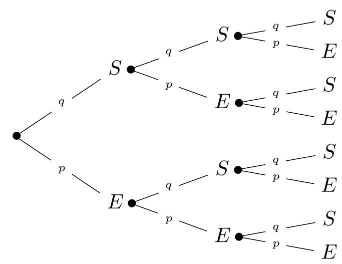
(Card M_{2R}, Card M_{3R} *et* Card M_{4R} *sont à déterminer)* □

Ainsi, une application strictement croissante $f : [\![1, p]\!] \to [\![1, n]\!]$ est entièrement déterminer par le choix des p valeurs différentes dans $[\![1, n]\!]$. Il y a donc $\dbinom{n}{p}$ telles applications. □

Remarque
Si E est un ensemble fini à n éléments, il est possible d'obtenir une p-combinaison d'éléments de E *i.e.* une parties à p éléments de E par le procédé aléatoire suivant.

- Pour chaque élément x_i de E, on effetue un tirage aléatoire (on peut penser à un lancer de pièce) :
  - × en cas de succès (le lancer donne pile), x_i est choisi dans la combinaison.
  - × en cas d'échec (le lancer donne face), x_i n'est pas choisi dans la combinaison.

  On effectue en tout n tirages successifs. Si l'on obtient p succès lors de cette expérience, c'est que l'on a sélectionné p éléments dans E. Autrement dit, obtenir exactement p succès c'est obtenir une p-combinaison.
- La répétition de ces expériences peut être représentée par un arbre. Le nombre de chemins de cet arbre réalisant p succès (pour n tirages) est le nombre de p-combinaisons.



II.7.b) Lien entre nombre de p-combinaisons et cardinal de l'ensemble des applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ [CULTURE]

Proposition 11.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) L'ensemble $\mathcal{C}([\![1,p]\!],[\![1,n]\!])$ des applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est fini.

2) Le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ $(= \mathrm{Card}(\mathcal{C}([\![1,p]\!],[\![1,n]\!])))$ est donné par :

- 0 *si* $p > n$
- $\boxed{\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-(p-1))}{p!}$ *sinon*

Démonstration.
Rappelons tout d'abord qu'une application strictement croissante d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ vers un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est injective. Or, si $p > n$ il n'existe pas d'injection de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. Ainsi, $\mathrm{Card}(\mathcal{C}([\![1,p]\!],[\![1,n]\!])) = 0$ si $p > n$.

Supposons alors $p \leqslant n$. Une application f de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est entièrement déterminée par la valeur de ses images $f(1),\dots,f(p)$.
Afin de se donner une application strictement croissante de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ on peut procéder comme suit.

- on choisit p valeurs différentes $y_1,\dots,y_p$ dans $[\![1,n]\!]$ afin de constituer l'ensemble $\mathrm{Im}\, f$
- on range ces valeurs dans l'ordre croissant et on prend pour $f(i)$ la $i^{\text{ème}}$ plus petite valeur de l'ensemble $\{y_1,\dots,y_p\}$

(par exemple, dans le cas où $p = 3$ et $n = 9$, si on a $y_1 = 3$, $y_2 = 9$ et $y_3 = 7$, on peut définir une seule application $f : [\![1,3]\!] \to [\![1,9]\!]$ strictement croissante. Elle est définie par $f(1) = 3$, $f(2) = 7$ et $f(3) = 9$)

Principe soustractif

Théorème 3.

Soit E un ensemble **fini**.

Soient A et B deux parties de E ($A \subset E$ et $B \subset E$).

1) $\boxed{\mathrm{Card}\ \overline{A} \ = \ \mathrm{Card}\, E - \mathrm{Card}\, A}$
(on rappelle que, pour toute partie A de E, on a : $\overline{A} = E \setminus A$)

2) $\boxed{\mathrm{Card}(A \setminus B) \ = \ \mathrm{Card}\, A - \mathrm{Card}(A \cap B)}$

Démonstration.

1) Pour tout $A \subset E$, on a : $E = \overline{A} \cup A$. Comme E est fini, il en est de même des deux parties A et $\overline{A}$. On a donc : $\mathrm{Card}\, E = \mathrm{Card}\, A + \mathrm{Card}\, \overline{A}$.

