TP Informatique n° 12/13
Simulation de variables aléatoires à densité

I. Méthode d'inversion : cas d'une fonction de répartition bijective

I.1. Avant-propos

Dans ce TP, on s'intéresse au problème suivant.

Données :

× une v.a.r. X a priori difficile à simuler informatiquement,

× la fonction de répartition F de la v.a.r. X.

But : obtenir une v.a.r. V de même fonction de répartition F
(*i.e.* de même loi que X) plus simple à simuler informatiquement.

► Rappeler les propriétés qui caractérisent une fonction de répartition.

Une fonction $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ est la fonction de répartition d'une v.a.r. X si :

1) F est croissante,

2) F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$,

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$,

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

On peut montrer de plus que F admet une limite finie à gauche en tout point $x \in \mathbb{R}$.
Plus précisément : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{t\to x^-} F(t) \ = \ F(x) - \mathbb{P}([X = x]) \ = \ \mathbb{P}([X < x])$

► Que doit-on ajouter pour que F soit la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité ?

Dans ce cas, il faut rajouter :

2) F est coninue en tout point de $\mathbb{R}$ (remplace le *2)* précédent),

5) F est C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf, éventuellement, en un nombre fini de points.

I.2. Énoncé du théorème d'inversion dans le cas où F est bijective

Théorème 1.

Soit X une v.a.r. dont la loi est donnée par sa fonction de répartition $F : \mathbb{R} \to]0,1[$.

Soit U une v.a.r. telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

On suppose de plus que :

× *F est continue sur $\mathbb{R}$,*

× *F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

On a alors :

- *F est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.*
- *La v.a.r. $V = F^{-1}(U)$ a pour fonction de répartition F.*

► Rappeler la fonction de répartition d'une v.a.r. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

$$\begin{array}{rccl} F_U & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{array}$$

► Démontrer le théorème d'inversion.

- La fonction F est bijective par application du théorème de la bijection.
- Notons G la fonction de répartition de la v.a.r. $F^{-1}(U)$.
  Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $G(x) = \mathbb{P}(\left[F^{-1}(U) \leqslant x\right])$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \Omega$, remarquons tout d'abord que :

$$\begin{array}{rl} & \omega \in \left[F^{-1}(U) \leqslant x\right] \\ \Leftrightarrow & F^{-1}(U(\omega)) \leqslant x \\ \Leftrightarrow & U(\omega) \leqslant F(x) \\ \Leftrightarrow & \omega \in [U \leqslant F(x)] \end{array}$$

  Ainsi, on a :
  $G(x) = \mathbb{P}(\left[F^{-1}(U) \leqslant x\right]) = \mathbb{P}([U \leqslant F(x)]) = F_U(F(x)) = F(x)$.
  (car $F(x) \in [0,1]$)

I.3. Simulation d'une v.a.r. suivant la loi standard de Gumbel

I.3.a) Aspect théorique

Soit $\lambda > 0$ et soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \exp(-\mathrm{e}^{-\lambda x})$.

► Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

- F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F'(x) = -(-\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}) \times \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\lambda x}} = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \times \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\lambda x}} > 0$$

- La fonction F est :
  × continue sur $]-\infty,+\infty[$,
  × strictement croissante sur $]-\infty,+\infty[$.
  La fonction F réalise donc une bijection de $]-\infty,+\infty[$ sur
  $F(]-\infty,+\infty[) =]\lim\limits_{x\to-\infty} F(x), \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)[$.
  Or :
  × $\lim\limits_{x\to-\infty} -\mathrm{e}^{-\lambda x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\lambda x}} = 0$
  × $\lim\limits_{x\to+\infty} -\mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\lambda x}} = 1$.
  donc F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.

- ▶ En déduire que F est la fonction de répartition d'une v.a.r. T admettant une densité f_T continue sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera. *(on dit que T suit la loi de Gumbel de paramètre λ)*

> La fonction F vérifie les propriétés suivantes.
>
> *1)* F est (strictement) croissante,
>
> *2)* F continue sur $\mathbb{R}$,
>
> *3)* $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$,
>
> *4)* $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$,
>
> *5)* F de classe C^1 sur $\mathbb{R}$
>
> F est donc bien une fonction de répartition de variable à densité.
> Une densité est obtenue en dérivant F : $\forall t \in \mathbb{R},\ f_T(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \times \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\lambda t}}$

On suppose maintenant que $\lambda = 1$. *(on parle alors de loi standard de Gumbel de paramètre)*

- ▶ Expliciter la bijection réciproque G de la fonction F.

