Colles

semaine 10 : 15 novembre - 20 novembre

I. Généralités sur les variables aléatoires

I.1. Notion de variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

- On dit que X est une **variable aléatoire réelle** définie sur $(\Omega, \mathscr{A})$ si :
  (i) X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ ($X : \Omega \to \mathbb{R}$)
  (ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ [X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\} \in \mathscr{A}$
- L'image de Ω par l'application X, est notée $X(\Omega)$.
  Cet ensemble image $X(\Omega)$ est, par définition, l'ensemble des valeurs que peut prendre l'application X.

I.2. Fonction de répartition d'une variable aléatoire

a) Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire réelle.

- On appelle **fonction de répartition de** X et on note F_X l'application :

$$\boxed{F_X : \begin{array}{|lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) \end{array}}$$

b) Propriétés caractéristiques

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire réelle.

La fonction de répartition F_X vérifie les propriétés suivantes.

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant F_X(x) \leqslant 1$.

2) F_X est croissante.

3) $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1}$

4) F_X est continue à droite en tout point $x \in \mathbb{R}$.

Autrement dit : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{\substack{t \to x \\ t > x}} F_X(t) = F_X(x)}$

5) F_X admet une limite finie à gauche en tout point $x \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{\substack{t \to x \\ t < x}} F_X(t) = F_X(x) - \mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{P}([X < x])}$$

II. Généralités sur les variables aléatoires discrètes

II.1. Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

- La v.a.r. X est dite **discrète** si son esemble image $X(\Omega)$ est au plus dénombrable (*i.e.* si $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou si $X(\Omega)$ est infini dénombrable).
- On dit que la v.a.r. X est **finie** si $X(\Omega)$ est fini.
  On dit que la v.a.r. X est **infinie** si $X(\Omega)$ est un ensemble infini.

II.2. Système complet d'événements associé à une v.a.r. discrète

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Notons $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ où $I \subseteq \mathbb{N}$.

La famille $([X = x_i])_{i \in I}$ *est un système complet d'événements,*
appelé **système complet d'événements associé à X.**

II.3. Loi d'une v.a.r. discrète

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

- On appelle **loi de probabilité** de X et on note $\mathbb{P}_X$ l'application :

$$\mathbb{P}_X \ : \left| \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathbb{P}_X(x) \ = \ \mathbb{P}([X = x]) \end{array} \right.$$

- Autrement dit, la loi de X est la donnée de l'ensemble des valeurs $\mathbb{P}([X = x])$ pour x décrivant $X(\Omega)$.

À RETENIR

Afin de déterminer la loi d'une v.a.r. discrète, on procède toujours en deux étapes.

1) Détermination de l'ensemble image $X(\Omega)$.

2) Calcul de $\mathbb{P}\big([X = x]\big)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

II.4. Fonction de répartition d'une v.a.r. discrète

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une v.a.r. discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$ telle que $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ $(I \subseteq \mathbb{N})$.

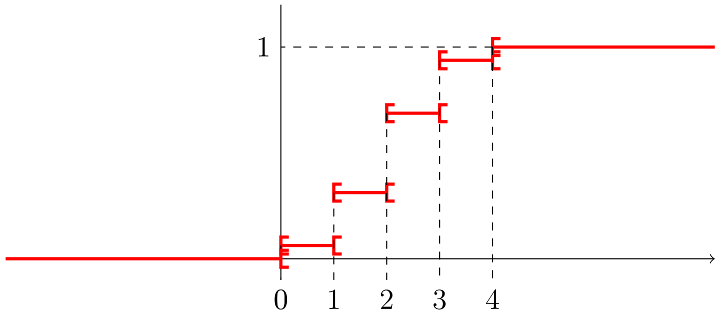
Alors la fonction de répartition F_X est déterminée par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \sum_{\substack{x_i \leqslant x \\ i \in I}} \mathbb{P}([X = x_i])}$$

Représentation graphique

Considérons une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(4, \frac{1}{2}\right)$.

*(**1**) expérience : quatre lancers successifs d'un dé* 6*, **2**) X la v.a.r. qui compte le nombre de Pile)*



- On obtient une fonction constante par morceaux qui présente des sauts de discontinuité qui donnent à cette courbe une allure d'**escalier**. Les **contremarches** (*i.e.* les sauts de continuité) ont pour hauteur les valeurs successives de $\mathbb{P}([X = x_i])$ (les x_i étant rangés dans l'ordre).

- Cette forme en escalier est **caractéristique** des fonctions de répartition des v.a.r. discrètes.
- En particulier, une v.a.r. à densité n'est jamais une v.a.r. discrète. En effet, si X est une v.a.r. à densité, alors F_X est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Or :

$$\boxed{F_X \text{ continue en } x \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow \ \mathbb{P}([X = x]) = 0}$$

La fonction de répartition F_X d'une v.a.r. à densité n'admet pas de point de discontinuité. Sa représentation graphique ne fait donc pas apparaître de sauts de continuité.

III. Lois usuelles discrètes finies

III.1. Loi uniforme

a) Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi uniforme** sur $[\![1,n]\!]$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = [\![1,n]\!]}$

  b) $\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}([X=k]) = \dfrac{1}{n}}$

- Plus généralement, si $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ et $a < b$, on dit qu'une v.a.r. X suit **la loi uniforme** sur $[\![a,b]\!]$ si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = [\![a,b]\!]}$

  b) $\boxed{\forall k \in [\![a,b]\!],\ \mathbb{P}([X=k]) = \dfrac{1}{b-a+1}}$

- On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$ pour signifier que X suit la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$.

- **Expérience de référence** : on considère une expérience qui possède n issues différentes (qu'on numérote de 1 à n) qui sont équiprobables.
- **Variable associée à la loi** : la v.a.r. X égale à i si l'issue i est obtenue lors de l'expérience, suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

b) Espérance / variance

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

1) La v.a.r. X admet une espérance et une variance.

