# Colles

semaine 12 : 29 novembre - 04 décembre

## I. Notion de couple de v.a.r.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soient $X$ et $Y$ deux v.a.r. discrètes.

- On appelle couple de v.a.r. $(X, Y)$ l'application définie par :

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

## II. Loi d'un couple de v.a.r. discrètes, ou loi conjointe

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(X, Y)$ un couple de v.a.r. discrètes.

- On appelle **loi de probabilité du couple** $(X, Y)$ ou **loi conjointe des v.a.r.** $X$ **et** $Y$ et on note $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ l'application :

$$\boxed{\begin{array}{cccccccc} \mathbb{P}_{(X,Y)} & : & X(\Omega) & \times & Y(\Omega) & \to & \mathbb{R} & \\ & & (x & , & y) & \mapsto & \mathbb{P}_{(X,Y)}(x,y) & = \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \end{array}}$$

- Autrement dit, la loi du couple $(X, Y)$ est la donnée de l'ensemble des valeurs $\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ pour $x$ parcourant $X(\Omega)$ et $y$ parcourant $Y(\Omega)$.

*(dans la littérature, on pourra trouver la notation* $[(X, Y) = (x, y)]$ *ou* $[X = x, Y = y]$ *en lieu et place de* $[X = x] \cap [Y = y]$*)*

`MÉTHODO` **Déterminer la loi d'un couple** $(X, Y)$

Afin de déterminer la loi du couple $(X, Y)$, on commence `TOUJOURS` par déterminer les ensembles image $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ des v.a.r. $X$ et $Y$.

# III. Système complet d'événements associé à un couple de v.a.r.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(X, Y)$ un couple de v.a.r. discrètes.

- La famille $\big([X = x] \cap [Y = y]\big)_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}}$ est un système complet d'événements.

  Il est appelé **système complet d'événements associé au couple** $(X, Y)$.
- On en déduit notamment :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) & = & \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \Big( \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \Big) \\ & = & \displaystyle\sum_{y \in Y(\Omega)} \Big( \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \Big) \ = \ 1 \end{array}}$$

- Démontrons que la famille $\big([X = x] \cap [Y = y]\big)_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}}$ est un sce.

  *1)* Démontrons que cette famille est constituée d'événements 2 à 2 incompatibles.

  Choisissons deux événements distincts de cette famille.
  Soit $(x_1, y_1) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et soit $(x_2, y_2) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ tels que $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$.

$$\begin{array}{rl} & ([X = x_1] \cap [Y = y_1]) \cap ([X = x_2] \cap [Y = y_2]) \\ = & ([X = x_1] \cap [X = x_2]) \cap ([Y = y_1] \cap [Y = y_2]) \\ = & \varnothing \end{array}$$

  En effet, on a forcément $x_1 \neq x_2$ ou $y_1 \neq y_2$ car $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$.

  *2)* Démontrons que la réunion de ces événements est $\Omega$.

$$\begin{array}{rll} & \displaystyle\bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} [X = x] \cap [Y = y] & \\ = & \displaystyle\bigcup_{x \in X(\Omega)} \Big( \bigcup_{y \in Y(\Omega)} [X = x] \cap [Y = y] \Big) & \\ = & \displaystyle\bigcup_{x \in X(\Omega)} \Big( [X = x] \cap \Big( \bigcup_{y \in Y(\Omega)} [Y = y] \Big) \Big) & \textit{(car } \cap \textit{ est distributive par rapport à } \cup\textit{)} \\ = & \displaystyle\bigcup_{x \in X(\Omega)} ([X = x] \cap \Omega) & \textit{(car } ([Y = y])_{y \in Y(\Omega)} \textit{ est un sce)} \\ = & \displaystyle\bigcup_{x \in X(\Omega)} [X = x] \ = \ \Omega & \textit{(car } ([X = x])_{x \in X(\Omega)} \textit{ est un sce)} \end{array}$$

- Cette famille étant un sce, on en déduit :

$$\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \ = \ \mathbb{P}\Big( \bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} [X = x] \cap [Y = y] \Big) \ = \ \mathbb{P}(\Omega) \ = \ 1$$

# IV. Lois conditionnelles

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(X, Y)$ un couple de v.a.r. discrètes.