2) Il suffit de remarquer que $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ et d'appliquer le principe additif. □

Exemple
On considère un jeu de 32 cartes.
Combien y a-t-il de mains (ensembles de 5 cartes) contenant au moins 1 roi ?
Autrement dit, combien y a-t-il de mains contenant au moins un roi ?

Démonstration.
Avec les notations précédentes, l'ensemble S dont on recherche le cardinal s'écrit : $S = M_{1R} \cup M_{2R} \cup M_{3R} \cup M_{4R}$. Comme précédemment, ces ensembles étant deux à deux disjoints, on a :

$$\mathrm{Card}\, S = \mathrm{Card}\, M_{1R} + \mathrm{Card}\, M_{2R} + \mathrm{Card}\, M_{3R} + \mathrm{Card}\, M_{4R}$$

Cependant, ici, on peut raisonner plus simplement. Au lieu de déterminer le cardinal des mains contenant au moins un roi, on détermine le cardinal de son complémentaire, à savoir l'ensemble des mains ne contenant aucun roi. Si on note E l'ensemble contenant toutes les mains possibles, on a :

$$\text{Card}\, E = \binom{32}{5} = \frac{32\times 31\times \cancel{30}\times 29\times 28}{\cancel{5}\times 4\times \cancel{3}\times \cancel{2}} = 8\times 31\times 29\times 28.$$ Or :

$$\text{Card}\, \overline{S} = \binom{28}{5} = \frac{28\times 27\times 26\times 25\times \cancel{24}}{5\times \cancel{4}\times \cancel{3}\times \cancel{2}} = 5\times 28\times 27\times 26.$$ Au final :

$$\begin{aligned}\text{Card}\, S &= \text{Card}\, E - \text{Card}\, \overline{S} = 8\times 31\times 29\times 28 - 5\times 28\times 27\times 26\\ &= 28\times(8\times 31\times 29 - 5\times 27\times 26)\\ &= 28\times(7192-3510) = 28\times 3682 = 103096\end{aligned}$$ □

II.2. Cardinal d'une union quelconque d'ensembles finis : principe d'inclusion - exclusion

Proposition 7.

Soient A et B deux ensembles **finis**.

1) *$A\cap B$ est fini*

2) *$A\cup B$ est fini*

3) *Et* $\boxed{\text{Card}(A\cup B) = \text{Card}\, A + \text{Card}\, B - \text{Card}(A\cap B)}$

Démonstration.
On utilise le principe additif avec la partition : $A\cup B = (A\setminus B)\cup B$.
On a alors : $\text{Card}\, A\cup B = \text{Card}(A\setminus B) + \text{Card}\, B$.
On conclut à l'aide du Théorème 3. □

Exercice
Généraliser cette proposition à trois ensembles finis A, B et C.

$$\begin{aligned}&\text{Card}(A\cup B\cup C)\\ &= \text{Card}((A\cup B)\cup C)\\ &= \text{Card}(A\cup B) + \text{Card}\, C - \text{Card}((A\cup B)\cap C)\\ &= \text{Card}\, A + \text{Card}\, B - \text{Card}(A\cap B) + \text{Card}\, C - \text{Card}((A\cap C)\cup(B\cap C))\\ &= \text{Card}\, A + \text{Card}\, B + \text{Card}\, C\\ &\quad - \text{Card}(A\cap B) - \text{Card}(A\cap C) - \text{Card}(B\cap C)\\ &\quad + \text{Card}(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

Exemple
On considère l'urne à 9 boules précédente et on procède au tirage simultané de 3 boules de l'urne. Les éléments suivants sont des 3-combinaisons d'éléments de $[\![1,9]\!]$.

$$\{1,3,8\}\quad \{2,7,5\}\quad \{4,1,2\}\quad \{1,2,3\}\quad \{4,5,6\}\quad \{1,7,9\}\quad \{2,7,8\}\dots$$

Il n'y a pas d'ordre associé à ce tirage : les boules sont tirées en même temps. Notez que les ensembles $\{2,7,5\}$ et $\{2,5,7\}$ sont égaux.
(deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments)