> - Avec $\lambda = 1$, on a $F(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$.
> - Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0,1[$. On a alors $y > 0$ et $-\ln y > 0$.
>   Raisonnons par équivalence :
>
> $$\begin{aligned} y = F(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}} \ \Leftrightarrow \ \ln y = -\mathrm{e}^{-x} \ \Leftrightarrow \ \mathrm{e}^{-x} = -\ln y \\ &\Leftrightarrow \quad -x = \ln(-\ln y) \\ &\Leftrightarrow \quad x = -\ln(-\ln y) \end{aligned}$$
>
> La réciproque de F est donc la fonction :
>
> $$G : \begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\ln(-\ln x) \end{array}$$

- ▶ Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0,1[$.
  Quelle est la loi de la variable aléatoire $G(U)$?

> - D'après la méthode d'inversion, $G(U)$ a pour fonction de répartition F. Ainsi, $G(U)$ suit la loi standard de Gumbel.
> - On peut le démontrer facilement. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
>
> $$[G(U) \leqslant x] = [F(G(U)) \leqslant F(x)] = [U \leqslant F(x)]$$
>
> donc $F_{G(U)}(x) = \mathbb{P}(G(U) \leqslant x) = \mathbb{P}(U \leqslant F(x)) = F_U(F(x)) = F(x)$
> car F est à valeurs dans $]0,1[$.

- ▶ Écrire en **Python** une fonction `Gumbel` simulant une v.a.r. suivant la loi standard de Gumbel.

```python
def Gumbel():
    return -np.log(-np.log(rd.random()))
```

I.3.b) Représentation graphique

Densité de probabilité

Dans cette section, on compare la densité de probabilité théorique avec la densité de probabilité obtenue par simulation. Pour ce faire, on procède comme suit :

× on produit `N` observations de la simulation de la loi standard de Gumbel,

× on découpe ces données en `n` classes,

× on trace l'histogramme des effectifs associé.

▶ Tracer sur un même graphique la densité théorique et la densité simulée.

```
import numpy as np
import random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

# Valeur des paramètres
n = 100
N = 10000

# Densité théorique
x = np.linspace(-4, 10, n)
y = np.exp(-x) * np.exp(-np.exp(-x))

# Simulation de N observations
Obs = [Gumbel() for k in range(N)]

plt.subplot(1,2,1)
# Tracé de la densité théorique
plt.plot(x, y, color = 'r', linewidth = 1.5)
# Tracé de la densité observée
plt.hist(Obs, bins = n, normed = True, color = 'b')

```

Fonction de répartition

On se propose maintenant de comparer la fonction de répartition théorique avec sa version obtenue par simulation. Pour ce faire, on procède comme suit :

× on récupère le tableau des effectifs des `N` observations précédentes,

× on récupère la liste définissant les classes des `N` observations précédentes,

× on trace le diagramme en bâtons des effectifs **cumulés** associé.

▶ Tracer sur un même graphique la fonction de répartition théorique et celle simulée.

```
# Fonction de répartition théorique
z = np.exp(-np.exp(-x))
# Tableau des effectifs
nbCl = n
(effectif, cl) = np.histogram(Obs, nbCl)
# Effectifs cumulés
effCum = np.cumsum(effectif)
```

```
plt.subplot(1,2,2)
# Tracé de la fonction de répartition théorique
plt.plot(x, z, color = 'r', linewidth = 1.5)
# Tracé de la répartition simulée
plt.bar(cl[0:n], effCum / N, color = 'b', width=cl[1]-cl[0])
```

I.4. Simulation d'une v.a.r. suivant la loi de Cauchy

I.4.a) Aspect théorique

Soient $a > 0$ et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \dfrac{1}{\pi} \arctan\left(\dfrac{x}{a}\right) + \dfrac{1}{2}$.

▶ Justifier que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.

▶ En déduire que F est la fonction de répartition d'une v.a.r. X admettant une densité f_X continue sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

La fonction F vérifie les propriétés suivantes.

1) F est (strictement) croissante,

2) F continue sur $\mathbb{R}$,

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$,

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$,

5) F de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

F est donc bien une fonction de répartition de variable à densité.

