

Colles

semaine 11 : 22 novembre - 27 novembre

I. Notion d'application linéaire

I.1. Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels.

- Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **linéaire** si :

$$\forall (x, y) \in E^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

(l'image d'une somme est la somme des images)

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E^2, f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$$

(l'image d'une multiplication par un scalaire est la multiplication scalaire de l'image)

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.
- Lorsque $E = F$, on notera simplement $\mathcal{L}(E)$.
Une application linéaire de E dans E est appelée **endomorphisme** de E .
- **Caractérisation des applications linéaires.**

L'application $f : E \rightarrow F$ est linéaire

$$\Leftrightarrow \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in E^2, f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y)$$

$$\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E^2, f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y)$$

(cette caractérisation est à éviter car elle introduit une dissymétrie de traitement des vecteurs x et y et masque la notion de CL)

I.2. Propriétés

Soient E et F deux espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire.

1) $f(0_E) = 0_F$

2) $\forall x \in E, f(-x) = -f(x)$

3) $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n,$

$$f(\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n \cdot x_n) = \lambda_1 \cdot f(x_1) + \dots + \lambda_n \cdot f(x_n)$$

(l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images)

I.3. Exemple fondamental

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Soit $h \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$.

Alors, il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que h s'écrit sous la forme :

$$h : \begin{array}{l} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X \mapsto MX \end{array}$$

Démonstration.

Notons $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $E = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Notons $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ la base canonique de $F = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Le vecteur X se décompose de manière unique sur \mathcal{B}_E .
Autrement dit, il existe un unique p -uplet (x_1, \dots, x_p) tel que :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_p \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_p \cdot e_p$$

Par application de la fonction h , linéaire, on obtient :

$$h(X) = x_1 \cdot h(e_1) + \dots + x_p \cdot h(e_p)$$

Cette écriture met en avant une propriété des applications linéaires sur les ev de dimension finie : les valeurs $h(e_1), \dots, h(e_p)$ permettent de déterminer la valeur de $h(X)$.

Ainsi, f est entièrement déterminée par l'image de la base \mathcal{B}_E .

- Notons alors :

$$h(e_1) = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{n1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \dots \quad h(e_p) = \begin{pmatrix} m_{1p} \\ m_{2p} \\ \vdots \\ m_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

- Alors :

$$h(X) = \begin{pmatrix} m_{11} x_1 + \dots + m_{1p} x_p \\ m_{21} x_1 + \dots + m_{2p} x_p \\ \vdots \\ m_{n1} x_1 + \dots + m_{np} x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1p} \\ m_{21} & \dots & m_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = MX$$

où $M = (m_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}}$

□

II. Structure de l'ensemble des applications linéaires

II.1. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$

Soient E et F des espaces vectoriels.

- L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F est muni :

× d'une loi de composition interne, notée $+$

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$, pour tout $v \in \mathcal{L}(E, F)$, $u + v$ est l'application linéaire de E dans F définie par :

$$\begin{aligned} u + v : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto u(x) + v(x) \end{aligned}$$

× d'une loi de composition externe, notée \cdot

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot u$ est l'application linéaire de E dans F définie par :

$$\begin{aligned} \lambda \cdot u : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto \lambda \cdot u(x) \end{aligned}$$

- L'espace $\mathcal{L}(E, F)$ muni de $+$ et \cdot est un espace vectoriel.

II.2. Composition d'applications linéaires

a) Propriétés de la loi \circ

Soient E, F, G et H des espaces vectoriels.

$$1) \forall u \in \mathcal{L}(E), u \circ \text{id}_E = \text{id}_E \circ u = u.$$

Par ailleurs, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on introduit la notation :

$$\begin{cases} u^0 = \text{id}_E \\ \forall k \in \mathbb{N}, u^{k+1} = u^k \circ u (= u \circ u^k) \end{cases}$$

(La notation $u^2(x) = u(u(x))$ ne doit pas être confondue avec l'élevation au carré ! $u(x) \times u(x)$ n'a pas de sens dans le cadre d'espaces vectoriels)

$$2) \forall u \in \mathcal{L}(E, F), \forall v \in \mathcal{L}(F, G), v \circ u \in \mathcal{L}(E, G).$$

$$3) \forall u \in \mathcal{L}(E, F), \forall v \in \mathcal{L}(F, G), \forall w \in \mathcal{L}(G, H), w \circ (v \circ u) = (w \circ v) \circ u.$$

(associativité de la loi \circ)

b) Comportement de la loi \circ vis à vis des lois $+$ et \cdot

Soient E, F, G des espaces vectoriels.