Combien y a-t-il de tirages en tout ?
Une 3-combinaison peut-être vue comme un 3-arrangement dans lequel l'ordre ne serait pas pris en compte. Comparons le nombre de 3-arrangements au nombre de 3-combinaisons. Si l'on dispose d'une 3-combinaison $\{1,3,8\}$, on peut produire à l'aide de ses éléments, les 3-arrangements suivants :

$$(1,3,8)\quad (1,8,3)\quad (3,1,8)\quad (3,8,1)\quad (8,1,3)\quad (8,3,1)$$

On a ainsi produit six 3-arrangements différents. Chacun de ces 3-arrangements correspond à une manière d'ordonner les éléments 1, 3, 8. Autrement dit, on considère toutes les permutations de l'ensemble $\{1,3,8\}$. Il y en a $3! = 6$. Au final, à chaque 3-combinaison correspond $3!$ (*i.e.* six) 3-arrangements. Il y a donc $3!$ fois moins de 3-combinaisons que de 3-arrangements :

$$\binom{9}{3} = \frac{A_9^3}{3!} = \frac{9\times 8\times 7}{3\times 2} = 3\times 4\times 7 = 84$$

De manière générale, si l'urne contient n boules et qu'on effectue le tirage `SIMULTANÉ` de p boules, il y a $\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ tirages différents.

II.7. Notion de p-combinaison

II.7.a) Définition et nombre de p-combinaisons

Définition

Soit E un ensemble fini.

- On appelle **p-combinaison** d'élémts de E toute partie à p éléments de E.
- On note $\binom{n}{p}$ le nombre de p-combinaisons d'éléments d'un ensemble E possédant n éléments *i.e.* le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.
- $\boxed{\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-(p-1))}{p!} = \dfrac{A_n^p}{p!}$

(le symbole $\binom{n}{p}$ est lu « p parmi n »)

Démonstration.
Considérons une partie à p éléments de E.
Ordonner ces éléments correspond à se donner un p-arrangement de ceux-ci.
Or, il y a A_p^p p-arrangements d'un ensemble à p éléments.
Ainsi, chaque p-combinaison d'éléments de E donne lieu à $p!$ p-arrangements différents. Autrement dit, il y $p!$ fois plus de p-arrangements que de p-combinaisons. On en conclut que :

$$p! \times \binom{n}{p} \ = \ A_n^p$$

□

Exemple classique : tirage `SIMULTANÉ` (`SANS` remise) de p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
(sans ordre et sans répétition)

Exercice
On considère une classe de 36 élèves qui étudient tous au moins une langue parmi l'anglais, l'espagnol et l'allemand. On sait que :

- 22 élèves étudient l'anglais, 22 étudient l'allemand, 18 étudient l'espagnol
- 10 élèves étudient à la fois l'anglais et l'allemand, 9 étudient à la fois l'allemand et l'espagnol, 11 à la fois l'anglais et l'espagnol

Combien d'élèves étudient les trois langues ?

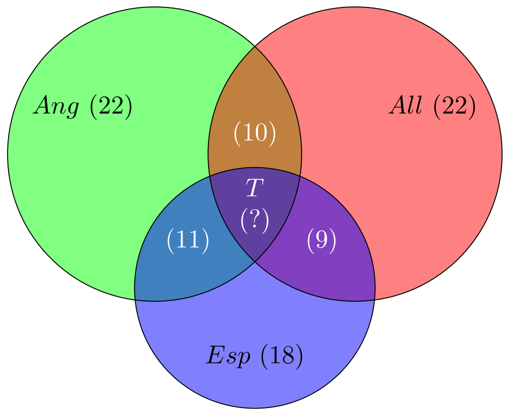
Démonstration.
Ce genre d'exercice classique se résout à l'aide d'un diagramme en patates (aussi appelé diagramme de Venn).
Notons :

- Ang l'ensemble des élèves qui étudient l'anglais,
- Esp l'ensemble des élèves qui étudient l'espagnol,
- All l'ensemble des élèves qui étudient l'allemand,
- C l'ensemble des élèves de la classe,
- et enfin T l'ensemble des élèves qui étudient les trois langues.