2) De plus : $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}}$ et $\boxed{\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}}$

Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a < b$.
Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$.
On note : $Y = X - a + 1$.

1) Alors : $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, b-a+1]\!])$.

2) La v.a.r. X admet une espérance et une variance.

3) De plus : $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}}$ et $\boxed{\mathbb{V}(X) = \dfrac{(b-a)(b-a+2)}{12}}$

III.2. Loi de Bernoulli

a) Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi de Bernoulli** de paramètre $p \in]0,1[$ si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = \{0,1\}}$

  b) $\boxed{\mathbb{P}([X=1]) = p}$ et $\boxed{\mathbb{P}([X=0]) = 1-p} = q$

- On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ pour signifier que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

- **Expérience de référence** : on considère une expérience aléatoire possédant deux issues (qui ne sont pas forcément équiprobables) :
  × l'une de ces issues est nommée « succès » et se produit avec probabilité p ;
  × l'autre est nommée « échec » et se produit avec probabilité $1-p$.
- **Variable associée à la loi** : la v.a.r. X égale à 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec (*i.e.* calculant le nombre de succès) suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

b) Espérance / variance

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ ($p \in]0,1[$).

1) Alors X admet une espérance et une variance.

2) De plus : $\boxed{\mathbb{E}(X) = p}$ et $\boxed{\mathbb{V}(X) = p\ (1-p)} = p\ q$

III.3. Loi binomiale

a) Définition

- On dit qu'une v.a.r. discrète X suit **la loi binomiale** de paramètre (n,p), où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$ si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = [\![0,n]\!]}$

  b) $\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}([X=k]) = \binom{n}{k}\ p^k (1-p)^{n-k}} = \binom{n}{k}\ p^k\, q^{n-k}$

- On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ pour signifier que X suit la loi binomiale de paramètre (n,p).

- **Expérience de référence** : on considère l'expérience aléatoire qui consiste à effectuer n épreuves de Bernoulli indépendantes (le résultat de l'une ne dépend pas du résultat des autres) et de même paramètre p.
- **Variable associée à la loi** : la v.a.r. donnant le nombre de succès obtenus au cours de cette expérience suit la loi binomiale de paramètre (n,p).

b) **Espérance / variance**

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$).

1) Alors X admet une espérance et une variance.

2) De plus : $\boxed{\mathbb{E}(X) = n\ p}$ et $\boxed{\mathbb{V}(X) = n\ p\ (1-p)} = n\ p\ q$

IV. Lois discrètes usuelles infinies

IV.1. Loi géométrique

a) **Définition**

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi géométrique** de paramètre $p \in]0,1[$ si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}^*}$

  b) $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X=k]) = p\ (1-p)^{k-1}} = p\ q^{k-1}$
- On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ pour signifier que X suit la loi géométrique de paramètre p.

- **Expérience de référence** : on considère une expérience aléatoire qui consiste à effectuer une infinité d'épreuves de Bernoulli indépendantes (le résultat de l'une ne dépend pas du résultat des autres) et de même paramètre p.
- **Variable associée à la loi** : la v.a.r. donnant le rang d'apparition du premier succès obtenu lors de l'expérience suit la loi géométrique de paramètre p.

b) **Espérance / variance**

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ ($p \in]0,1[$). Alors :

1) La v.a.r. X admet une espérance et une variance.

2) $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}}$ et $\boxed{\mathbb{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}} = \dfrac{q}{p^2}$

c) **La loi géométrique est sans mémoire**

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ ($p \in]0,1[$).

Alors pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$:

1) $\boxed{\mathbb{P}([X > k]) = (1-p)^k}$

Cela caractérise la loi géométrique de paramètre p. Plus précisément :

$$\left.\begin{array}{l} \times\ Y \text{ est une v.a.r. à valeurs entières} \\ \times\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([Y > k]\big) = (1-p)^k \end{array}\right. \Leftrightarrow\ Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$$

Le sens direct se démontre grâce à l'égalité : $\mathbb{P}([Y = k]) = \mathbb{P}([Y > k-1]) - \mathbb{P}([Y > k])$.

2) $\boxed{\mathbb{P}([X > k+\ell]) = \mathbb{P}([X > k]) \times \mathbb{P}([X > \ell])}$

3) $\boxed{\mathbb{P}_{[X>k]}([X > k+\ell]) = \mathbb{P}([X > \ell])}$

Démonstration.
Soit $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$.

1) On remarque tout d'abord :

$$\mathbb{P}([X > k]) \;=\; 1 - \mathbb{P}\Big(\overline{[X > k]}\Big) \;=\; 1 - \mathbb{P}([X \leqslant k])$$

Par ailleurs, comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a : $[X \leqslant k] \;=\; \bigcup\limits_{i=1}^{k} \,[X = i]$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X \leqslant k]) \;&=\; \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} \,[X = i]\right) \\
&=\; \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left([X = i]\right) \qquad \textit{(par incompatibilité)} \\
&=\; \sum_{i=1}^{k} p\; q^{i-1} \;=\; p \sum_{i=0}^{k-1} q^i \;=\; p\,\frac{1 - q^k}{1 - q} \;=\; 1 - q^k
\end{aligned}$$

Enfin : $\mathbb{P}([X > k]) \;=\; 1 - \mathbb{P}([X \leqslant k]) \;=\; 1 - (1 - q^k) \;=\; q^k$.

