TP Informatique n° 12
Simulation de variables aléatoires à densité

I. Méthode d'inversion : cas d'une fonction de répartition bijective

I.1. Avant-propos

Dans ce TP, on s'intéresse au problème suivant.

Données :
- × une v.a.r. X a priori difficile à simuler informatiquement,
- × la fonction de répartition F de la v.a.r. X.

But : obtenir une v.a.r. V de même fonction de répartition F (*i.e.* de même loi que X) plus simple à simuler informatiquement.

► Rappeler les propriétés qui caractérisent une fonction de répartition.

Une fonction $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ est la fonction de répartition d'une v.a.r. X si :

On peut montrer de plus que F admet une limite finie à gauche en tout point $x \in \mathbb{R}$.
Plus précisément : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{t \to x^-} F(t) \ = \ F(x) - \mathbb{P}([X = x]) \ = \ \mathbb{P}([X < x])$

► Que doit-on ajouter pour que F soit la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité ?

Dans ce cas, il faut rajouter :

I.2. Énoncé du théorème d'inversion dans le cas où F est bijective

Théorème 1.
Soit X une v.a.r. dont la loi est donnée par sa fonction de répartition $F : \mathbb{R} \to]0,1[$.
Soit U une v.a.r. telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.
On suppose de plus que :
- × *F est continue sur $\mathbb{R}$,*
- × *F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

On a alors :
- *F est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.*
- *La v.a.r. $V = F^{-1}(U)$ a pour fonction de répartition F.*

► Rappeler la fonction de répartition d'une v.a.r. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

► Démontrer le théorème d'inversion.

- La fonction F est bijective
- Notons G la fonction de répartition de la v.a.r. $F^{-1}(U)$.
  Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $G(x) \ =$
  Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \Omega$, remarquons tout d'abord que :

$$\begin{aligned} & \omega \in \left[F^{-1}(U) \ \leqslant \ x\right] \\ \Leftrightarrow & \\ \Leftrightarrow & \\ \Leftrightarrow & \end{aligned}$$

I.3. Simulation d'une v.a.r. suivant la loi standard de Gumbel

I.3.a) Aspect théorique

Soit $\lambda > 0$ et soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) \ = \ \exp(-\mathrm{e}^{-\lambda x})$.

► Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

- En déduire que F est la fonction de répartition d'une v.a.r. T admettant une densité f_T continue sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera. *(on dit que T suit la loi de Gumbel de paramètre λ)*

On suppose maintenant que $\lambda = 1$. *(on parle alors de loi standard de Gumbel de paramètre)*

- Expliciter la bijection réciproque G de la fonction F.

- Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$.
  Quelle est la loi de la variable aléatoire $G(U)$?

- Écrire en **Python** une fonction `Gumbel` simulant une v.a.r. suivant la loi standard de Gumbel.

I.3.b) Représentation graphique

Densité de probabilité

Dans cette section, on compare la densité de probabilité théorique avec la densité de probabilité obtenue par simulation. Pour ce faire, on procède comme suit :

× on produit `N` observations de la simulation de la loi standard de Gumbel,

× on découpe ces données en `n` classes,

× on trace l'histogramme des effectifs associé.

▶ Tracer sur un même graphique la densité théorique et la densité simulée.

```
import numpy as np
import random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

# Valeur des paramètres
n = 100
N = 10000

# Densité théorique
x = np.linspace(-4, 10, n)
y =

# Simulation de N observations
Obs =

plt.subplot(1,2,1)
# Tracé de la densité théorique
plt.plot
# Tracé de la densité observée
plt.hist

```

Fonction de répartition

On se propose maintenant de comparer la fonction de répartition théorique avec sa version obtenue par simulation. Pour ce faire, on procède comme suit :

× on récupère le tableau des effectifs des `N` observations précédentes,

× on récupère la liste définissant les classes des `N` observations précédentes,

× on trace le diagramme en bâtons des effectifs **cumulés** associé.

▶ Tracer sur un même graphique la fonction de répartition théorique et celle simulée.

```
# Fonction de répartition théorique
z =
# Tableau des effectifs
nbCl =
(effectif, cl) =
# Effectifs cumulés
effCum =
```

```
plt.subplot(1,2,2)
# Tracé de la fonction de répartition théorique
plt.plot
# Tracé de la répartition simulée
plt.bar
```

I.4. Simulation d'une v.a.r. suivant la loi de Cauchy

I.4.a) Aspect théorique

Soient $a > 0$ et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \dfrac{1}{\pi}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right) + \dfrac{1}{2}$.