$$1) \forall u \in \mathcal{L}(E, F), \forall (v_1, v_2) \in (\mathcal{L}(F, G))^2, (v_1 + v_2) \circ u = v_1 \circ u + v_2 \circ u.$$

(distributivité à droite de la loi \circ par rapport à la loi $+$)

$$2) \forall (u_1, u_2) \in (\mathcal{L}(E, F))^2, \forall v \in \mathcal{L}(F, G), v \circ (u_1 + u_2) = v \circ u_1 + v \circ u_2.$$

(distributivité à gauche de la loi \circ par rapport à la loi $+$)

$$3) \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathcal{L}(E, F), \forall v \in \mathcal{L}(F, G), v \circ (\lambda \cdot u) = (\lambda \cdot v) \circ u = \lambda \cdot (v \circ u).$$

II.3. Notion d'isomorphisme, d'automorphisme

a) Définition

Soient E et F des espaces vectoriels.

- Une application $u : E \rightarrow F$ est un **isomorphisme de E dans F** si :

(i) $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

(ii) u est bijective.

S'il existe un isomorphisme de E dans F , on dit que E et F sont isomorphes.

- Une application $u : E \rightarrow E$ est un **automorphisme de E dans F** si :

(i) $u \in \mathcal{L}(E)$ (autrement dit, u est un endomorphisme de E).

(ii) u est bijective.

b) Notion d'application réciproque : rappels de première année

Soient E et F des ensembles (pas nécessairement des ev).

Soit $f : E \rightarrow F$ une application (pas nécessairement linéaire).

On suppose que f est bijective.

- On appelle **application réciproque de f** et on note $f^{-1} : F \rightarrow E$:

$$\begin{aligned} f^{-1} : F &\rightarrow E \\ y &\mapsto f^{-1}(y) : \text{l'unique antécédent de } y \text{ par l'application } f \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall x \in E, \forall y \in F, \quad \boxed{y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x}$

- Si $f : E \rightarrow F$ une application bijective, les propriétés suivantes sont vérifiées.

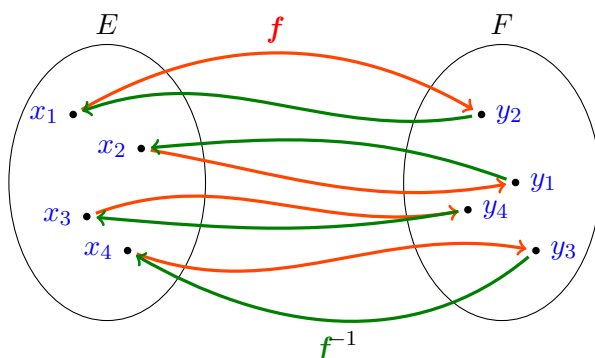
1. L'application f^{-1} est bijective et de réciproque f : $\boxed{(f^{-1})^{-1} = f}$

2. a) $\boxed{\forall y \in F, f(f^{-1}(y)) = y}$ b) $\boxed{\forall x \in E, f^{-1}(f(x)) = x}$

3. Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ sont deux applications, alors :

$$\left. \begin{aligned} g \circ f &= \text{id}_E \\ f \circ g &= \text{id}_F \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} &\text{Les applications } f \text{ et } g \text{ sont bijectives et} \\ &\text{réciproques l'une de l'autre :} \\ &g = f^{-1} \text{ et } f = g^{-1} \end{aligned}$$

Représentation graphique.



- Une application $f : E \rightarrow F$ bijective établit une correspondance un à un entre des éléments de E vers les éléments de F .
- Son application réciproque f^{-1} établit la même correspondance mais dans l'autre sens : des éléments de F vers les éléments de E .

c) Application réciproque d'un isomorphisme

Soient E et F des espaces vectoriels.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que u est bijective.

(ainsi u est un isomorphisme de E dans F)

Alors l'application réciproque u^{-1} est un isomorphisme de F dans E .

(en particulier, $u^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$)

Démonstration.

- L'application $u^{-1} : F \rightarrow E$ est bijective en tant que réciproque de l'application $u : E \rightarrow F$ qui est elle-même bijective.

- Il reste à démontrer que $u^{-1} : F \rightarrow E$ est linéaire.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(y_1, y_2) \in F^2$.

L'application u étant surjective :

× il existe $x_1 \in E$ tel que : $y_1 = u(x_1)$. Ce qu'on peut aussi écrire : $x_1 = u^{-1}(y_1)$.

× il existe $x_2 \in E$ tel que : $y_2 = u(x_2)$. Ce qu'on peut aussi écrire : $x_2 = u^{-1}(y_2)$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} u^{-1}(\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2) &= u^{-1}(\lambda_1 \cdot u(x_1) + \lambda_2 \cdot u(x_2)) \\ &= u^{-1}(u(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2)) \\ &= \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \\ &= \lambda_1 \cdot u^{-1}(y_1) + \lambda_2 \cdot u^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

Ainsi, $u^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$. □

Soient E et F des espaces vectoriels.

