DS Vocabulaire n° 4

Vendredi 22 janvier

Nom : **Prénom :**

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \overline{I}$.

a) Écrire la propriété (avec les quantificateurs) énonçant que f admet $+\infty$ comme limite en x_0.

$$\forall B > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant B)$$

ou encore : $\forall B > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha],\ f(x) \geqslant B$

b) Écrire la propriété (avec les quantificateurs) énonçant que f admet une limite finie ℓ en $-\infty$.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \leqslant -A \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$$

ou encore : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I \cap\,]-\infty, -A],\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$

2. Un laboratoire a mis au point un alcootest. Les essais effectués sur des conducteurs ont donné les résultats suivants : quand une personne est en état d'ébriété, 88 fois sur 100 l'alcootest se révèle positif, quand une personne n'est pas en état d'ébriété, 97 fois sur 100 l'alcootest se révèle négatif. On suppose que, dans une région donnée, 5% des conducteurs conduisent en état d'ébriété.

a) Quel est le taux global d'alcootests se révélant positifs ?

b) Y a-t-il indépendance des événements « l'acootest est positif » et « la personne est en état d'ébriété » ?

c) Calculer la probabilité pour qu'un conducteur de cette région dont l'alcootest est positif ne soit pas en état d'ébriété.
(on donnera une approximation du résultat)

d) Que peut-on penser du résultat obtenu ?

1) Nommage des événements

Notons E : « le conducteur est en état d'ébriété ».
Notons P : « l'alcootest est positif ».

2) Récupération des données de l'énoncé

- $\mathbb{P}(E) = \dfrac{5}{100}$ et donc $\mathbb{P}(\overline{E}) = \dfrac{95}{100}$
- $\mathbb{P}_E(P) = \dfrac{88}{100}$ et donc $\mathbb{P}_E(\overline{P}) = \dfrac{12}{100}$
- $\mathbb{P}_{\overline{E}}(\overline{P}) = \dfrac{97}{100}$ et donc $\mathbb{P}_{\overline{E}}(P) = \dfrac{3}{100}$

a) La famille $(E, \overline{E})$ est un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P) &= \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}_E(P) + \mathbb{P}(\overline{E}) \times \mathbb{P}_{\overline{E}}(P)\\ &= \frac{5}{100} \times \frac{88}{100} + \frac{95}{100} \times \frac{3}{100} = \frac{1}{10000}(5 \times 88 + 95 \times 3)\\ &= \frac{1}{10000}(440 + 285) = \frac{725}{10000} = \frac{7,25}{100}\end{aligned}$$

b) On a : $\mathbb{P}_E(P) = \dfrac{88}{100} \neq \dfrac{7,25}{100} = \mathbb{P}(P)$.
Ainsi, les événements E et P ne sont pas indépendants.

$$\left(\begin{array}{l}\text{D'après la formule des probabilités composées, on a :}\\ \mathbb{P}(E \cap P) = \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}_E(P) \neq \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(P)\end{array}\right)$$

c) D'après la formule de Bayes, on a :

$$\mathbb{P}_P(\overline{E}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{E}) \times \mathbb{P}_{\overline{E}}(P)}{\mathbb{P}(P)} = \frac{\frac{95}{100} \times \frac{3}{100}}{\frac{725}{10000}} = \frac{95}{\cancel{100}} \times \frac{3}{\cancel{100}} \times \frac{\cancel{10000}}{725} = \frac{19 \times 3}{145} = \frac{57}{145}$$

Enfin : $\dfrac{57}{145} \geqslant \dfrac{57}{150} \geqslant \dfrac{50}{150} = \dfrac{1}{3}$

d) Pour être considéré comme fiable, la probabilité qu'un conducteur non alcoolisé ait un test positif doit être proche de 0. Cette probabilité est ici de plus de 33%.
Ce test n'est donc pas fiable.