On a donc :

× $C = Ang \cup All \cup Esp$ donc $\text{Card}\, C = 36$
× $\text{Card}\, Ang = 22$
× $\text{Card}\, All = 22$
× $\text{Card}\, Esp = 18$
× $\text{Card}(Ang \cap All) = 10$
× $\text{Card}(All \cap Esp) = 9$
× $\text{Card}(Ang \cap Esp) = 11$

Ce que l'on peut résumer par le diagramme suivant.



Enfin, grâce à la formule du crible, on obtient :

$$\begin{aligned}&\text{Card}(Ang \cup All \cup Esp)\\ &\quad = \text{Card}\, Ang + \text{Card}\, All + \text{Card}\, Esp\\ &\qquad - \text{Card}(Ang \cap All) - \text{Card}(Ang \cap Esp) - \text{Card}(All \cap Esp)\\ &\qquad + \text{Card}(Ang \cap All \cap Esp)\end{aligned}$$

ainsi, on a :

$$36 = (22 + 22 + 18) - 10 - 11 - 9 + \text{Card}\, T$$

d'où :

$$36 = 12 + 11 + 9 + \text{Card}\, T \text{ et } \text{Card}\, T = 4$$

□

Exemple
On se propose de placer n personnes autour d'une table disposant de n chaises. À chaque personne est attribuée une seule chaise (et inversement chaque chaise reçoit une seule personne). Un placement de ces n personnes correspond donc à une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$. C'est une permutation de $[\![1, n]\!]$.

II.6.b) Lien entre nombre de permutations et cardinal de l'ensemble des applications bijectives de E (fini) dans F (fini) [CULTURE]

Proposition 10.

Soit E un ensemble fini de cardinal p.

Soit F un ensemble fini de cardinal n.

1) L'ensemble $\mathcal{B}(E, F)$ des bijections de E dans F est fini.

2) Le nombre de bijections de E dans F ($= \text{Card}(\mathcal{B}(E, F))$) est donné par :

- 0 *si* $p \neq n$
- $\boxed{A_n^n = n!}$ *sinon*

Démonstration.
Rappelons tout d'abord qu'il existe une bijection de E (fini) dans F (fini) si et seulement si $\text{Card}\, E = \text{Card}\, F$ (Proposition 5). Ainsi, $\text{Card}(\mathcal{B}(E, F)) = 0$ si $\text{Card}\, E \neq \text{Card}\, F$.

Si $\text{Card}\, E = \text{Card}\, F$, il suffit de reprendre la démonstration précédente. En effet, d'après la Proposition 4, lorsque E et F sont finis et de même cardinal, une application f est injective ssi elle est bijective. Ainsi, dans ce cas, $\mathcal{B}(E, F) = \mathcal{I}(E, F)$. On a alors :

$$\text{Card}(\mathcal{B}(E, F)) = \text{Card}(\mathcal{I}(E, F)) = A_n^n = n!$$

□

II.6. Notion de permutation

II.6.a) Définition et nombre de permutations

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

- Une **permutation** d'un ensemble E est une bijection de E sur lui-même.
- Si $\text{Card}\, E = n$, une permutation est un n-arrangement d'éléments de E.
- Si $\text{Card}\, E = n$, il y a exactement $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 1 (= A_n^n)$ permutations de E.

Démonstration.
Il y a A_n^n n-arrangements de E autrement dit A_n^n permutations de E.
Or : $A_n^n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = n!$ □

Exemple classique : tirages `SUCCESSIFS` et `SANS REMISE` de n boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
(avec ordre et sans répétition)

Exemple
On considère l'urne à 9 boules précédente et on procède au tirage successif des 9 boules de l'urne, sans remise. Les éléments suivants sont des permutations de l'ensemble $[\![1, 9]\!]$.

$$(2,5,4,3,9,7,8,1,6) \quad (1,5,2,4,3,9,8,7,6) \quad (4,6,7,9,1,3,5,2,8) \ldots$$

Combien y a-t-il de tirages en tout ?
Il y a 9 possibilités pour la première boule, 8 possibilités pour la deuxième (la première boule n'étant pas remise après tirage), 7 possibilités pour la troisième, ..., 2 possibilités pour la huitième et 1 possibilité pour la dernière. Il y a donc $9 \times 8 \times 7 \times \ldots \times 2 \times 1 = 9! (= 362880)$ tirages différents.