- ▶ Justifier que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

- ▶ En déduire que F est la fonction de répartition d'une v.a.r. X admettant une densité f_X continue sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

- Expliciter la bijection réciproque G de la fonction F.

- Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0,1[$.
  Quelle est la loi de la variable aléatoire $G(U)$?

- Écrire en **Python** une fonction `Cauchy(a)` simulant une v.a.r. suivant la loi de Cauchy.

I.4.b) Représentation graphique

Densité de probabilité

- Tracer sur un même graphique la densité théorique et la densité simulée.

```
# Valeur des paramètres
a = 1
n = 100
N = 10000
# Densité théorique
x = np.linspace(-4, 10, n)
y =

# Simulation de N observations
Obs =

plt.subplot(1,2,1)
# Tracé de la densité théorique
plt.plot
# Tracé de la densité observée
plt.hist

```

Fonction de répartition

► Tracer sur un même graphique la fonction de répartition théorique et celle simulée.

```
# Fonction de répartition théorique
z =
# Tableau des effectifs
nbCl =
(effectif, cl) =
# Effectifs cumulés
effCum =

plt.subplot(1,2,2)
# Tracé de la fonction de répartition théorique
plt.plot
# Tracé de la répartition simulée
plt.bar
```

II. Méthode d'inversion : cas pratique

II.1. Énoncé du théorème d'inversion, cas pratique

Théorème 2.
Soit X une v.a.r. à densité dont la loi est donnée par sa fonction de répartition F.
Soit U une v.a.r. telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.
On suppose de plus qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
× *F est strictement croissante sur $]a,b[$,*
× *F est nulle sur $]-\infty, a[$,*
× *F est égale à 1 sur $]b,+\infty[$.*
On a alors :
- *F est bijective de $]a,b[$ sur $]0,1[$.*
- *La v.a.r. $V = F^{-1}(U)$ a pour fonction de répartition F.*

II.2. Simulation d'une v.a.r. suivant la moi uniforme sur un intervalle réel

On considère une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$ (où a et b deux réels tels que $a < b$).

► Que signifie que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$?

► Déterminer la fonction de répartition F de X.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On étudie la valeur de $F(x)$ en fonction de x.

- Si $x < a$:

- Si $x \in [a, b]$:

- Si $x > b$:

► Démontrer que F réalise une bijection de $]a, b[$ sur $]0, 1[$.
Déterminer sa bijection réciproque $G :]0, 1[\to]a, b[$.

► On prolonge G en posant $G(x) = a$ si $x \leqslant 0$ et $G(x) = b$ si $x \geqslant 1$.
Déterminer la loi de la v.a.r. $V = G(U)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \leqslant a$:

- Si $x \in]a, b[$:

- Si $x \geqslant b$:

Ainsi, on a : $V \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.

► Écrire en **Python** une fonction `unfiCont(a,b)` simulant un v.a.r. suivant la loi $\mathcal{U}([a,b])$.

II.3. Simulation d'une v.a.r. suivant une loi exponentielle

II.3.a) Aspect théorique

Soit $\lambda > 0$ et soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

► Que signifie $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$?

► Déterminer la fonction de répartition F de X.

► Démontrer que F réalise une bijection de $]0,+\infty[$ dans $]0,1[$.
Déterminer sa bijection réciproque $G :]0,+\infty[\to]0,1[$.

► On prolonge G en posant $G(x) = 0$ si $x \leqslant 0$. Déterminer la loi de la v.a.r. $V = G(U)$.

- Si $x \leqslant 0$:

- Si $x \geqslant 0$:

Ainsi, on a : $V \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

- Écrire une fonction `expo(lambda)` qui simule une v.a.r. suivant la loi exponentielle de paramètre `lambda`.

II.3.b) Représentation graphique

Densité de probabilité

- Tracer sur un même graphique la densité théorique et la densité simulée.

```
# Valeur des paramètres
a = 2
b = 7
n = 100
N = 10000
# Densité théorique
x = np.linspace(a, b, n)
y =

# Simulation de N observations
Obs =

plt.subplot(1,2,1)
# Tracé de la densité théorique
plt.plot
# Tracé de la densité observée
plt.hist

```

Fonction de répartition

- Tracer sur un même graphique la fonction de répartition théorique et celle simulée.

```
# Fonction de répartition théorique
z =
# Tableau des effectifs
nbCl =
(effectif, cl) =
# Effectifs cumulés
effCum =

plt.subplot(1,2,2)
# Tracé de la fonction de répartition théorique
plt.plot
# Tracé de la répartition simulée
plt.bar
```