2) D'après le point précédent :

$$\mathbb{P}([X > k + \ell]) \;=\; q^{k+\ell} \;=\; q^k \times q^\ell \;=\; \mathbb{P}([X > k]) \times \mathbb{P}([X > \ell])$$

3) Comme $[X > k + \ell] \subseteq [X > k]$, on a :

$$\mathbb{P}_{[X>k]}([X > k + \ell]) = \frac{\mathbb{P}\big(\,[X > k] \;\cap\; [X > k + \ell]\,\big)}{\mathbb{P}([X > k])} = \frac{\mathbb{P}([X > k + \ell])}{\mathbb{P}([X > k])} = \frac{q^{k+\ell}}{q^k} = q^\ell = \mathbb{P}([X > \ell])$$

On dit alors que la loi géométrique est à perte de mémoire (la propriété $[X > k]$ est oubliée, seul le délai est retenu) ou encore que la loi géométrique est **sans mémoire**. □

Cas particulier du lancer infini d'une pièce de monnaie

Considérons l'expérience aléatoire qui consiste à effectuer une infinité de lancer d'une pièce de monnaie qui donne Pile avec probabilité $p \in \,]0, 1[$. Les lancers sont supposés indépendants.

On note X la v.a.r. qui prend pour valeur le rang du premier Pile obtenu.

Dans ce cas, il est simple de démontrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big(\,[X > k]\,\big) = (1-p)^k$. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

L'événement $[X > k]$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ Le premier Pile est obtenu à un rang strictement supérieur à k

$\Leftrightarrow$ Chacun des k premiers lancers a eu pour résultat Face

$\Leftrightarrow$ On a obtenu Face au 1$^{\text{er}}$ lancer

`ET` on a obtenu Face au 2$^{\text{ème}}$ lancer

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

`ET` on a obtenu Face au $k^{\text{ème}}$ lancer

$\Leftrightarrow$ $F_1 \;\cap\; \dots \;\cap\; F_k$ est réalisé

Ainsi : $[X > k] = F_1 \;\cap\; \dots \;\cap\; F_k$.

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([X > k]\big) & = & \mathbb{P}\big(F_1 \cap \ldots \cap F_k\big) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}\big(F_i\big) & \textit{(car les lancers sont indépendants)} \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{k} \big(1 - \mathbb{P}\big(P_i\big)\big) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{k} (1-p) & \\ & = & (1-p)^k & \end{array}$$

Remarque

- Dans un contexte où X est un variable aléatoire mesurant une durée de vie (durée de vie d'une cellule, durée de fonctionnement d'un composant électronique, nombre de cycle de charge/décharge autorisé par une batterie), on introduit souvent la fonction :

  $$S : t \mapsto \mathbb{P}([X > t]) = 1 - \mathbb{P}([X \leqslant t]) = 1 - F_X(t)$$

  Dans ce cas, $S(t) = \mathbb{P}([X > t])$ représente la probabilité que l'objet (ou l'individu) considéré soit encore en vie après une durée t.

  Dans le cas d'un phénomène à durée de vie continue (durée de vie d'une cellule), la modélisation s'appuiera sur une v.a.r. X à densité.
  Dans le cas d'un phénomène à durée de vie discrète (nombre de cycles d'une batterie), la modélisation s'appuiera sur une v.a.r. X discrète.

- Considérons la propriété d'absence de mémoire dans ce contexte.

  $$\mathbb{P}_{[X>k]}([X > k + \ell]) = \mathbb{P}([X > \ell])$$

  Considérons que X compte la durée de fonctionnement d'un composant avant une panne. Alors cette propriété signifie que la durée de vie restante d'un objet est indépendante de la durée de vie écoulée de l'objet (période durant laquelle il a fonctionné sans tomber en panne). Autrement dit, il n'y a pas de vieillissement ou encore d'usure du composant électronique considéré. C'est un cas assez fréquent en réalité : on peut considérer que les diodes, transistors, résistances, condensateurs sont sans usure puisque leur usure ne débute que bien après la fin de vie de l'objet dans lequel ils sont installés. C'est pourquoi la durée de vie d'un composant est souvent modélisée par une v.a.r. qui suit loi exponentielle qui est, elle aussi, sans mémoire (c'est même une propriété qui caractérise la loi exponentielle).

Exercice

Soit X une v.a.r. telle que : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ où $p \in]0, 1[$.

1) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([X > k - 1]) - \mathbb{P}([X > k])}$$

2) En déduire que : $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > k])$.

3) Retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X)$ à l'aide de cette formule.

Démonstration.

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La v.a.r. X est à valeurs entières. On en déduit :

$$[X > k-1] = [X = k] \cup [X > k]$$

Les événements $[X = k]$ et $[X > k]$ sont incompatibles. On en déduit :

$$\mathbb{P}([X > k-1]) = \mathbb{P}([X = k]) + \mathbb{P}([X > k])$$

et ainsi : $\mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$.

2) La v.a.r. X admet une espérance car elle suit une loi géométrique.
Par définition $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k])$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}([X = k]) &= \sum_{k=1}^{N} k \Big(\mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k]) \Big) && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}([X > k-1]) - \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}([X > k]) && \textit{(par linéarité)} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)\ \mathbb{P}([X > k]) - \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}([X > k]) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} k\ \mathbb{P}([X > k]) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X > k]) - \sum_{k=1}^{N} k\ \mathbb{P}([X > k]) && \textit{(par linéarité)} \\
&= 0 \times \mathbb{P}([X > 0]) + \cancel{\sum_{k=1}^{N-1} k\ \mathbb{P}([X > k])} + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X > k]) \\
&\quad - \Big(\cancel{\sum_{k=1}^{N-1} k\ \mathbb{P}([X > k]} + N\ \mathbb{P}([X > N]) \Big) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X > k]) - N\ \mathbb{P}([X > N]) \\
&= -N\ q^N\ + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X > k])
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}([X = k]) = -N\ q^N\ + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X > k])}$$

Ainsi : $\sum\limits_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X > k]) \ = \ \sum\limits_{k=1}^{N} k\ \mathbb{P}([X = k]) + N\ q^N$.
Les membres droits de l'égalité admettent une limite. Plus précisément :