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$.

Supposons que u et v sont des isomorphismes.

- 1) Alors $v \circ u : E \rightarrow E$ est un automorphisme de E .

(on a notamment $v \circ u \in \mathcal{L}(E)$)

- 2) La réciproque de $v \circ u$ est donnée par : $(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}$

Démonstration.

- L'application $v \circ u$ est linéaire ($v \circ u \in \mathcal{L}(E)$) en tant que composée de deux applications linéaires.

- Il reste à démontrer que $v \circ u$ est bijective.

Démontrons que $f = v \circ u : E \rightarrow E$ admet pour réciproque $g = u^{-1} \circ v^{-1} : E \rightarrow E$.

$$\begin{aligned} g \circ f &= (u^{-1} \circ v^{-1}) \circ (v \circ u) & f \circ g &= (v \circ u) \circ (u^{-1} \circ v^{-1}) \\ &= u^{-1} \circ (v^{-1} \circ v) \circ u & &= v \circ (u \circ u^{-1}) \circ v^{-1} \\ &= u^{-1} \circ \text{id}_F \circ u & &= v \circ \text{id}_F \circ v^{-1} \\ &= u^{-1} \circ u & &= v \circ v^{-1} \\ &= \text{id}_E & &= \text{id}_E \end{aligned}$$

Ainsi f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre. □

III. Noyau et image d'une application linéaire

III.1. Noyau d'une application linéaire

a) Définition

Soient E et F des espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- On appelle **noyau de f** et on note $\text{Ker}(f)$ le sous-ensemble de E défini par :

$$\text{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$$

- En particulier, on retiendra, pour tout $x \in E$: $x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x) = 0_F$

Exercice

Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Démontrer : $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$.

b) Structure du noyau d'une application linéaire

Soient E et F des espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration.

1) $\text{Ker}(f) \subseteq E$ par définition.

2) $\text{Ker}(f) \neq \emptyset$ car $0_E \in \text{Ker}(f)$. En effet : $f(0_E) = 0_F$.

3) Stabilité de $\text{Ker}(f)$ par combinaisons linéaires

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(x_1, x_2) \in (\text{Ker}(f))^2$.

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) &= \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) && (\text{par linéarité de } f) \\ &= \lambda_1 \cdot 0_F + \lambda_2 \cdot 0_F && (\text{car } (x_1, x_2) \in (\text{Ker}(f))^2) \\ &= 0_F \end{aligned}$$

Ainsi : $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \in \text{Ker}(f)$. □

c) Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide de son noyau

Soient E et F des espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0_E\}$$

Démonstration.

(\Rightarrow) Supposons f injective. Démontrons : $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

(\supset) Comme f linéaire, $f(0_E) = 0_F$. Ce qui démontre : $\text{Ker}(f) \supset \{0_E\}$.

(\subset) Soit $x \in \text{Ker}(f)$. Ainsi : $f(x) = 0_F = f(0_E)$.

L'application f étant injective, $x = 0_E$. Ce qui démontre : $x \in \{0_E\}$.

(\Leftarrow) Supposons que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$. Démontrons que f est injective.

Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$.

On a alors : $f(x) - f(y) = 0_F$, ce qui s'écrit : $f(x - y) = 0_F$.

Ainsi, $x - y \in \text{Ker}(f) = \{0_E\}$, d'où $x - y = 0_E$ et $x = y$. □

III.2. Image d'une application linéaire

a) Définition

Soient E et F des espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle **image de f** et on note $\text{Im}(f)$ le sous-ensemble de F défini par :

$$\begin{aligned}\text{Im}(f) &= \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\} \\ &= \{f(x) \in F \mid x \in E\} \\ &= \{f(\text{truc}) \in F \mid \text{truc} \in E\}\end{aligned}$$

À RETENIR

Démontrer qu'un vecteur $y \in F$ est dans l'image de f , c'est l'écrire sous la forme :

$$y = f(\dots)$$

Exercice

Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Démontrer : $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.

Démonstration.

Soit $y \in \text{Im}(f^2)$.

Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f^2(x) = f(f(x))$. Ainsi, $y \in \text{Im}(f)$. □

b) Structure de l'image d'une application linéaire

Soient E et F des espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .

Démonstration.

1) $\text{Im}(f) \subseteq F$ par définition.

2) $\text{Im}(f) \neq \emptyset$ car $0_F \in \text{Im}(f)$. En effet : $0_F = f(0_E)$.