De manière générale, si l'urne contient n boules et qu'on effectue n tirages `SUCCESSIFS` et `SANS REMISE`, il y a $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$ tirages différents.

II.3. Cardinal d'un produit cartésien : principe multiplicatif

Théorème 4.

Soient A et B deux ensembles **finis**.

1) $A \times B$ *est fini*

2) $\boxed{\text{Card}(A \times B) = \text{Card}\, A \times \text{Card}\, B}$

Généralisation au cas $A_1, \ldots, A_r$ ensembles finis :

1) $A_1 \times \ldots \times A_r$ *est fini*

2) $\boxed{\text{Card}(A_1 \times \ldots \times A_r) = \text{Card}\, A_1 \times \ldots \times \text{Card}\, A_r}$

Et ainsi, si E est fini (de cardinal n) et si $p \geqslant 1$, on a :

1) E^p *est fini*

2) $\boxed{\text{Card}(E^p) = (\text{Card}\, E)^p} = n^p$

Démonstration.
$A = \{x_1, \ldots, x_p\}$ (en notant $\text{Card}\, A = p$), $B = \{y_1, \ldots, y_n\}$ (en notant $\text{Card}\, B = n$). On considère alors l'application f suivante :

$$f : \left| \begin{array}{ccccc} A & \times & B & \to & [\![1, p.n]\!] \\ (x_i & , & y_j) & \mapsto & n(i-1)+j \end{array} \right.$$

Cette application étant bijective (f n'est rien d'autre qu'une numérotation des éléments de $A \times B$), on a :
$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}([\![1, np]\!]) = pn = \text{Card}\, A \times \text{Card}\, B$.
La démonstration de la propriété générale se fait par récurrence. Plus précisément, on démontre que : $\forall r \geqslant 2,\ \mathcal{P}(r)$
où $\mathcal{P}(r)$: Toute famille $(A_1, \ldots, A_r)$ d'ensembles finis vérifie ($A_1 \times \ldots \times A_r$ est fini) et $\text{Card}(A_1 \times \ldots \times A_r) = \text{Card}\, A_1 \times \ldots \times \text{Card}\, A_r$.
Enfin, lorsque $r = p$ et $E = A_1 = \ldots = A_p$, on obtient la dernière égalité. □

Exercice
On considère un jeu de 32 cartes dans lequel on effectue un tirage de 5 cartes.

1) Combien y a-t-il de mains contenant un carré ?

Démonstration.
Un telle main est <u>entièrement déterminée</u> par :
- le choix de la hauteur du carré : 8 possibilités.
  (choix d'un élément dans l'ensemble à 8 élèments $H = \{7, 8, 9, 10, V, D, R, As\}$)
- le choix de la carte restante : 28 possibilités.
  (une carte choisie parmi les 28 cartes restantes)

Il y a donc 8×28 mains convenables. □

2) Combien y a-t-il de mains contenant exactement un pique ?

Démonstration.
Un telle main est entièrement déterminée par :
- le choix de la hauteur du pique : 8 possibilités.
  (choix d'un élément dans l'ensemble H à 8 élèments)
- le choix des 4 cartes restantes.
  (4 cartes choisies parmi les 24 cartes qui ne sont pas du pique)

L'expression <u>entièrement déterminée</u> sous-tend la présence d'une bijection. Mettons-la à jour en notant :
- $M_{1\text{-}p}$ l'ensemble des mains contenant exactement 1 pique,
- $M^4_{s\text{-}p}$ l'ensemble des ensembles de 4 cartes qui ne pas de pique.
- $H = \{7, 8, 9, 10, V, D, R, As\}$ l'ensemble des hauteurs.