Une densité est obtenue en dérivant F : $\quad \forall t \in \mathbb{R},\ f_X(t) = \dfrac{1}{\pi a} \dfrac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}$

- Expliciter la bijection réciproque G de la fonction F.

- Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$.
  Quelle est la loi de la variable aléatoire $G(U)$?

D'après la méthode d'inversion, $G(U)$ a pour fonction de répartition F. Ainsi, $G(U)$ suit la loi de Cauchy de paramètre a.

- Écrire en **Python** une fonction `Cauchy(a)` simulant une v.a.r. suivant la loi de Cauchy.

```python
def Cauchy(a):
    return a * np.tan(np.pi*(rd.random()-1/2))
```

I.4.b) Représentation graphique

Densité de probabilité

- Tracer sur un même graphique la densité théorique et la densité simulée.

```python
# Valeur des paramètres
a = 1
n = 100
N = 10000
# Densité théorique
x = np.linspace(-4, 10, n)
y =

# Simulation de N observations
Obs = [Cauchy(a) for k in range(N)]

plt.subplot(1,2,1)
# Tracé de la densité théorique
plt.plot(x, y, color = 'r', linewidth = 1.5)
# Tracé de la densité observée
plt.hist(Obs, bins = n, normed = True, color = 'b')

```

Fonction de répartition

► Tracer sur un même graphique la fonction de répartition théorique et celle simulée.

```
# Fonction de répartition théorique
z =
# Tableau des effectifs
nbCl = n
(effectif, cl) = np.histogram(Obs, nbCl)
# Effectifs cumulés
effCum = np.cumsum(effectif)

plt.subplot(1,2,2)
# Tracé de la fonction de répartition théorique
plt.plot(x, z, color = 'r', linewidth = 1.5)
# Tracé de la répartition simulée
plt.bar(cl[0:n], effCum / N, color = 'b', width=cl[1]-cl[0])
```

II. Méthode d'inversion : cas pratique

II.1. Énoncé du théorème d'inversion, cas pratique

Théorème 2.
Soit X une v.a.r. à densité dont la loi est donnée par sa fonction de répartition F.
Soit U une v.a.r. telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.
On suppose de plus qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
× *F est strictement croissante sur $]a, b[$,*
× *F est nulle sur $]-\infty, a[$,*
× *F est égale à 1 sur $]b, +\infty[$.*
On a alors :
- *F est bijective de $]a, b[$ sur $]0, 1[$.*
- *La v.a.r. $V = F^{-1}(U)$ a pour fonction de répartition F.*

II.2. Simulation d'une v.a.r. suivant la moi uniforme sur un intervalle réel

On considère une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ (où a et b deux réels tels que $a < b$).

► Que signifie que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$?

a) $\boxed{X(\Omega) = [a, b]}$

b) X admet pour densité la fonction : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$

► Déterminer la fonction de répartition F de X.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On étudie la valeur de $F(x)$ en fonction de x.

- Si $x < a$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0$$

- Si $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)\, dt + \int_{a}^{x} f(t)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{a} 0\, dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\, dt \\ &= 0 + \frac{x-a}{b-a} \end{aligned}$$

- Si $x > b$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{a} f(t)\, dt + \int_{a}^{b} f(t)\, dt + \int_{b}^{x} f(t)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{a} 0\, dt + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\, dt + \int_{a}^{x} 0\, dt \\ &= 0 + \frac{b-a}{b-a} + 0 = 1 \end{aligned}$$

► Démontrer que F réalise une bijection de $]a, b[$ sur $]0, 1[$.
Déterminer sa bijection réciproque $G :]0, 1[\to]a, b[$.

Soit $x \in]0, 1[$ et $y \in]a, b[$. On détermine G en raisonnant par équivalence.

$$y = F(x) \Leftrightarrow y = \frac{x-a}{b-a} \Leftrightarrow (b-a)\, y = x - a \Leftrightarrow x = (b-a)\, y + a \Leftrightarrow x = G(y)$$

► On prolonge G en posant $G(x) = a$ si $x \leqslant 0$ et $G(x) = b$ si $x \geqslant 1$.
Déterminer la loi de la v.a.r. $V = G(U)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \leqslant a$:
$[G(U) \leqslant x] = \varnothing$ car $G(U)$ est à valeurs dans $[a, b]$. D'où : $\mathbb{P}([G(U) \leqslant x]) = 0$.
- Si $x \in]a, b[$:
$F_V(x) = \mathbb{P}(G(U) \leqslant x) = \mathbb{P}(F(G(U)) \leqslant F(x)) = \mathbb{P}(U \leqslant F(x)) = F(x)$.
- Si $x \geqslant b$:
$[G(U) \leqslant x] = \Omega$ car $G(U)$ est à valeurs dans $[a, b]$. D'où : $\mathbb{P}([G(U) \leqslant x]) = 1$.