3) Stabilité de $\text{Im}(f)$ par combinaisons linéaires

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(y_1, y_2) \in (\text{Im}(f))^2$.

Ainsi, il existe $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que : $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.

$$\begin{aligned}\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 &= \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) \\ &= f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) \quad (\text{par linéarité de } f)\end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 \in \text{Im}(f)$. □

c) Caractérisation de la surjectivité d'une application

Soient E et F des espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow \text{Im}(f) = F$$

IV. Représentation matricielle de vecteurs et d'applications linéaires

IV.1. Matrice colonne associée à un vecteur

a) Définition

Soit E un espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

- Soit $x \in E$. Il existe un unique p -uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que :

$$x = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_p \cdot e_p$$

La base \mathcal{B}_E étant fixée, le vecteur x est entièrement déterminé par la donnée du p -uplet (x_1, \dots, x_p) , que l'on nomme **coordonnées de x dans la base \mathcal{B}_E** .

- On appelle **vecteur (ou matrice) colonne associé à x dans la base \mathcal{B}_E** et on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ le vecteur contenant les coordonnées de x dans la base \mathcal{B}_E . Autrement dit :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

b) Isomorphisme de représentation

Soit E un espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

Alors l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : E &\rightarrow \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \\ x &\mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de E dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Remarque

- Ce théorème stipule que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\cdot)$ est un isomorphisme. En particulier, c'est une application linéaire. Ainsi :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in E^2, \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) + \mu \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(y)$$

- Une fois les base \mathcal{B}_E fixée, ce théorème signifie que :
 - × tout vecteur x possède une unique représentation matricielle dans la base \mathcal{B}_E .
(cela signifie simplement que φ est une application)
 - × réciproquement, toute matrice colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est la représentation matricielle d'un unique vecteur de E .
(c'est le caractère bijectif)
- Évidemment, si \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 sont deux bases différentes de E , on obtient généralement des représentations matricielles $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(x)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(x)$ différentes pour x .

c) Matrice de passage

Soit E un espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ deux bases de E .

- On appelle **matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}'** et on note $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$, la matrice :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \left(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1) \ \dots \ \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_p) \right)$$

Autrement dit, la matrice obtenue par concaténation des vecteurs colonnes associés à e'_j dans la base \mathcal{B} .

Soit E un espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons \mathcal{B} , \mathcal{B}' et \mathcal{B}'' trois bases de E .

Soit $x \in E$. On note $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$.

1. $X = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} X'$ ou encore $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$

2. $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}$

3. La matrice $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ est inversible et : $(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$

IV.2. Matrice associée à une application linéaire

a) Définition

Soit E et F des espaces vectoriels.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

On note $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

On suppose que F est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F .

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- On appelle **matrice de f relativement aux bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F** la matrice :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = \left(\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_1)) \ \dots \ \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_p)) \right)$$

Autrement dit, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ obtenue par concaténation des vecteurs colonnes associés à $f(e_j)$ dans la base \mathcal{B}_F .

À RETENIR

Pour déterminer la matrice associée à une application linéaire f dans les bases $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ et \mathcal{B}_F :

- × on calcule l'image par f de chaque vecteur e_j de la base \mathcal{B}_E .
- × on exprime les vecteurs $f(e_j)$ obtenus dans la base \mathcal{B}_F .

b) Isomorphisme de représentation

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie.

On note \mathcal{B}_E une base de E et \mathcal{B}_F une base de F .

1) Les applications :

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f) \end{cases}$$

sont des isomorphismes.

2) En particulier, on a :

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = np \quad \text{et} \quad \dim(\mathcal{L}(E)) = n^2$$

Remarque

- Ce théorème stipule que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\cdot)$ est un isomorphisme. En particulier, c'est une application linéaire. Ainsi :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in (\mathcal{L}(E, F))^2, \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\lambda \cdot f + \mu \cdot g) = \lambda \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) + \mu \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(g)$$

- Une fois les bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F fixées, ce théorème signifie que :
 - × toute application linéaire f possède une unique représentation matricielle relativement aux bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F .
(cela signifie simplement que φ est une application)
 - × réciproquement, toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la représentation matricielle relativement aux bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F d'une unique application linéaire φ .
(c'est le caractère bijectif)
- On a déjà vu, en début de chapitre, que toute application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ s'écrit sous forme matricielle. Lorsque E et F sont de dimensions finies, on se ramène à ce cas à l'aide des isomorphismes de représentations. On pourra retenir le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\cdot) \downarrow & & \downarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\cdot) \\ \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \end{array}$$

et le slogan : « à isomorphisme près, une application linéaire n'est autre qu'une matrice ».