*1)* • Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$, on appelle **loi conditionnelle de** $X$ **sachant (que l'événement)** $[Y = y]$ (est réalisé) l'application :

$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathbb{P}_{[Y=y]}([X = x]) \ = \ \dfrac{\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])}{\mathbb{P}([Y = y])} \end{array}$$

• Autrement dit, la loi conditionnelle de $X$ sachant $[Y = y]$ est la donnée des réels :

$$\mathbb{P}_{[Y=y]}([X = x]) \text{ pour } x \text{ décrivant } X(\Omega)$$

*2)* • Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}([X = x]) \neq 0$, on appelle **loi conditionnelle de** $Y$ **sachant (que l'événement)** $[X = x]$ (est réalisé) l'application :

$$\begin{array}{rcl} Y(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \mathbb{P}_{[X=x]}([Y = y]) \ = \ \dfrac{\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])}{\mathbb{P}([X = x])} \end{array}$$

• Autrement dit, la loi conditionnelle de $Y$ sachant $[X = x]$ est la donnée des réels :

$$\mathbb{P}_{[X=x]}([Y = y]) \text{ pour } y \text{ décrivant } Y(\Omega)$$

MÉTHODO **Lien entre lois conditionnelles et loi conjointe via la loi d'une des v.a.r.**

Supposons : $\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}([X = x]) \neq 0$.

• Tout d'abord, remarquons :

$$\forall x \in X(\Omega),\ \forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}_{[X=x]}([Y = y]) \ = \ \frac{\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])}{\mathbb{P}([X = x])}$$

Ainsi, si on connaît :

× la loi du couple $(X, Y)$,

× la loi de $X$,

alors on obtient les lois conditionnelles de $Y$ sachant $[X = x]$ pour tout élément $x \in X(\Omega)$.

• On peut aussi lire cette égalité comme suit :

$$\forall x \in X(\Omega),\ \forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \ = \ \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}_{[X=x]}([Y = y])$$

Ainsi, si on connaît :

× la loi de $X$,

× les lois conditionnelles de $Y$ sachant $[X = x]$ pour tout élément $x \in X(\Omega)$,

alors on obtient la loi du couple $(X, Y)$.

# V. Lois marginales

## V.1. Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(X, Y)$ un couple de v.a.r. discrètes.

- On appelle $1^{\text{ère}}$ **loi marginale du couple** $(X, Y)$ la loi de la v.a.r. $X$.
- On appelle $2^{\text{ème}}$ **loi marginale du couple** $(X, Y)$ la loi de la v.a.r. $Y$.

## V.2. Expression d'une loi marginale via la loi du couple ou via une loi conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(X, Y)$ un couple de v.a.r. discrètes.

*1)* Loi de $X$ via la loi du couple $(X, Y)$

$$\boxed{\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}([X = x]) \ = \ \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y = y] \cap [X = x])}$$

Loi de $X$ via les lois conditionnelles de $X$ sachant $[Y = y]$ pour tout $y \in Y(\Omega)$ :

On suppose : $\forall y \in Y(\Omega), \ \mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$. Alors :

$$\boxed{\mathbb{P}([X = x]) \ = \ \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y = y]) \times \mathbb{P}_{[Y=y]}([X = x])}$$

*2)* Loi de $Y$ via la loi du couple $(X, Y)$

$$\boxed{\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}([Y = y]) \ = \ \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])}$$

Loi de $Y$ via les lois conditionnelles de $Y$ sachant $[X = x]$ pour tout $x \in X(\Omega)$ :

On suppose : $\forall x \in X(\Omega), \ \mathbb{P}([X = x]) \neq 0$. Alors :

$$\boxed{\mathbb{P}([Y = y]) \ = \ \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}_{[X=x]}([Y = y])}$$

`À RETENIR`

- Si l'on connaît la loi du couple $(X, Y)$, la loi de $X$ est déterminée à l'aide de la FPT appliquée sur le système complet d'événements $\big([Y = y]\big)_{y \in Y(\Omega)}$ (c'est le SCE associé à $Y$).
- Si l'on connaît la loi du couple $(X, Y)$, la loi de $X$ est déterminé à l'aide de la FPT appliquée sur le système complet d'événements $\big([X = x]\big)_{x \in X(\Omega)}$ (c'est le SCE associé à $X$).
- Le système complet d'événements $([X = x] \cap [Y = y])_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}}$ n'est `JAMAIS` utilisé dans la formule des probabilités totales. Ce SCE permet essentiellement de conclure :

$$\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \ = \ \sum_{x \in X(\Omega)} \Big( \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \Big)$$

$$= \ \sum_{y \in Y(\Omega)} \Big( \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \Big) \ = \ 1$$

# VI. Indépendance de variables aléatoires discrètes

## VI.1. Indépendance de deux variables aléatoires discrètes

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(X, Y)$ un couple de v.a.r. discrètes.

- Les **v.a.r.** $X$ **et** $Y$ **sont indépendantes** (pour la probabilité $\mathbb{P}$) si :

$$\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}([Y = y])$$

- Autrement dit, les v.a.r. $X$ et $Y$ sont indépendantes si pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$, les événements $[X = x]$ et $[Y = y]$ sont indépendants.