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} k\ \mathbb{P}([X = k]) \ = \ \mathbb{E}(X) \quad \text{et} \quad \lim_{N \to +\infty} N\ q^N = 0$$

On en déduit que le membre de gauche admet une limite et :

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X > k]) \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > k]) \ = \ \mathbb{E}(X)$$

Remarque
La démonstration consiste à démontrer un résultat de type somme télescopique.
On pouvait faire apparaître directement une telle somme en remarquant :

$$k\ \mathbb{P}([X=k]) = (k-1)\ \mathbb{P}([X>k-1]) - k\ \mathbb{P}([X>k]) + \mathbb{P}([X>k-1])$$

Ainsi, par sommation et linéarité :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N} k\ \mathbb{P}([X=k]) \\
= \ & \sum_{k=1}^{N} \Big((k-1)\ \mathbb{P}([X>k-1]) - k\ \mathbb{P}([X>k])\Big) + \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}([X>k-1]) \\
= \ & \cancel{(1-1)\ \mathbb{P}([X>1-1])} - N\ \mathbb{P}([X>N]) + \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}([X>k-1]) \\
= \ & -N\ \mathbb{P}([X>N]) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X>k])
\end{aligned}$$

3) D'après ce qui précède : $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X>k]) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q} = \dfrac{1}{p}$. □

IV.2. Loi de Poisson

a) Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi de Poisson** de paramètre $\lambda > 0$ si :
  a) $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}}$
  b) $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X=k]) = \mathrm{e}^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}}$
- On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ pour signifier que X suit la loi de Poisson de paramètre λ.

Le `BO` suggère d'introduire la loi de Poisson comme loi limite.
On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ où $\lambda > 0$.
On démontre alors :

$$\boxed{\mathbb{P}([X_n=k]) = \binom{n}{k} \times \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \times \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \mathbb{P}([X=k])}$$

où X est une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
La loi de Poisson apparaît comme la limite de lois binomiales $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$. Ainsi, si n grand (et donc $\frac{\lambda}{n}$ proche de 0) la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ est une bonne approximation de la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.

b) Espérance / variance

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$. Alors :

1) La v.a.r. admet une espérance et une variance.

2) $\boxed{\mathbb{E}(X) = \lambda}$ et $\boxed{\mathbb{V}(X) = \lambda}$

MÉTHODO **Calcul de probabilités** *(bilan du chapitre)*

Afin de résoudre un exercice de calcul de probabilités, il faudra penser au schéma suivant.

0) Introduction des événements basiques (le fait d'avoir tiré une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage, le fait d'avoir obtenu pile au $i^{\text{ème}}$ tirage, le fait d'avoir obtenu un 6 au $i^{\text{ème}}$ tirage ...) liés à l'expérience considérée.
Nommage de l'événement A dont on cherche à déterminer la probabilité.
(ces deux étapes sont parfois directement données dans l'énoncé)

1) Décomposition de l'événement A à l'aide d'événements basiques.

2) Deux cas se présentent alors :

(i) si cette décomposition fait apparaître une union, il faut retenir le triptyque :

$$\boxed{\text{union / incompatibilité / somme}}$$

Dans le cas d'une union finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette union (cas d'une union d'une suite croissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles.
  - × si c'est le cas, on utilise l'additivité de $\mathbb{P}$.
  - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la formule du crible.

Dans le cas d'une union infinie d'événements

- On vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles :
  - × si c'est le cas, on utilise la σ-additivité de $\mathbb{P}$.
  - × si ce n'est pas le cas, on se ramène au cas d'une union finie d'événements en utilisant le théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une intersection d'événements en considérant la formule liant probabilité d'un événement à la probabilité de l'événement contraire.

(ii) si cette décomposition fait apparaître une intersection, il faut retenir le triptyque :

$$\boxed{\text{intersection / indépendance / produit}}$$

Dans le cas d'une intersection finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette intersection (cas d'une intersection d'une suite décroissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont mutuellement indépendants.
  - × si c'est le cas, on utilise la formule associée.
  - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la Formule des Probabilités Composées (FPC).

Dans le cas d'une intersection infinie d'événements

- On se ramène au cas d'une intersection finie d'événements en utilisant le théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une union d'événements en considérant la formule liant probabilité d'un événement à la probabilité de l'événement contraire.

Remarque

- Il est à noter que la Formule des Probabilités Totales (FPT) rentre dans ce schéma. En effet, si la famille $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements, alors tout événement B s'écrit comme une réunion d'événements 2 à 2 incompatibles.

$$B \;=\; \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \cap B \;=\; \bigcup_{i\in I} \big(A_i \cap B\big)$$

- L'étape de décomposition des événements est **primordiale**.
  On raisonne `TOUJOURS` sur les événements et `JAMAIS` directement sur les probabilités.

  ~~$\mathbb{P}(A) = 0$ car c'est la probabilité d'obtenir ...~~

  (cf démarche de l'exercice sur la limite monotone)

- Lorsqu'il s'agit de raisonner sur les événements, on adopte la rédaction suivante :

  ~~L'événement A signifie que ...~~

  L'événement A est réalisé si et seulement si ... ✓

- Afin de déterminer une probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(B)$ on pourra rédiger comme suit :

  Si l'événement A est réalisé, c'est que ...

  Dans ce cas, l'événement B est réalisé si et seulement si ...

- Dans un énoncé de probabilités discrètes, on manipule différents niveaux d'objets.
  1) Au premier niveau, on trouve l'expérience aléatoire considérée.
  On note Ω l'univers des possibles : c'est **l'ensemble** des résultats possibles (appelés aussi issues) de l'expérience. Si on considère l'expérience consistant à effectuer trois lancers successifs d'une même pièce, alors : $\Omega \;=\; \{P, F\}^3$.
  Autrement dit, Ω est l'ensemble des triplets à coefficitents dans l'ensemble $\{P, F\}$.
  Ces triplets pouront être nommés des 3-lancers (on s'adapte ainsi au vocabulaire des probabilités).
  Par exemple, $\omega = (F, F, P)$ est un 3-lancer qui est un résultat possible de l'expérience. Ce résultat est obtenu si le 1^{er} lancer fournit *Face*, le $2^{\text{ème}}$ fournit *Face*, le $3^{\text{ème}}$ fournit *Pile*.