IV.3. Lien entre opérations sur les applications linéaires et opérations sur les matrices associées

a) Noyau d'une application linéaire via la matrice associée

Soient E et F des espaces vectoriels de dimensions finies.

On note \mathcal{B}_E une base de E et \mathcal{B}_F une base de F .

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soient $x \in E$ et $y \in F$.

$$1. \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$$

$$2. \quad y = f(x) \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(y) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$$

$$3. \quad \text{En particulier : } x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) = \mathbf{0}_F$$

Démonstration.

1. • Soit $x \in E$. On note (x_1, \dots, x_p) les coordonnées de x dans la base \mathcal{B} .

$$\begin{aligned} \text{Alors } x &= x_1 \cdot e_1 + \dots + x_p \cdot e_p \\ \text{et } f(x) &= x_1 \cdot f(e_1) + \dots + x_p \cdot f(e_p) \end{aligned}$$

Les coordonnées de x étant connues, le vecteur $f(x)$ est entièrement déterminé par l'image de la base (e_1, \dots, e_p) par la fonction f .

- Comme \mathcal{B}_F est une base de F , pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, le vecteur $f(e_j)$ se décompose de manière unique sur cette base.

On note comme suit les décompositions obtenues :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11} \cdot f_1 + \dots + a_{n1} \cdot f_n \\ &\vdots \\ f(e_p) &= a_{1p} \cdot f_1 + \dots + a_{np} \cdot f_n \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1 \cdot (a_{11} \cdot f_1 + \dots + a_{n1} \cdot f_n) \\ &+ \dots \\ &+ x_p \cdot (a_{1p} \cdot f_1 + \dots + a_{np} \cdot f_n) \\ &= (a_{11} x_1 + \dots + a_{1p} x_p) \cdot f_1 \\ &+ \dots \\ &+ (a_{n1} x_1 + \dots + a_{np} x_p) \cdot f_n \end{aligned}$$

- Alors :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x)) &= \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + \dots + a_{1p} x_p \\ a_{21} x_1 + \dots + a_{2p} x_p \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{np} x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) \quad \square \end{aligned}$$

b) Composée d'applications linéaires et produit matriciel

Soient E , F , et G des vectoriels de dimensions finies.

On note \mathcal{B}_E , \mathcal{B}_F et \mathcal{B}_G des bases respectives de E , F , et G .

1) Pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$$

(la composition des applications linéaires correspond à la multiplication des matrices associées)

2) Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f^k) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f))^k$$

(où l'on a noté $f^k = f \circ \dots \circ f$)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

On note \mathcal{B} une base de E .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .

1) f est bijective $\Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible

2) Si f est bijective alors : $(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$

MÉTHODO

- Considérons un endomorphisme f et notons A sa représentation matricielle dans une base. Pour savoir si f est bijectif, il suffit de vérifier si A est inversible.
- On pourra notamment penser à appliquer l'algorithme du pivot de Gauss pour déterminer si A est inversible.

IV.4. Lien entre le rang d'une application linéaire et le rang de la matrice associée

Soient E et F des espaces vectoriels de dimensions finies.

On note \mathcal{B}_E une base de E et \mathcal{B}_F base de F .

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f))$$

MÉTHODO

Considérons un endomorphisme f et notons A sa représentation matricielle dans une base. Pour déterminer le rang de f , on détermine le rang de A .

V. Applications linéaires en dimension finie

V.1. Image d'une application linéaire en dimension finie

Soient E et F des espaces vectoriels.

On suppose que E est de dimension finie p et on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors $\text{Im}(f)$ est le sous-espace vectoriel de F engendré par la famille $(f(e_1), \dots, f(e_p))$.

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p))$$

Démonstration.

(\subset) Soit $y \in \text{Im}(f)$.

Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Le vecteur x se décompose de manière unique sur \mathcal{B} . Autrement dit, il existe un unique p -uplet (x_1, \dots, x_p) tel que :

$$x = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_p \cdot e_p$$

Ainsi, par linéarité de f :

$$y = f(x) = x_1 \cdot f(e_1) + \dots + x_p \cdot f(e_p)$$

Ainsi, $y \in \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p))$.

(\supset) Soit $y \in \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p))$. Il existe alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que :

$$y = \lambda_1 \cdot f(e_1) + \dots + \lambda_p \cdot f(e_p) = f(\lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_p \cdot e_p)$$

Ainsi, $y \in \text{Im}(f)$. □

V.2. Une première caractérisation de l'injectivité / surjectivité / bijectivité en dimension finie

Soient E et F des espaces vectoriels.