MÉTHODO **Démontrer que deux v.a.r. discrètes ne sont pas indépendantes**

- Pour démontrer que $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$ tels que :

$$\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \ \neq\ \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}([Y = y])$$

- On essaiera de trouver $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$ tels que :

$$\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X = x]) \neq 0,\ \mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$$

**Remarque**

Soient $X$ et $Y$ sont deux v.a.r. discrètes indépendantes.

Alors, tout événement ne dépendant que de la variable $X$ est indépendant de tout événement ne dépendant que de la variable $Y$. Plus précisément, pour tout $(t_1, t_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ :

- $\mathbb{P}\left([X = t_1] \cap [Y \leqslant t_2]\right) = \mathbb{P}([X = t_1]) \times \mathbb{P}([Y \leqslant t_2])$,
- $\mathbb{P}\left([X \leqslant t_1] \cap [Y \leqslant t_2]\right) = \mathbb{P}([X \leqslant t_1]) \times \mathbb{P}([Y \leqslant t_2])$,
- $\mathbb{P}\left([X \leqslant t_1] \cap [Y > t_2]\right) = \mathbb{P}([X \leqslant t_1]) \times \mathbb{P}([Y > t_2])$,
- ...

Cela provient essentiellement de la propriété : $[Y \leqslant t_2] = \bigcup\limits_{\substack{y_j \in Y(\Omega) \\ y_j \leqslant t_2}} [Y = y_j]$

et que $[X = t_1]$ est indépendant de tout événement $[Y = y_j]$.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soient $(X, Y)$ un couple de v.a.r. discrètes.

*1)* Supposons : $\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}([X = x]) \neq 0$. Alors :

$$\begin{array}{ll} & X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}_{[X=x]}([Y = y]) \ = \ \mathbb{P}([Y = y]) \end{array}$$

*2)* Supposons : $\forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$. Alors :

$$\begin{array}{ll} & X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}_{[Y=y]}([X = x]) \ = \ \mathbb{P}([X = x]) \end{array}$$

## VI.2. Indépendance mutuelle de variables aléatoires discrètes

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (avec $n \geqslant 2$) des v.a.r. discrètes.

- `(CULTURE)` Les v.a.r. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont **(mutuellement) indépendantes** (pour la probabilité $\mathbb{P}$) lorsque :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega),\ \forall J \subset [\![1, n]\!],$$
$$\mathbb{P}\left( \bigcap_{j \in J} [X_j = x_j] \right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}([X_j = x_j])$$

- Cette propriété est équivalente à (c'est la définition du programme officiel) :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega),$$
$$\mathbb{P}\left( \bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i] \right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i = x_i])$$

- On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables (mutuellement) indépendantes (pour la probabilité $\mathbb{P}$) lorsque :

  pour tout $n \geqslant 2$, les variables $X_1$, $X_2$, $\ldots$, $X_n$ sont (mutuellement) indépendantes

**Remarque** `(CULTURE)`

- Des deux définitions, c'est celle du programme officiel (évidemment !) qu'il faut retenir.
- L'intérêt de la première définition est qu'elle permet d'insister sur un point fondamental de la notion d'indépendance mutuelle : si les v.a.r. $X_1$, $\ldots$, $X_n$ sont (mutuellement) indépendantes, alors, pour tout $J \subset [\![1, n]\!]$, les variables de la famille $(X_j)_{j \in J}$ sont indépendantes.
- L'équivalence entre les deux définitions est un peu technique.
  Il est évident que la première définition donnée implique celle du programme officiel (il suffit de prendre $J = [\![1, n]\!]$).
  La réciproque est plus difficile à obtenir. Pour plus de lisibilité, on prend $n = 3$. Supposons :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times X_3(\Omega),\ \mathbb{P}\left( \bigcap_{i=1}^{3} [X_i = x_i] \right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i = x_i])$$

  Notons $([X_2 = u_2])_{u_2 \in X_2(\Omega)}$ le sce associé à $X_2$. Soit $(x_1, x_3) \in X_1(\Omega) \times X_3(\Omega)$.
  Alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_1 = x_1] \cap [X_3 = x_3]) &= \sum_{u_2 \in X_2(\Omega)} \mathbb{P}([X_1 = x_1] \cap [X_2 = u_2] \cap [X_3 = x_3]) \\
&= \sum_{u_2 \in X_2(\Omega)} \mathbb{P}([X_1 = x_1]) \times \mathbb{P}([X_2 = u_2]) \times \mathbb{P}([X_3 = x_3]) \\
&= \mathbb{P}([X_1 = x_1]) \times \mathbb{P}([X_3 = x_3]) \sum_{u_2 \in X_2(\Omega)} \mathbb{P}([X_2 = u_2]) \\
&= \mathbb{P}([X_1 = x_1]) \times \mathbb{P}([X_3 = x_3])
\end{aligned}$$

  On démontre ainsi que si $(X_1, X_2, X_3)$ sont indépendantes, il en est de même des variables de la famille $(X_j)_{j \in J}$ avec $J = \{1, 3\}$ (il faudrait le faire pour tout $J \subset [\![1, 3]\!]$ !).