  2) Au deuxième niveau, on trouve les événements : un événement A n'est rien d'autre qu'un **ensemble** qui regroupe certaines issues de l'expérience. Ainsi : $A \subset \Omega$ (un événement est un sous-ensemble de l'univers). Par exemple, l'événement P_1 : « obtenir *Pile* au premier lancer » regroupe tous les 3-lancers dont le premier coefficient vaut P.

  $$P_1 \;=\; \{\ (P, F, F),\ (P, F, P),\ (P, P, F),\ (P, P, P)\ \}$$

  Par exemple, $\omega = (P, F, F) \in P_1$. Lorsque $\omega \in P_1$, on dit que ω **réalise** l'événement P_1.

  3) Au troisième niveau, on trouve les v.a.r. . Ce sont des **applications** particulières :
  - elles prennent comme argument **un résultat possible de l'expérience** et renvoient **une valeur réelle**. Consisdérons la v.a.r. X qui donne le nombre de Pile obtenus au cours de l'expérience. Avec le 3-lancer ω précédent, on obtient : $X(\omega) = X\Big((P, F, F)\Big) = 1$.
    Cela démontre que la v.a.r. X peut prendre la valeur 1 (on a exhibé un 3-lancer ω tel que $X(\omega) = 1$).
  - elles sont des machines à créer des événements. Par exemple, $[X = 2]$ est un événement.
    Il regroupe **tous** les 3-lancers ω tels que : $X(\omega) = 2$.
    Autrement dit : $[X = 2] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 2\} = \{\ (P, P, F),\ (P, F, P),\ (F, F, P)\ \}$.

  Ce deuxième point nous replonge au deuxième niveau. Ainsi, pour comprendre le chapitre sur les v.a.r. , il est donc essentiel de maîtriser celui sur les probabilités générales.

V. Retour sur des questions classiques

V.1. Déterminer l'ensemble image d'une v.a.r. discrète

Rappelons tout d'abord que si X est une v.a.r. (discrète), son ensemble image est constitué de toutes les valeurs que peut prendre X. Plus précisément :

$$X(\Omega) \ = \ \{X(\omega) \in \mathbb{R} \mid \omega \in \Omega\}$$

L'idée est de considérer toutes les résultats possibles ω **de l'expérience** (on parle aussi d'issue) et de déterminer la valeur prise par la v.a.r. pour cette issue ω c'est-à-dire de déterminer $X(\omega)$.

Exemple

- On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
  On lance n fois une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et face également avec la probabilité $\frac{1}{2}$), les lancers étant supposés indépendants.
  On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun pile pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier pile.

Déterminer, en argumentant soigneusement, l'ensemble $Z(\Omega)$.

Démonstration.
On procède par double inclusion.

($\subset$) On lance n fois une pièce. Ainsi, on peut ne jamais obtenir de Pile ou obtenir le premier Pile au plus tard au $n^{\text{ème}}$ lancer.
On en déduit : $Z(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$.

($\supset$) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Deux cas se présentent :

× si $k = 0$, alors le n-tirage suivant réalise l'événement $[Z = 0]$:

$$\omega_0 \ = \ (\text{Face}, \ \text{Face}, \ \ldots, \ \text{Face})$$

On en déduit : $\omega_0 \in [Z = 0]$, *i.e.* $Z(\omega_0) = 0$. D'où : $0 \in Z(\Omega)$.

× si $k \in [\![1, n]\!]$, alors le n-tirage suivant réalise l'événement $[Z = k]$) :

$$\omega_k \ = \ (\underbrace{\text{Face}, \ \ldots, \ \text{Face}}_{k-1 \text{ fois}}, \ \text{Pile}, \ \ldots, \ \text{Pile})$$

On en déduit : $\omega_k \in [Z = k]$, *i.e.* $Z(\omega_k) = k$. D'où : $k \in Z(\Omega)$.

Finalement : $[\![0, n]\!] \subset Z(\Omega)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Z(\Omega) = [\![0, n]\!].}$$

Commentaire

On exhibe pour l'inclusion $[\![0, n]\!] \subset Z(\Omega)$ des n-tirages réalisant certains événements. Il suffit d'exhiber un n-tirage précis pour chaque événement, mais il en existe bien sûr plusieurs. À titre d'exemple, l'événement $[Z = 3]$ est réalisé par chacun des tirages suivants :

(Face, Face, Pile, Pile, …, Pile) *(tirage proposé dans la démonstration)*

(Face, Face, Pile, Face, …, Face)

(Face, Face, Pile, Face, Pile, …, Pile)

…

□

- On dispose de $n+1$ urnes $U_0, U_1, \dots, U_n$ telles que, pour tout k de $\{0, 1, \dots, n\}$, l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.
  On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes, de la façon suivante :
  - × Si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k \geqslant 1$), alors on tire une par une et avec remise, k boules dans l'urne U_k et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages.
  - × Si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

Déterminer $X(\Omega)$.

Démonstration.
Montrons : $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Pour cela, on procède par double inclusion.

($\subseteq$) Il y a entre 0 et n boules blanches dans les $(n+1)$ urnes. Donc : $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$.

($\supseteq$) Montrons maintenant que la v.a.r. X peut prendre chaque valeur entière entre 0 et n.