On suppose que E est de dimension finie.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Tout d'abord :

f est injective
 \Leftrightarrow L'image par f de toute famille libre (finie) de E est une famille libre (finie) de F .

f est surjective
 \Leftrightarrow L'image par f de toute famille génératrice (finie) de E est une famille génératrice (finie) de F .

f est bijective
 \Leftrightarrow L'image par f de toute base (finie) de E est une base (finie) de F .

- Ainsi, s'il existe un isomorphisme de E vers F alors $\dim(E) = \dim(F)$.

V.3. Rang d'une application linéaire

a) Définition

Soit E et F des espaces vectoriels.

On suppose que E est **de dimension finie**.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle rang de l'application f et on note $\text{rg}(f)$:

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$$

b) Théorème du rang

Soit E et F des espaces vectoriels.

On suppose que E est **de dimension finie**.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\begin{aligned} \dim(E) &= \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) \\ &= \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f) \end{aligned}$$

c) Caractérisation de l'injectivité / surjectivité / bijectivité en dimension finie

Soit E et F des espaces vectoriels.

On suppose que E et F sont de **de dimensions finies**.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors :

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim(E)$$

$$f \text{ est surjective} \Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim(F)$$

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie.

On suppose que $\dim(E) = \dim(F)$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors :

$$f \text{ est bijective} \Leftrightarrow f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective}$$

ou encore :

$$f \text{ est bijective} \Leftrightarrow \ker(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim(F)$$

Illustration des méthodes du chapitre sur un exemple

Exercice

On considère l'application φ définie par :

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto (X^2 + 1) P' - 2(X + 1) P\end{aligned}$$

On note $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Commentaire

Dans les exercices, la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est parfois directement notée $(1, X, X^2)$. C'est une source fréquente d'erreurs et confusions. Il est donc **fortement recommandée** d'introduire la base canonique sous la forme (P_0, P_1, P_2) (si la notation P_i n'est pas utilisée dans l'énoncé).

1. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Démonstration.

- Démontrons que φ est linéaire

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$.

$$\begin{aligned}& \left(\varphi(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q) \right)(X) \\ &= (X^2 + 1) (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)'(X) - 2(X + 1) (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(X) \\ &= (X^2 + 1) (\lambda \cdot P' + \mu \cdot Q')(X) - 2(X + 1) (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(X) && \text{(par linéarité de} \\ & && \text{l'application dérivée)} \\ &= (X^2 + 1) (\lambda \cdot P'(X) + \mu \cdot Q'(X)) - 2(X + 1) (\lambda \cdot P(X) + \mu \cdot Q(X)) \\ &= \lambda \cdot (X^2 + 1) P'(X) + \mu \cdot (X^2 + 1) Q'(X) - 2\lambda \cdot (X + 1) P(X) - 2\mu \cdot (X + 1) Q(X) \\ &= \lambda \cdot \left((X^2 + 1) P'(X) - 2 \cdot (X + 1) P(X) \right) + \mu \cdot \left((X^2 + 1) Q'(X) - 2 \cdot (X + 1) Q(X) \right) \\ &= \lambda \cdot \left(\varphi(P) \right)(X) + \mu \cdot \left(\varphi(Q) \right)(X) \\ &= \left(\lambda \cdot \varphi(P) + \mu \cdot \varphi(Q) \right)(X)\end{aligned}$$

L'application φ est donc linéaire.

- Démontrons que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

- Comme $\deg(P) \leq 2$, alors :
 - × $\deg(P') \leq 1$ donc $\deg((X^2 + 1) P') \leq 3$.
 - × $\deg(-2(X + 1) P) \leq 3$.
- On en déduit : $\deg((X^2 + 1) P' - 2(X + 1) P) \leq 3$.

Commentaire

- Rappelons tout d'abord les propriétés à connaître concernant le degré des polynômes.

Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ alors :

$$\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$$

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$$

- L'argument de degré déroulé dans la démonstration ci-dessus permet généralement de conclure que $\varphi(P)$ est un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$. Ce n'est malheureusement pas le cas ici et il faut donc faire une étude plus précise (*cf* ci-dessous).

