Concours Blanc n$^{\text{o}}$ 1

—

Mathématiques

Mercredi 6 janvier

Durée : 4 heures
La calculatrice est interdite.
On attachera une grande importance à la qualité de la rédaction.

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Résoudre l'équation $|x-4|+|x-3|=1$.

2. On se donne la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3, \\ u_1 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -2u_{n+1} + 8u_n \end{cases}$$

Donner une expression explicite de u_n.

3. Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\sqrt{20+\ln n} - \sqrt{16+\ln n}$.

4. Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\dfrac{n^{20}-16^n}{20^n+n^{16}}$.

5. Factoriser le polynôme $P(x) = 2016x^3 + x^2 - 2016x - 1$.

6. On note $E = \{0,1,2,3,4,5\}$.

a. Combien y a-t-il de parties de E ? On donnera le résultat sous forme numérique.

b. On tire simultanément et sans remise deux éléments de $\mathcal{P}(E)$. Combien y a-t-il de tirages possibles ? On donnera le résultat sous forme numérique.

Exercice 2

Soit $n \geqslant 3$.

On définit la suite de terme général $u_n = \sum_{i=1}^{n-2} (i+1)e^i$.

On définit la fonction $f_n : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sum_{i=1}^{n-2} x^{i+1}$.

1. Écrire une fonction Scilab `f` qui prend un entier n et un réel x et qui renvoie $f_n(x)$.

2. Calculer f_n', la dérivée de la fonction f_n par rapport à la variable x.
En déduire une relation entre u_n et f_n'.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. En reconnaissant une somme classique, simplifier l'expression de $f_n(x)$.

4. Calculer f_n' à l'aide du résultat de la question précédente.

5. En déduire la valeur de u_n.

6. **Application :** On note S la somme $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} e^i$ pour $n \geqslant 3$.

- ***a.*** Écrire une fonction Scilab `S` qui prend un entier n et renvoie la valeur de S.
- ***b.*** À l'aide de la question ***5***, calculer S.

Exercice 3

On étudie dans cet exercice la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Quelle est la monotonie de $(u_n)_{n\geqslant 1}$?

2. En étudiant les variations de la fonction $f(x) = \ln(1+x) - x$ sur $]-1, +\infty[$, montrer que $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

3. En déduire $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\ln(1+k) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$.

4. À l'aide de l'inégalité précédente et en utilisant une sommation, montrer que $\ln(n+1) \leqslant u_n$ pour tout entier n strictement positif.

5. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$?

6. Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(1+k) - \ln(k)$.
On pourra utiliser l'inégalité de la question ***2*** avec $x = \frac{-1}{k+1}$.

7. En déduire qu'on a en fait l'encadrement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leqslant u_n \leqslant 1 + \ln(n)$$

8. À l'aide de l'inégalité précédente, démontrer que $\frac{u_n}{\ln(n)}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ et en déduire un équivalent simple de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 4

On considère dans tout cet exercice un ensemble fini E de cardinal n, et on va chercher à dénombrer ses partitions vérifiant certaines propriétés.

Rappelons qu'une partition de E est un ensemble de parties de E :

— non vides,

— disjointes,

— dont la réunion est égale à E.

Par exemple, $\{\{1\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\}$ est une partition de $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Par contre, $\{\varnothing, \{1\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\}$ n'en est pas une (à cause de l'ensemble vide), $\{\{1\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4\}\}$ non plus (les parties ne sont pas disjointes), et $\{\{2, 5\}, \{3, 4\}\}$ non plus (leur réunion n'est pas E tout entier).

On rappelle que dans un ensemble, l'ordre des éléments n'a pas d'importance.

Les questions de l'exercice sont largement indépendantes.

1. Énumérer toutes les partitions de l'ensemble à un élément $E_1 = \{1\}$, puis de l'ensemble à deux éléments $E_2 = \{1, 2\}$, et enfin de l'ensemble à trois éléments $E_3 = \{1, 2, 3\}$. Quel est le nombre de partitions d'un ensemble à trois éléments ?

2. Dans le cas général (où le cardinal de E vaut n), déterminer le nombre de partitions de E constituées de n parties, puis celles constituées de $n-1$ parties.

3. Dans le cas où $\text{Card}(E) = 10$ (on prendra $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$), déterminer le nombre de partitions de E en 8 parties (on pourra considérer deux types de partitions).

4. Généraliser le résultat précédent en déterminant le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en $n-2$ parties (pour $n \geqslant 3$).

5. On cherche dans cette question à déterminer le nombre de partitions de E en deux parties.

   a. On suppose dans cette question que l'une des parties contient un seul élément (donc l'autre en contient $n-1$). Compter le nombre de telles partitions.

   b. Déterminer le nombre de partitions pour lesquelles l'un des deux ensembles contient 2 éléments, et l'autre $n-2$.

   c. En déduire une formule générale pour le nombre de partitions de E en deux parties dont l'une contient k éléments, puis pour le nombre total de partitions de E en deux sous-ensembles. Calculer ce nombre.

6. On considère désormais des partitions constituées d'ensembles de cardinal 2 (partitions en paires). On note a_p le nombre de telles partitions de l'ensemble $\{1, 2, ..., 2p\}$ (pour qu'une telle partition existe, l'ensemble doit nécessairement contenir un nombre pair d'éléments).

   a. Déterminer « à la main » a_1, a_2 et a_3 (pour a_3, on pourra se contenter d'une bonne justification plutôt que d'énumérer toutes les partitions).

   b. Démontrer que, pour $p \geqslant 2$, $a_p = (2p-1)a_{p-1}$.

   c. Déterminer une formule explicite pour a_p faisant intervenir un quotient de factorielles.

   d. En déduire de combien de façons on peut former 10 binômes à partir d'un groupe de 20 personnes.

Exercice 5

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Le but de cet exercice est de calculer la somme :

$$S = \sum_{p=0}^{n} p^2 \binom{2n}{2p}$$

Pour cela on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}$$

1. ***a)*** Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
(f'' est la dérivée seconde de f, c'est à dire la dérivée de f')

b) En déduire $f'(1)$ et $f''(1)$.

2. ***a)*** Rappeler la formule du binôme de Newton pour $(1+x)^{2n}$ et $(1-x)^{2n}$.
En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2\sum_{p=0}^{n} \binom{2n}{2p} x^{2p}$$

b) En déduire des expressions sous forme de sommes de $f'(1)$ et $f''(1)$.

3. En remarquant que $p^2 = \frac{1}{4}2p(2p-1) + \frac{1}{4}2p$, déduire une expression de S en fonction de n.