- × Si on obtient le n-lancer de pièce $(\text{Face}, \dots, \text{Face})$, alors l'événement $[Z = 0]$ est réalisé, donc l'événement $[X = 0]$ est réalisé (d'après l'énoncé).
- × Si on obtient le n-lancer de pièce $(\text{Pile}, \text{Face}, \dots, \text{Face})$, c'est-à-dire si on a obtenu Pile au 1$^{\text{er}}$ lancer, alors on effectue un 1-tirage dans l'urne U_1 qui contient 1 boule blanche, notée b_1, et $n-1$ boules noires, notées $n_1, \dots, n_{n-1}$.
  Si ce 1-tirage est (b_1), alors l'événement $[X = 1]$ est réalisé.
- × Si on obtient le n-lancer de pièce $(\text{Face}, \text{Pile}, \text{Face}, \dots, \text{Face})$, c'est-à-dire si on a obtenu Pile au 2$^{\text{ème}}$ lancer, alors on effectue un 2-tirage dans l'urne U_2 qui contient 2 boules blanches, notées b_1 et b_2, et $n-2$ boules noires, notées $n_1, \dots, n_{n-2}$.
  Si ce 2-tirage est (b_1, b_1), alors l'événement $[X = 2]$ est réalisé.
  (on rappelle qu'on tire **avec remise** *dans l'urne)*
- × $\cdots$
- × Si on obtient le n-lancer de pièce $(\text{Face}, \dots, \text{Face}, \text{Pile})$, c'est-à-dire si on a obtenu Pile au $n^{\text{ème}}$ lancer, alors on effectue un n-tirage dans l'urne U_n qui contient n boules blanches, notées b_1, $\dots$, b_n, et $n - n = 0$ boule noire.
  Si ce n-tirage est $(b_1, \dots, b_1)$, alors l'événement $[X = n]$ est réalisé.

$$\boxed{\text{Finalement : } X(\Omega) = [\![0, n]\!].}$$

Commentaire

- Il faut bien comprendre que la v.a.r. X ne dépend en aucun cas de la v.a.r. Z. Si c'était le cas, la notation de la v.a.r. ferait apparaître cette dépendance (la v.a.r. serait notée X_Z par exemple).
  Rédiger comme suit : ~~Si Z a pris la valeur k, alors $X(\Omega) = [\![0, k]\!]$~~
  est de ce fait une grossière erreur. Il n'y a pas lieu de se placer dans le contexte où $[Z = k]$ serait réalisé. L'ensemble image $X(\Omega)$ ne peut de fait pas dépendre de k. L'idée, lorsque l'on considère une v.a.r. X dont le résultat dépend d'une première expérience, est d'envisager `TOUS` les résultats possibles pour cette première partie de l'expérience. On peut constater :
  - × si Z prend la valeur 0 alors X prend la valeur 0,
  - × si Z prend la valeur 1 alors X prend une valeur dans $[\![0, 1]\!]$,
  - × $\dots$
  - × si Z prend la valeur n alors X prend une valeur dans $[\![0, n]\!]$.

  Si l'on procède ainsi, on pourra conclure :
  $$X(\Omega) \;=\; \{0\} \,\cup\, \{0, 1\} \,\cup\, \dots \,\cup\, [\![0, n]\!] \;=\; [\![0, n]\!]$$

Commentaire

- On donne dans cette démonstration des exemples de tirages et de lancers qui réalisent les événements $[X = i]$. Il était bien sûr possible d'en choisir d'autres.
  Par exemple, pour l'événement $[X = 1]$, si on obtient le n-lancer de pièce (Face, Pile, Face, $\ldots$, Face), c'est-à-dire si on a obtenu Pile au $2^{\text{ème}}$ lancer, alors on effectue un 2-tirage dans l'urne U_2.
  Si ce 2-tirage est $(b_2,\ n_3)$, alors l'événement $[X = 1]$ est réalisé.
- On peut un peu moins détailler la démonstration de cette question en rédigeant différemment :
  il est possible de tirer dans chacune des urnes U_i. De plus, les tirages dans cette urne peuvent fournir jusqu'à i boules blanches. Donc l'évément $[X = i]$ peut être réalisé.
- Comme l'énoncé demande de déterminer $X(\Omega)$ mais ne fournit pas sa valeur, on peut penser que la simple réponse « $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ » (sans justification) permet d'obtenir la majeure partie des points alloués à cette question. Évidemment, si la question s'exprime sous la forme : « Montrer que $X(\Omega) = \cdots$ », il faut détailler la réponse.
- Remarquons que pour la suite de l'exercice, notamment la détermination de la loi de X, l'inclusion $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ suffit.

$\square$

V.2. Déterminer la loi d'une v.a.r. discrète

Afin de déterminer la loi d'une v.a.r. discrète X, il est conseillé de procéder en deux temps :

1) déterminer $X(\Omega)$.

2) déterminer, pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}\big(\,[X = x]\,\big)$.
Pour ce faire, et conformément à la méthodologie « Calcul des probabilités », on introduit $x \in X(\omega)$ (« Soit $x \in X(\Omega)$ ») et on décompose l'événement $[X = x]$.

Exemple
On reprend l'exemple précédent. Déterminer la loi de Z.

Démonstration.

- On a déjà démontré : $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
- Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Deux cas se présentent :
  × si $k = 0$

$$\begin{array}{cl} & \text{L'événément } [Z = 0] \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \text{On a obtenu aucun Pile au cours des } n \text{ premiers lancers} \\ \Leftrightarrow & \begin{array}{ll} & \text{On a obtenu Face au } 1^{\text{er}} \text{ lancer} \\ \texttt{ET} & \text{on a obtenu Face au } 2^{\text{ème}} \text{ lancer} \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ \texttt{ET} & \text{on a obtenu Face au } n^{\text{ème}} \text{ lancer} \end{array} \\ \Leftrightarrow & F_1 \,\cap\, \ldots \,\cap\, F_n \text{ est réalisé} \end{array}$$

Ainsi : $[Z = 0] \ = \ F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n \ = \ \bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i$.