- Comme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$.
Notons $R = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1$. On a alors $P = R + a_2 \cdot P_2$ et par linéarité de φ :

$$\varphi(R + a_2 \cdot P_2) = \varphi(R) + a_2 \cdot \varphi(P_2)$$

En utilisant la méthodologie précédente, on démontre : $\deg(\varphi(R)) \leq 2$.
Il reste alors à déterminer $\deg(\varphi(P_2))$. Or :

$$\begin{aligned} (\varphi(P_2))(X) &= (X^2 + 1) P_2'(X) - 2(X + 1) P_2(X) \\ &= 2X(X^2 + 1) - 2(X + 1) X^2 \\ &= 2X^3 + 2X - 2X^3 - 2X^2 = 2X - 2X^2 \end{aligned}$$

Ainsi, $\deg(\varphi(P_2)) = 2$ et d'après ce qui précède : $\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

L'application φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

□

2. Déterminer A , la matrice représentative de φ dans la base \mathcal{B} .

Démonstration.

$$\begin{aligned} \bullet \quad (\varphi(P_0))(X) &= (X^2 + 1) P_0'(X) - 2(X + 1) P_0(X) \\ &= -2(X + 1) = -2X - 2 \quad (\text{car } P_0'(X) = 0) \end{aligned}$$

Ainsi : $\varphi(P_0) = -2 \cdot P_0 - 2 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$. On en conclut : $\text{Mat}_{(P_0, P_1, P_2)}(\varphi(P_0)) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad (\varphi(P_1))(X) &= (X^2 + 1) P_1'(X) - 2(X + 1) P_1(X) \\ &= (X^2 + 1) - 2(X + 1) X = -X^2 + 1 - 2X \quad (\text{car } P_1'(X) = 1) \end{aligned}$$

Ainsi : $\varphi(P_1) = 1 \cdot P_0 - 2 \cdot P_1 - 1 \cdot P_2$. On en conclut : $\text{Mat}_{(P_0, P_1, P_2)}(\varphi(P_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad (\varphi(P_2))(X) &= (X^2 + 1) P_2'(X) - 2(X + 1) P_2(X) \\ &= 2X(X^2 + 1) - 2(X + 1) X^2 = 2X - 2X^2 \quad (\text{le calcul a déjà été effectué au-dessus}) \end{aligned}$$

Ainsi : $\varphi(P_2) = 0 \cdot P_0 + 2 \cdot P_1 - 2 \cdot P_2$. On en conclut : $\text{Mat}_{(P_0, P_1, P_2)}(\varphi(P_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On en conclut : $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

□

3. On note : $E_{-2}(f) = \text{Ker}(f + 2\text{id})$ où id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_2[X]$.
Déterminer une base de $E_{-2}(f)$.

Démonstration.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

- Il existe donc $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$.

Notons alors $U = \text{Mat}_{(P_0, P_1, P_2)}(P) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

- On a alors :

$$\begin{aligned}
 P \in \text{Ker}(f + 2\text{id}) &\iff (f + 2\text{id})(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\
 &\iff (A + 2I)U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} a_1 & = 0 \\ -2a_0 & + a_1 + 2a_2 = 0 \\ -a_1 & = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{cases} -2a_0 & + 2a_2 = 0 \\ a_1 & = 0 \\ -a_1 & = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} -2a_0 & + 2a_2 = 0 \\ a_1 & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -2a_0 & = -2a_2 \\ a_1 & = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
 E_{-2}(f) &= \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid (f + 2\text{id})(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}\} \\
 &= \{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \in \mathbb{R}_2[X] \mid a_0 = a_2 \text{ et } a_1 = 0\} \\
 &= \{a_2 \cdot P_0 + a_2 \cdot P_2 \mid a_2 \in \mathbb{R}\} = \{a_2 \cdot (P_0 + P_2) \mid a_2 \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(P_0 + P_2)
 \end{aligned}$$

$$E_{-2}(f) = \text{Vect}(P_0 + P_2)$$

Commentaire

Il faut faire attention aux objets manipulés. On doit déterminer $\text{Ker}(f + 2\text{id})$, noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. On doit donc obtenir un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$. Si P et $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P)$ sont deux représentations différentes du même polynôme P , cela n'autorise pas pour autant à écrire l'égalité entre ces deux éléments :

$$\underbrace{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2}_{\in \mathbb{R}_2[X]} \not\equiv \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \underbrace{\text{Vect}(P_0 + P_2)}_{E_{-2}(f)} \not\equiv \underbrace{\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{E_{-2}(A)} \quad \square$$

4. a) Déterminer le rang de l'application φ .

Démonstration.

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(\varphi) &= \operatorname{rg}(A) \\ &= \operatorname{rg} \left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \right) \\ &\stackrel{L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1}{=} \operatorname{rg} \left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \right) \\ &\stackrel{L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1}{=} \operatorname{rg} \left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \right) = 3 \end{aligned}$$

En effet, la réduite obtenue est inversible car triangulaire (supérieure) et de coefficients diagonaux tous non nuls. Elle est donc de rang 3.

$$\boxed{\operatorname{rg}(\varphi) = 3}$$

□

b) L'application φ est-elle un automorphisme ?

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$$

Comme de plus : $\operatorname{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}_2[X]$, on en déduit : $\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{R}_2[X]$.

