DS Vocabulaire n° 4

Vendredi 22 janvier

Nom : **Prénom :**

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \overline{I}$.

a) Écrire la propriété (avec les quantificateurs) énonçant que f admet $+\infty$ comme limite en $-\infty$.

$$\forall B > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \leqslant -A \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant B)$$

ou encore : $\forall B > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I \cap\,]-\infty, -A],\ f(x) \geqslant B$

b) Écrire la propriété (avec les quantificateurs) énonçant que f admet une limite finie ℓ en x_0.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$$

ou encore : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha],\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$

2. Une grave maladie affecte le cheptel bovin d'un pays. On estime que 7% des bovins sont atteints. On vient de mettre au point un test pour diagnostiquer cette maladie. Quand un animal est malade, le test est positif dans 87% des cas. Quand un animal n'est pas malade, le test est négatif dans 98% des cas.

a) Quel est le taux global de tests se révélant positifs ?

b) Y a-t-il indépendance des événements « le test est positif » et « l'animal est atteint par la maladie » ?

c) Calculer la probabilité pour qu'un bovin dont le test est positif ne soit pas atteint par la maladie. *(on donnera une approximation du résultat)*

d) Que peut-on penser du résultat obtenu ?

1) Nommage des événements

Notons M : « l'animal est malade ».

Notons P : « le test est positif ».

2) Récupération des données de l'énoncé

- $\mathbb{P}(M) = \dfrac{7}{100}$ et donc $\mathbb{P}(\overline{M}) = \dfrac{93}{100}$
- $\mathbb{P}_M(P) = \dfrac{87}{100}$ et donc $\mathbb{P}_M(\overline{P}) = \dfrac{13}{100}$
- $\mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{P}) = \dfrac{98}{100}$ et donc $\mathbb{P}_{\overline{M}}(P) = \dfrac{2}{100}$

a) La famille $(M, \overline{M})$ est un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(P) &= \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(P) + \mathbb{P}(\overline{M}) \times \mathbb{P}_{\overline{M}}(P) \\
&= \frac{7}{100} \times \frac{87}{100} + \frac{93}{100} \times \frac{2}{100} = \frac{1}{10000}(7 \times 87 + 93 \times 2) \\
&= \frac{1}{10000}(609 + 186) = \frac{795}{10000} = \frac{7,95}{100}
\end{aligned}$$

b) On a : $\mathbb{P}_M(P) = \dfrac{87}{100} \neq \dfrac{7,95}{100} = \mathbb{P}(P)$.
Ainsi, les événements M et P ne sont pas indépendants.

$$\left(\begin{array}{l} \text{D'après la formule des probabilités composées, on a :} \\ \mathbb{P}(M \cap P) = \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(P) \neq \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}(P) \end{array} \right)$$

c) D'après la formule de Bayes, on a :

$$\mathbb{P}_P(\overline{M}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{M}) \times \mathbb{P}_{\overline{M}}(P)}{\mathbb{P}(P)} = \frac{\frac{93}{100} \times \frac{2}{100}}{\frac{795}{10000}} = \frac{93}{\cancel{100}} \times \frac{2}{\cancel{100}} \times \frac{\cancel{10000}}{795} = \frac{186}{795}$$

Enfin : $\dfrac{186}{795} \geqslant \dfrac{186}{1000} = \dfrac{18,6}{100}$

d) Pour être considéré comme fiable, la probabilité qu'un bovin sain ait un test positif doit être proche de 0. Cette probabilité est ici de plus de 18%.
Ce test n'est donc pas fiable.