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z=0]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i\right) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(F_i) & \textit{(car les lancers sont indépendants)} \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{2} & \textit{(car la pièce est équilibrée)} \\ & = & \left(\dfrac{1}{2}\right)^n & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}(\,[Z=0]\,) \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

× si $k \in [\![1,n]\!]$

L'événement $[Z=k]$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ Au cours des n premiers lancers, le premier Pile est apparu au rang k

$\Leftrightarrow$ On a obtenu Face au 1^{er} lancer

`ET` on a obtenu Face au $2^{\text{ème}}$ lancer

$\vdots$ $\vdots$

`ET` on a obtenu Face au $(k-1)^{\text{ème}}$ lancer

`ET` on a obtenu Pile au $k^{\text{ème}}$ lancer

$\Leftrightarrow$ $F_1 \ \cap \ \ldots \ \cap \ F_{k-1} \ \cap \ P_k$ est réalisé

Ainsi : $[Z=k] \ = \ F_1 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k \ = \ \left(\bigcap\limits_{i=1}^{k-1} F_i\right) \cap P_k$.

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z=k]) & = & \mathbb{P}\left(\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k-1} F_i\right) \cap P_k\right) & \\ & = & \left(\prod\limits_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(F_i)\right) \times \mathbb{P}(P_k) & \textit{(car les lancers sont indépendants)} \\ & = & \left(\prod\limits_{i=1}^{k-1} \dfrac{1}{2}\right) \times \dfrac{1}{2} & \textit{(car la pièce est équilibrée)} \\ & = & \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{2} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(\,[Z=k]\,) \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^k}$$

□

Commentaire

- La première étape, qui consiste à déterminer $X(\Omega)$, revêt une grande importance. Elle permet déjà de comprendre si l'on a affaire à une v.a.r. finie ou non. Il n'y paraît rien mais cela permet d'éviter de nombreuses erreurs. Typiquement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$X(\Omega) \ = \ [\![1, n]\!]$$

alors on peut déjà conclure :

× $X \not\hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ (car dans ce cas on aurait $X(\Omega) = \{0, 1\}$).

× $X \not\hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ (car dans ce cas on aurait $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$).

Comme X est une v.a.r. finie (elle peut prendre seulement n valeurs différentes), on peut aussi en conclure directement :

× $X \not\hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ (car dans ce cas on aurait $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$).

× $X \not\hookrightarrow \mathcal{P}(p)$ (car dans ce cas on aurait $X(\Omega) = \mathbb{N}$).

Évidemment, lister toutes les lois que X ne suit pas, ce n'est toujours pas déterminer la loi de X. Le but de la manœuvre est simplement d'écarter de commetre une erreur grossière est d'entrer correctement dans le sujet.

- Il faut aussi comprendre que si $X(\Omega) \ = \ [\![1, n]\!]$, alors :

$$\forall k \notin [\![1, n]\!], \ \mathbb{P}\big([X = k] \big) = 0$$

Il est de ce fait important, lorsque l'on souhaite déterminer la valeur de $\mathbb{P}\big([X = k] \big)$, de bien préciser l'ensemble d'appartenance de k.

- Enfin, connaître l'ensemble image $X(\Omega)$ permet aussi d'obtenir un système complet d'événements, à savoir : $\big([X = k] \big)_{k \in [\![1, n]\!]}$. Cela permet de conclure :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([X = k] \big) \ = \ 1$$

et aussi, d'écrire la formule des probabilités totales. Plus précisément, pour tout $B \in \mathscr{A}$:

$$\mathbb{P}(B) \ = \ \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([X = k] \ \cap \ B \big)$$

V.3. Reconnaître la loi d'une v.a.r. discrète

Dans les énoncés, il est fréquent que l'on demande de « reconnaître la loi de la v.a.r. X » ou encore de « donner la loi de la v.a.r. X et rappeler son espérance ». De telles formulations signifient que la v.a.r. considérée suit une loi usuelle. Il s'agit alors de démontrer que l'expérience aléatoire exposée dans l'énoncé est une illustration de l'expérience de référence de la loi usuelle concernée. On part alors de l'exemple (expérience de l'énoncé / v.a.r. de l'énoncé) pour arriver au général (expérience de référence / v.a.r. de référence). Il est important de signaler que ce type de rédaction se déroule en deux temps :

1) description de l'expérience de référence,
(il s'agit de démontrer que l'expérience de l'énoncé entre dans le cadre de l'expérience de référence)

2) description de la v.a.r. de référence.
(il s'agit de démontrer que la v.a.r. de l'énoncé entre dans le cadre de la v.a.r. de référence)

Exemple

1. Une puce se déplace en faisant des sauts aléatoires sur un axe gradué. Initialement à l'origine, la puce se déplace à chacun de ses sauts d'une unité vers la droite avec probabilité $p \in]0,1[$, ou d'une unité vers la gauche avec probabilité $1-p$. On note Y_n le nombre de fois où elle s'est déplacée vers la droite entre le premier et le $n^{\text{ème}}$ saut (compris).
Quelle est la loi de Y_n ?

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès p (probabilité que la puce se déplace d'une unité vers la droite).
- La v.a.r. Y_n prend pour valeur le nombre de succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).}$$

Commentaire

- Remarquons tout d'abord que ce qui nous intéresse ici, ce n'est pas le déplacement à proprement parler de la puce mais uniquement le nombre de fois où celui-ci s'est fait vers la droite lors des n premiers sauts.
  En particulier, il ne s'agit pas de déterminer la position de la puce. En réalité, si on nomme X_n la position de la puce après n sauts, on peut facilement obtenir X_n à partir de Y_n (c'est généralement la question classique qui suit) :

$$X_n \ = \ Y_n - (n - Y_n) \ = \ 2\,Y_n - n$$

position de la puce = (nombre de déplacements vers la droite) − (nombre de déplacements vers la gauche)

- Insistons sur le fait que l'on n'écrit pas :

  ~~L'expérience consiste en une infinité de déplacements de la puce ...~~

  Réécrire l'énoncé ne constitue en aucun cas une démonstration. Le but de la démonstration est de démontrer que le fait qu'un déplacement vers la droite ait lieu ou non constitue une épreuve de Bernoulli.