L'application φ est donc surjective.

- De plus, φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, espace vectoriel de **dimension finie**.

Ainsi, φ est bijective. Cette application est bien un automorphisme.

□

Commentaire

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, il est à noter que l'équivalence :

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}$$

n'est vérifiée que si E et F sont de **même dimension finie**. En particulier, cette propriété est vérifiée pour tous les endomorphismes d'un espace vectoriel E **de dimension finie**.

- Cet exercice est une bonne illustration de l'esprit de ce chapitre. Lorsque l'on travaille sur un espace vectoriel E de dimension finie, un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ n'est autre, à **isomorphisme près**, qu'une application matricielle. Ce sont les isomorphismes de représentation qui permettent de faire la **passerelle** (dans les corrigés de l'EDHEC, on trouvera le terme *passerelle endomorphisme - matrice*) entre ces deux mondes. Si E est un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, on pourra le plonger, via l'isomorphisme de représentation, dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Cela ne signifie en aucun cas l'égalité entre E et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ mais simplement qu'il y a une correspondance 1 à 1 (une bijection) entre les objets de ces deux espaces vectoriels. La manipulation matricielle étant plus aisée que la manipulation de vecteurs de E , on préfère opérer dans le monde matriciel. Les résultats obtenus sont alors de nouveau transporter dans le monde de l'espace vectoriel E par la *passerelle matrice - endomorphisme*.

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

Les questions de cours pour cette semaine sont les suivantes :

- La réciproque d'un isomorphisme $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme $u^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.
Énoncé et démonstration.
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, les ensembles $\text{Ker}(f)$ ($\subset E$) et $\text{Im}(f)$ ($\subset F$) sont des espaces vectoriels.
Énoncé et démonstration.
(le colleur choisira l'un de ces deux résultats au choix)
- Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire. Énoncé et démonstration.
- Image d'une application linéaire en dimension finie. Énoncé et démonstration.

Exercices types

Les compétences attendues cette semaine sur ce chapitre sont les suivantes :

- savoir démontrer qu'une application $f : E \rightarrow F$ est linéaire (on n'oubliera pas de démontrer que l'application f est à valeurs dans F).
- savoir démontrer qu'une application $f : E \rightarrow E$ est un endomorphisme (on n'oubliera pas de démontrer que l'application f est à valeurs dans E).
- savoir déterminer le noyau d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si E est de dimension finie, savoir déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
En déduire la dimension de $\text{Ker}(f)$.
- savoir déterminer l'image d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ (notamment si E est de dimension finie).
Si E est de dimension finie, savoir déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
En déduire la dimension de $\text{Im}(f)$.
- savoir déterminer la dimension de $\text{Ker}(f)$ (resp. $\text{Im}(f)$) par application du théorème du rang (si E est de dimension finie!) en connaissant la dimension de $\text{Im}(f)$ (resp. $\text{Ker}(f)$).
- savoir démontrer qu'une application $f : E \rightarrow F$ est un isomorphisme / automorphisme dans le cas où E et F sont deux espaces vectoriels de même dimension.
- savoir appliquer les schémas de démonstration (démontrer une implication, une équivalence, une inclusion d'ensembles, une égalité d'ensembles ...).
 \hookrightarrow la plupart des exercices théoriques de ce chapitre ne sont que des mises en place de ces schémas de démonstration. Ainsi, rien ne peut légitimer ne pas savoir commencer une démonstration d'un exercice théorique.
Typiquement, si $f \in \mathcal{L}(E)$, savoir démontrer : $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.
- savoir déterminer la matrice colonne associée à un vecteur $x \in E$ dans une base \mathcal{B} de E .
- savoir déterminer la matrice de passage d'une base \mathcal{B} à une base \mathcal{B}' et connaître / savoir appliquer la formule de changement de base (« $X = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} X'$ »).
- savoir déterminer la matrice A représentative d'une application $f \in \mathcal{L}(E, F)$ dans des bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F . Il faut alors savoir déduire des propriétés de A celles de f .
($\text{rg}(f) = \text{rg}(A)$ et f bijective $\Leftrightarrow A$ inversible)
- savoir déterminer le rang d'une matrice par application du pivot de Gauss.

L'esprit du chapitre est que si E et F sont des espaces vectoriels de dimensions finies, une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ n'est, **à isomorphisme près**, qu'une application matricielle. Il est essentiel de savoir distinguer ces deux mondes (par exemple, si $E = \mathbb{R}_2[X]$, alors $E \not\cong \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) tout en sachant utiliser les passerelles permettant le passage de l'un à l'autre. Il faut particulièrement veiller à ne pas commettre de confusions d'objets (elles seront lourdement sanctionnées).