On a alors la bijection suivante.

$$\begin{array}{ccccc} M_{1\text{-}p} & \to & H & \times & M^4_{s\text{-}p} \\ m & \mapsto & (h & , & \tilde{m}) \end{array}$$

où h est la hauteur du pique présent dans la main m et $\tilde{m}$ est l'ensemble des 4 autres cartes de la main m. Au final, on obtient :

$$\text{Card}\, M_{1\text{-}p} = \text{Card}(H \times M^4_{s\text{-}p}) = \text{Card}\, H \times \text{Card}(M^4_{s\text{-}p}) = 8 \times \binom{24}{4}.$$ □

II.5.b) Lien entre nombre de p-arrangements et cardinal de l'ensemble des injections de E (fini) dans F (fini) [CULTURE]

Proposition 9.
Soit E un ensemble fini de cardinal p.
Soit F un ensemble fini de cardinal n.

1) *L'ensemble $\mathcal{I}(E, F)$ des injections de E dans F est fini.*

2) *Le nombre d'injections de E dans F (= $\text{Card}(\mathcal{I}(E, F))$) est donné par :*
- 0 *si* $p > n$
- $\boxed{A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}} = n(n-1) \dots (n-(p-1))$ *sinon*

Démonstration.

1) *(Démonstration non formelle).*
Il existe une injection de E dans F seulement si $p \leqslant n$.
Ainsi : $A_n^p = 0$ si $p > n$.
Considérons maintenant $p \leqslant n$ et notons $E = \{x_1, \dots, x_p\}$.
Se donner une injection de E dans F c'est :
- se donner l'image de x_1 : $f(x_1) = y_1 \in F$
  (n choix possibles)
- se donner l'image de x_2 : $f(x_2) = y_2 \in F \setminus \{y_1\}$
  ((n-1) choix possibles)
- ...
- se donner l'image de x_p : $f(x_p) = y_p \in F \setminus \{y_1, \dots, y_{p-1}\}$
  ((n-(p-1)) choix possibles)

Ainsi, il y a : $n(n-1) \dots (n-(p-1))$ injections différentes de E dans F.

2) Il suffit de remarquer qu'un p-arrangement $(a_1, \dots, a_p)$ d'éléments de F deux à deux distincts n'est rien d'autre qu'une injection $f : [\![1, p]\!] \mapsto F$:

$$\begin{array}{cccc} f & : & [\![1, p]\!] & \to & F \\ & & i & \mapsto & a_i \end{array}$$

(le mot distinct doit faire penser à la définition d'injection) □

Combien y a-t-il de tirages en tout ?
Il y a 9 possibilités pour la première boule, 8 possibilités pour la deuxième (la première boule n'étant pas remise après tirage) et 7 possibilités pour la troisième. Il y a donc $9 \times 8 \times 7 (= 504)$ tirages différents.

De manière générale, si l'urne contient n boules et qu'on effectue p tirages `SUCCESSIFS` et `SANS REMISE`, il y a $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-(p-1))$ tirages différents.

Exercice
On considère une course de chevaux avec 15 partants. Le jeu du tiercé consiste à déterminer les 3 premiers chevaux de la course. Le quinté consiste à déterminer les 5 premiers chevaux de la course.

a. Combien y a-t-il de tiercés dans l'ordre ?

Démonstration.
Il y a $A_{15}^{3} = 15 \times 14 \times 13 = 2730$ tiercés différents dans l'ordre. □

b. Combien y a-t-il de quintés dans l'ordre ?

Démonstration.
Il y a $A_{15}^{3} = 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 = 360360$ quintés différents dans l'ordre. □

c. Combien y a-t-il de résultats possibles pour la course ?

Démonstration.
Par résultat de la course, on entend ordre d'arrivée de chaque cheval.
Il y a $A_{15}^{15} = 15 \times 14 \times \ldots \times 2 \times 1 = 15! = 1307674368000$ résultats possibles. □

II.4. Notion de p-liste

II.4.a) Définition et nombre de p-listes

Définition

Soit E un ensemble **fini**.