□

2. Une urne contient des boules blanches en proportion b et vertes en proportion v. Donc $0 < b < 1$, $0 < v < 1$ et $b + v = 1$. On effectue des tirages successifs avec remise dans cette urne. On note X le numéro du tirage où la première boule verte apparaît.
Quelle est la loi de X ?

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès v (probabilité de l'obtention d'une boule verte).
- La v.a.r. X prend pour valeur le rang du premier succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X \hookrightarrow \mathcal{G}(v).}$$

□

3. Un péage comporte 10 guichets numérotés de 1 à 10. On suppose que les conducteurs arrivant au péage choisissent leur file au hasard et indépendamment des autres. On note Z le numéro du guichet choisi par le 1^{er} conducteur arrivant au péage.
Quelle est la loi de Z ?

Démonstration.

- L'expérience consiste en un choix effectué de manière équiprobable parmi 10 issues numérotées de 1 à 10.
- La v.a.r. Z prend pour valeur le numéro obtenu lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Z \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,10]\!]).}$$

□

V.4. Déterminer l'espérance / la variance d'une v.a.r. discrète

Afin de déterminer l'espérance d'une v.a.r. discrète X, on procède en deux étapes.

1) On justifie tout d'abord l'existence de l'espérance de X.
Les arguments directs permettant une telle conclusion sont les suivants :

- × X est une v.a.r. finie donc admet une espérance.
- × X est une transformée affine d'une v.a.r. qui admet une espérance donc admet une espérance.
- × X est une combinaison linéaire de v.a.r. qui admettent une espérance donc admet une espérance.
- × X est le produit $X = YZ$ des v.a.r. Y et Z qui sont **indépendantes** et qui admettent une espérance. Donc X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(YZ) = \mathbb{E}(Y)\,\mathbb{E}(Z)$.

Il reste alors à traiter le cas où la v.a.r. X n'est pas finie. On a alors $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.
On pourra penser à :

- ▸ revenir à la définition.
On démontre la convergence absolue de la série $\sum x_i \, \mathbb{P}\big([X = x_i]\big)$.
- ▸ ou utiliser le théorème de transfert si X est une transformée (non affine) d'une autre v.a.r. Y dont **on connaît déjà la loi**.
Ainsi, si $X = g(Y)$, on détermine la convergence absolue de la série $\sum y_i \, \mathbb{P}\big([Y = y_i]\big)$.

2) On calcule ensuite $\mathbb{E}(X)$ via la formule du cours ou en utilisant la linéarité de l'espérance (si X apparaît comme une transformée affine ou une combinaison linéaire).

On utilise une méthodologie similaire pour déterminer, si elle existe, la variance de X. Le calcul se fait alors à l'aide de la formule de Kœnïg-Huygens.

V.5. Vérifier : $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}\big([X = x]\big) = 1$

Lorsqu'il est demandé de vérifier : $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}\big([X = x]\big) = 1$, on attend que la démonstration soit faite par un calcul à l'aide des valeurs déterminées précédemment pour $\mathbb{P}\big([X = x]\big)$.
Il est fréquent que la formule donnant $\mathbb{P}\big([X = x]\big)$ dépende de l'ensemble d'appartenance de x. Dans ce cas, on découpera la somme de manière adéquate :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}\big([X = x]\big) \;=\; \sum_{\substack{x \,\in\, X(\Omega) \\ x \,\in\, I}} \mathbb{P}\big([X = x]\big) + \sum_{\substack{x \,\in\, X(\Omega) \\ x \,\notin\, I}} \mathbb{P}\big([X = x]\big)$$

Exemple
On reprend l'exemple précédent.
Vérifier : $\displaystyle\sum_{z\in Z(\Omega)} \mathbb{P}\big([Z=z]\big) = 1$

Démonstration.
On calcule :

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in Z(\Omega)} \mathbb{P}([Z=k]) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z=k]) \\
&= \mathbb{P}([Z=0]) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([Z=k]) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^1 \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} && \textit{(car } \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \textit{ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison } \frac{1}{2} \neq 1\textit{)} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \\
&= \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^n} + \left(1 - \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right) \;=\; 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k\in Z(\Omega)} \mathbb{P}([Z=k]) \;=\; 1}$$

□

Informations concernant cette semaine de colles

Exercices types

Il n'y a pas d'exercices types cette semaine. Il y aura :

- des exercices de probabilité (qui traitent d'événements ou de v.a.r.) qui mettent en œuvre la méthodologie précédente.
- des exercices de dénombrement.

Les compétences attendues cette semaine sur le chapitre des v.a.r. discrètes sont les suivantes :

- savoir déterminer l'ensemble image d'une v.a.r. (savoir en déduire si la v.a.r. étudiée est discrète).
- savoir déterminer la loi d'une transformée d'une v.a.r. .
- savoir calculer l'espérance d'une v.a.r. discrète (ne pas oublier la rédaction de l'existence).
- savoir calculer la variance d'une v.a.r. discrète (ne pas oublier la rédaction de l'existence).
  En particulier, savoir utiliser la formule de Kœnig-Huygens pour déterminer le moment d'ordre 2 de v.a.r. qui suivent une loi usuelle.
- connaître les caractéristiques des lois usuelles.
- savoir reconnaître une loi usuelle et connaître la rédaction associée (***1)*** description de l'expérience, ***2*** description de la v.a.r. ***3)*** conclusion).