Ainsi, on a : $V \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.

▶ Écrire en **Python** une fonction `unfiCont(a,b)` simulant un v.a.r. suivant la loi $\mathcal{U}([a,b])$.

```
def unifContinue(a, b)
    return(a + (b-a) * rd.random())
```

II.3. Simulation d'une v.a.r. suivant une loi exponentielle

II.3.a) Aspect théorique

Soit $\lambda > 0$ et soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

▶ Que signifie $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$?

a) $\boxed{X(\Omega) = [0,+\infty[}$

b) X admet pour densité la fonction : $f : \begin{array}{|lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$

▶ Déterminer la fonction de répartition F de X.

- Si $x < 0$: $F(x) \;=\; \mathbb{P}(X \leqslant x) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$.
  (en effet, X est à valeurs positives)
- Si $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt + \int_{0}^{x} f(t)\ dt = \int_{0}^{x} \lambda\, e^{-\lambda t}\ dt \\ &= \lambda \int_{0}^{x} e^{-\lambda t}\ dt = \lambda \left[\frac{-e^{-\lambda t}}{\lambda} \right]_{0}^{x} = -e^{-\lambda x} + e^{\lambda 0} = 1 - e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

▶ Démontrer que F réalise une bijection de $]0,+\infty[$ dans $]0,1[$.
Déterminer sa bijection réciproque $G :]0,+\infty[\to]0,1[$.

Soit $x \in]0,1[$ et $y \in]0,+\infty[$. On détermine G en raisonnant par équivalence.

$$y = F(x) \Leftrightarrow y = 1 - e^{-\lambda x} \Leftrightarrow 1 - y = e^{-\lambda x} \Leftrightarrow -\lambda\, x = \ln(1-y) \Leftrightarrow x = -\frac{\ln(1-y)}{\lambda}$$

▶ On prolonge G en posant $G(x) = 0$ si $x \leqslant 0$. Déterminer la loi de la v.a.r. $V = G(U)$.

- Si $x \leqslant 0$:
  $[G(U) \leqslant x] \;=\; \varnothing$ car $G(U)$ est à valeurs strictement positives.
  D'où $\mathbb{P}([G(U) \leqslant x]) = 0$.
- Si $x \geqslant 0$:
  $\mathbb{P}(G(U) \leqslant x) \;=\; \mathbb{P}(F(G(U)) \leqslant F(x)) \;=\; \mathbb{P}(U \leqslant F(x)) \;=\; F(x)$.

Ainsi, on a : $V \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

- Écrire une fonction `expo(lambda)` qui simule une v.a.r. suivant la loi exponentielle de paramètre `lambda`.

```
def expo(lambda):
    return(-(1/lambda) * np.log(1-rd.rand()))
```

II.3.b) Représentation graphique

Densité de probabilité

- Tracer sur un même graphique la densité théorique et la densité simulée.

```
# Valeur des paramètres
a = 2
b = 7
n = 100
N = 10000
# Densité théorique
x = np.linspace(a, b, n)
y =

# Simulation de N observations
Obs = [unifCont(a,b) for k in range(N)]

plt.subplot(1,2,1)
# Tracé de la densité théorique
plt.plot(x, y, color = 'r', linewidth = 1.5)
# Tracé de la densité observée
plt.hist(Obs, bins = n, normed = True, color = 'b')
```

Fonction de répartition

- Tracer sur un même graphique la fonction de répartition théorique et celle simulée.

```
# Fonction de répartition théorique
z =
# Tableau des effectifs
nbCl = n
(effectif, cl) = np.histogram(Obs, nbCl)
# Effectifs cumulés
effCum = np.cumsum(effectif)

plt.subplot(1,2,2)
# Tracé de la fonction de répartition théorique
plt.plot(x, z, color = 'r', linewidth = 1.5)
# Tracé de la répartition simulée
plt.bar(cl[0:n], effCum / N, color = 'b', width=cl[1]-cl[0])
```