- Une p-liste d'éléments de E est une suite de p éléments de E.
  Autrement dit, une p-liste est un élément de E^p.
  (c'est une redéfinition du terme p-uplet)
- Si $\text{Card}\, E = n$, il y a exactement n^p p-listes d'éléments de E.
  (car $\text{Card}(E^p) = (\text{Card}\, E)^p$*)*

Exemple classique : tirages `SUCCESSIFS` et `AVEC REMISE` de p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
(avec ordre et avec répétition)

Exemple
On considère une urne contenant 9 boules numérotées de 1 à 9. On procède au tirage successif de 3 boules de l'urne, avec remise. Les éléments suivants sont des 3-listes d'éléments de $[\![1, 9]\!]$.

$$(1,1,1) \quad (3,1,8) \quad (8,1,3) \quad (2,1,2) \quad (9,2,6) \quad (3,2,2) \quad (2,2,3)\ldots$$

L'ordre dans lequel sont tirées les boules revêt ici une importance.
Autrement dit, le tirage $(3,2,2)$ est un tirage différent du tirage $(2,2,3)$.

Combien y a-t-il de tirages en tout ?
Il y a 9 possibilités pour la première boule, 9 possibilités pour la deuxième (la première boule a été remise après tirage) et 9 possibilités pour la troisième.
Il y a donc $9 \times 9 \times 9 = 9^3 (= 729)$ tirages différents.

De manière générale, si l'urne contient n boules et qu'on effectue p tirages `SUCCESSIFS` et `AVEC REMISE`, il y a $n \times \ldots \times n = n^p$ tirages différents.

II.4.b) Lien entre nombre de p-listes et cardinal de l'ensemble des applications de E (fini) dans F (fini) [CULTURE]

Proposition 8.

Soit E un ensemble fini de cardinal p.

Soit F un ensemble fini de cardinal n.

1) *L'ensemble $\mathcal{A}(E,F)$ des applications de E dans F est fini.*

2) $\boxed{\mathrm{Card}(\mathcal{A}(E,F)) = (\mathrm{Card}\, F)^{\mathrm{Card}\, E}} = n^p$

Démonstration.
On a $E = \{x_1, \dots, x_p\}$. Toute application $f : E \to F$ est complètement déterminée par le p-uplet $(f(x_1), \dots, f(x_p))$ d'éléments de F. En d'autres termes, l'application :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \mathcal{A}(E,F) & \to & F & \times & \dots & \times & F \\ f & \mapsto & (f(x_1) & , & \dots & , & f(x_p)) \end{array} \right.$$

est bijective. □

Remarque
Cette démonstration permet de comprendre pourquoi on utilise parfois la notation : $\mathcal{A}(E,F) = F^E$. Le théorème s'écrit alors :

$$\boxed{\mathrm{Card}(F^E) = (\mathrm{Card}\, F)^{(\mathrm{Card}\, E)}}$$

Théorème 5.

Soit E fini de cardinal n.

1) *$\mathcal{P}(E)$ est fini*

2) $\boxed{\mathrm{Card}\, \mathcal{P}(E) = 2^n}$

Démonstration.
Considérer l'application : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{A}(E, \{0,1\}) \\ A & \mapsto & \chi_A \end{array} \right.$

où χ_A est l'application caractéristique de A. Par définition, c'est :

$$\begin{array}{cccl} \chi_A & : & E & \to \{0,1\} \\ & & x & \mapsto \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{array} \right. \end{array}$$

□

II.5. Notion de p-arrangement

II.5.a) Définition et nombre de p-arrangement

Définition

Soit E un ensemble **fini**.

- Une p-arrangement d'éléments de E est p-liste d'éléments distincts de E.
- Si $\mathrm{Card}\, E = n$, il y a $n \times (n-1) \times \dots \times (n-(p-1))$ p-arrangements d'éléments de E.
- Par la suite, on notera A_n^p le nombre de p-arrangements d'éléments de E (où E est un ensemble à n éléments).

Exemple classique : tirages SUCCESSIFS et SANS REMISE de p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
(avec ordre et sans répétition)

Exemple
On considère l'urne à 9 boules précédente et on procède au tirage successif des 3 boules de l'urne, sans remise. Les éléments suivants sont des 3-arrangements d'éléments de $[\![1,9]\!]$.

$\cancel{(1,1,1)}$ $(3,1,8)$ $(8,1,3)$ $\cancel{(2,1,2)}$ $(9,2,6)$ $\cancel{(3,2,2)}$ $\cancel{(2,2,3)}\dots$

L'ordre dans lequel sont tirées les boules revêt encore une importance. Autrement dit, le tirage $(3,1,8)$ est un tirage différent du tirage $(8,1,3)$.