TP Informatique n° 17
Résolution approchée de l'équation de la chaleur

I. Équation de la chaleur

I.1. Présentation générale dans le cas unidimensionnel

- On considère une tige unidimensionnelle (de largeur négligeable) d'une longeur L.
  Le domaine spatial considéré est donc ici $\Omega = [0, L]$.
- Cette tige est éventuellement soumise à une source de chaleur.
- Il s'agit ici de savoir comment la chaleur se diffuse, au cours du temps, le long de la tige.
- Le temps est ici modélisé par un intervalle $[0, T]$.

On cherche à obtenir une fonction $u : [0, T] \times [0, L] \to \mathbb{R}$ qui mesure la température de la tige. Plus précisément $u(t, x)$ donne la température au temps t de la tige en la position x.

La diffusion de la chaleur le long de la tige est régie par l'équation suivante.

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} \;=\; \kappa \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + S}$$

où

× κ est le cœfficient de diffusivité thermique (grandeur physique relative au matériau de la tige),

× S est l'échauffement provenant de la source de chaleur.
  Cette valeur peut être fonction du temps (si l'échauffement varie) ainsi que de l'espace (la source peut échauffer plus fortement certains points que d'autres).

II. Résolution approchée de l'équation

II.1. Introduction

- Il existe plusieurs méthodes permettant de trouver des solutions particulières à l'équation de la chaleur. On peut citer, par exemple, la méthode de séparation des variables qui consiste à trouver les solutions de la forme $u(x, t) = X(x) \times Y(t)$ (produit de deux fonctions indépendantes).
- La résolution étant complexe dans le cas général, on s'intéresse souvent au problème consistant à trouver une solution approchée de l'équation.

II.2. Discrétisation de l'espace - temps

La première étape de la résolution approchée de l'équation consiste à effectuer un maillage régulier de l'espace-temps $[0, T] \times [0, L]$.

- On découpe le temps en N intervalles ($N + 1$ points) et on note Δt le pas temporel.
  Ainsi $\boxed{T = N \; \Delta t}$
- On découpe l'espace en J intervalles ($J + 1$ points) et on note Δx le pas spatial.
  Ainsi $\boxed{L = J \; \Delta x}$

On obtient alors une grille dont les points sont de la forme : $(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x)$.
On cherche alors la valeur de la solution u de l'équation en tous les points du maillage.

Notation
Pour $n \in [\![0, N]\!]$ et $j \in [\![0, J]\!]$, on note : $\boxed{u_j^n = u(t_n, x_j)}$

II.3. La méthode des différences finies

II.3.a) Approximation numérique des fonctions dérivées

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction 4 fois dérivable sur I. Soit $x \in I$.
  Écrire le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction $r : h \mapsto f(x+h)$ en fonction de f.

- Même question avec la fonction $t : h \mapsto f(x-h)$ en fonction de f.

- Lorsque h petit, on propose d'approcher $f'(x)$ par l'un des trois quotients suivants.
  1) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$
  2) $\dfrac{f(x)-f(x-h)}{h}$
  3) $\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

  Selon vous, quelle est la meilleure approximation ?

► En procédant de même proposer une approximation de $f''(x)$.

II.3.b) Application au cadre précédent

On propose d'appliquer les approximations précédentes à l'équation de la chaleur.
On obtient alors les approximations suivantes.

- Dérivée d'ordre 1 en temps :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \simeq \frac{u(t+\Delta t,x)-u(t,x)}{\Delta t}}$$

- Dérivée d'ordre 2 en espace :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \simeq \frac{u(t,x+\Delta x)-2u(t,x)+u(t,x-\Delta x)}{\Delta x^2}}$$

► Donner une approximation de $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t_n,x_j)$ en fonction de u_j^n et u_j^{n+1} et Δt.

► Donner une approximation de $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n,x_j)$ en fonction de u_{j+1}^n, u_j^n et u_{j-1}^n et Δx^2.

II.3.c) Obtention du schéma d'approximation numérique

Dans la suite, on fait les suppositions suivantes.

- On considère qu'aucune source de chaleur n'agit sur la tige ($S = 0$).
- On considère les conditions aux limites suivantes :
  - × $u(0,x) \ = \ \sin\left(\dfrac{2\pi}{L}x\right)$
    (la tige possède des points chauds et des points froids)
  - × $u(t,0) \ = \ 0$ et $u(t,L) \ = \ 0$
    (les extrémités de la tige sont à température nulle)

► Écrire le schéma numérique d'approximation de l'équation de la chaleur sous ces conditions.

► Le but est de déterminer la matrice $\left(u_j^n\right)_{\substack{n \in [\![0, N]\!] \\ j \in [\![0, L]\!]}}$.
Expliquer comment on doit s'y prendre pour calculer les éléments de cette matrice.

► Comment crée-t-on en **Python** une matrice u de taille $N+1 \times J+1$ remplie de 0 ?

► Compléter le programme suivant mettant en œuvre ce schéma.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Paramètres physiques
K = 0.5
L = 1
T = 0.1

# Paramètres numériques
J = 100
N = 1000

Deltx =
Deltt =
c =

# Initialisation
x =
u =
u[0,:] =

plt.figure()

for n in range(0,N):
    for j in range(1,J-1):
        # schéma d'approximation
        u[n+1,j] =

    if (n%100 == 0):
        plotlabel = "t = %1.2f" %(n * Deltt)
        plt.plot(

plt.xlabel(u'$x$', fontsize=26)
plt.ylabel(u'$T$', fontsize=26, rotation=0)
plt.title(u'Equation de la chaleur 1D')
plt.legend()
plt.show()
```