# DS Vocabulaire n$^{\text{o}}$ 6

Lundi 13 juin

**Nom :** **Prénom :**

On considère la fonction $f : x \mapsto 4 - \dfrac{1}{4}\ln(x)$. On définit alors la suite $(u_n)$ par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

On rappelle les valeurs approchées suivantes : $\ln(2) \simeq 0.69$ et $\ln(3) \simeq 1.1$.

*1.* Démontrer que l'intervalle $I = [3, 4]$ est stable par $f$.

Soit $x \in [3, 4]$.

$$\begin{array}{lccccccc} \text{On a alors} & 3 & \leqslant & x & \leqslant & 4 & & \\ \text{donc} & \ln(3) & \leqslant & \ln(x) & \leqslant & \ln(4) & & \textit{(par croissance de la fonction } \ln\textit{)} \\ \text{et} & \dfrac{-1}{4}\ln(3) & \geqslant & \dfrac{-1}{4}\ln(x) & \geqslant & \dfrac{-1}{4}\ln(4) & & \\ \text{ainsi} & 4 - \dfrac{1}{4}\ln(3) & \geqslant & f(x) & \geqslant & 4 - \dfrac{1}{4}\ln(4) & = & 4 - \dfrac{\ln(2)}{2} \end{array}$$

- Comme $\ln(2) \leqslant 1$, $-\dfrac{\ln(2)}{2} \geqslant -\dfrac{1}{2}$ et donc $4 - \dfrac{\ln(2)}{2} \geqslant \dfrac{7}{2} \geqslant 3$.
- Comme $\ln(3) \geqslant 1$, $-\dfrac{\ln(3)}{4} \leqslant -\dfrac{1}{4}$ et donc $4 - \dfrac{\ln(3)}{4} \leqslant \dfrac{15}{4} \leqslant 4$.

$\boxed{\text{On en déduit que } f(x) \in [3, 4].}$

*2.* En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$.

Démontrons maintenant par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_n \in [3, 4]$.

*1)* **Initialisation** :
$u_0 = 3 \in [3, 4]$.
Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

*2)* **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.
Par définition, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \in [3, 4]$.
On en déduit donc, par la propriété que l'on vient de montrer, que $f(u_n) \in [3, 4]$.
D'où $u_{n+1} \in [3, 4]$ et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [3, 4].}$

*3.* Calculer la dérivée $f'$ de $f$ et prouver l'inégalité suivante pour $x \in I$ : $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{12}$.

- La fonction $f$ est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ car ln l'est.
- Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$.
$$f'(x) = -\frac{1}{4x}$$
Ainsi, $|f'(x)| = \left|\dfrac{-1}{4x}\right| = \dfrac{|-1|}{|4x|} = \dfrac{1}{4x}$.
- Soit $x \in [3, 4]$.

$$\begin{array}{lccccc} \text{On a alors} & 3 & \leqslant & x & \leqslant & 4 \\ \text{donc} & 12 & \leqslant & 4x & \leqslant & 16 \\ \text{et} & \dfrac{1}{12} & \geqslant & \dfrac{1}{4x} & \geqslant & \dfrac{1}{16} \end{array}$$
*(par croissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$)*

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [3,4], \text{ on a : } |f'(x)| = \frac{1}{4x} \leqslant \frac{1}{12}.}$$

*4.* On admet qu'il existe un unique $r \in I$ tel que $f(r) = r$.
Prouver l'inégalité suivante, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ : $|u_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{1}{12} |u_n - r|$.

D'après les questions précédentes :
× $f$ est dérivable sur $[3, 4]$,
× $\forall x \in [3, 4]\,,\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{12}$.

On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis que :
$$\forall (x, y) \in [3, 4]^2\,,\ |f(y) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\, |y - x|$$
Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in [3, 4]$ et $x = r \in [3, 4]$, on obtient :
$$|f(u_n) - f(r)| \leqslant \frac{4}{9}\, |u_n - r|$$
Or $r$ est tel que : $f(r) = r$ ($r$ est un point fixe de $f$) et $f(u_n) = u_{n+1}$.
$$\boxed{\text{On en conclut : } |u_{n+1} - r| \leqslant \frac{1}{12}\, |u_n - r|.}$$

***5.*** Déduire de ce qui précède qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $|u_n - r| \leqslant \left(\dfrac{1}{12}\right)^n$.

- Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : |u_n - r| \leqslant \left(\dfrac{1}{12}\right)^n$.

  ***1)*** **Initialisation** :
  $|u_0 - r| \leqslant 1$ car $u_0$ et $r$ sont des éléments de $[3, 4]$.
  Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

  ***2)*** **Hérédité** :
  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $|u_{n+1} - r| \leqslant \left(\dfrac{1}{12}\right)^{n+1}$).
  D'après le résultat précédent : $|u_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{1}{12}\,|u_n - r|$.
  Or, par hypothèse de récurrence : $|u_n - r| \leqslant \left(\dfrac{1}{12}\right)^n$.
  En combinant ces deux résultats, on obtient :

$$|u_{n+1} - r| \leqslant \frac{1}{12}\,|u_n - r| \leqslant \frac{1}{12}\left(\frac{1}{12}\right)^n = \left(\frac{1}{12}\right)^{n+1}$$

  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - r| \leqslant \left(\frac{1}{12}\right)^n.}$$