## VI.3. Lemme des coalitions

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(X, Y)$ un couple de v.a.r. discrètes.

Soient $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $g : Y(\Omega) \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

- Cas de 2 v.a.r.

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ indépendantes } \Rightarrow f(X) \text{ et } g(Y) \text{ sont indépendantes}}$$

- Généralisation à $n$ v.a.r.

  Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. discrètes.

  Soient $f_1 : X_1(\Omega) \to \mathbb{R}, \ldots, f_n : X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$ des fonctions.

| | | |
|---|---|---|
| $X_1, \ldots, X_n$ v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes | $\Rightarrow$ | $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes |

| | | |
|---|---|---|
| $X_1, \ldots, X_n$ v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes | $\Rightarrow$ | Toute v.a.r. s'exprimant en fonction des v.a.r. $X_1, \ldots, X_p$ est indépendante de toute v.a.r. s'exprimant en fonction des v.a.r. $X_{p+1}, \ldots, X_n$ (pour $p \in [\![2, n-1]\!]$) |

**Remarque**

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes.
Alors toute famille de $n$ événements dont chacun est construit à l'aide d'une v.a.r. $X_i$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

Plus précisément, pour tout $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ :

× les événements $[X_1 = t_1], [X_2 \leqslant t_2], \ldots [X_n \leqslant t_n]$ sont mutuellement indépendants,

× les événements $[X_1 \leqslant t_1], [X_2 > t_2], \ldots [X_n \leqslant t_n]$ sont mutuellement indépendants,

× ...

**Exemple**

- Soient $X_1, \ldots, X_5$ des v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes. Alors :
  × les v.a.r. $X_1$, ${X_2}^2$, $2\,X_3$, $\mathrm{e}^{X_4} - 1$ et $|X_5|$ sont mutuellement indépendantes.
  × les v.a.r. $2\,X_1 X_3 - X_5$ et ${X_2}^2$ sont indépendantes.
  × les v.a.r. $\min(X_1, X_2)$ et $\max(X_3, X_4, X_5)$ sont indépendantes.
- Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. mutuellement indépendantes.
  Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $X_{n+1}$ sont indépendantes.
- Si $X^2$ et $Y^2$ ne sont pas indépendantes, alors, en procédant par l'absurde, on démontre que $X$ et $Y$ ne le sont pas non plus.

# VII. Opérations sur les v.a.r. discrètes

## VII.1. Cas général : loi de $g(X, Y)$

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $(X, Y)$ un couple de v.a.r. discrètes.
Soit $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$.

- La v.a.r. $Z = g(X, Y)$ est une v.a.r. discrète.
- L'ensemble des valeurs prises par $Z = g(X, Y)$ est donnée par :

$$\begin{array}{rcl} Z(\Omega) & = & \{g(X(\omega), Y(\omega)) \mid \omega \in \Omega\} \\ & \subseteq & \{g(x, y) \mid x \in X(\Omega),\ y \in Y(\Omega)\} \end{array}$$

- La loi de $Z = g(X, Y)$ est donnée par (aspect théorique) :

$$\boxed{\forall z \in Z(\Omega),\ \mathbb{P}([Z = z]) \ = \sum_{\substack{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ z = g(x, y)}} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])}$$

- En pratique, on optera pour l'une des deux rédactions suivantes.

*1)* La famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un sce.
Soit $z \in Z(\Omega)$. D'après la formule des probabiltés totales :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([Z = z]) & = & \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [g(X, Y) = z]) \\ & = & \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [g(x, Y) = z]) \end{array}}$$

*2)* La famille $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$ est un sce.
Soit $z \in Z(\Omega)$. D'après la formule des probabiltés totales :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([Z = z]) & = & \displaystyle\sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y = y] \cap [g(X, Y) = z]) \\ & = & \displaystyle\sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y = y] \cap [g(X, y) = z]) \end{array}}$$

Le choix de l'introduction du sce $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$ ou $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est guidé par les lois de $X$ et $Y$. On optera toujours pour le sce le plus simple.

## VII.2. Cas particuliers (opérations classiques)

### *a)* Loi de la somme de deux v.a.r. discrètes

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(X, Y)$ un couple de v.a.r. discrètes.

- La v.a.r. $X+Y$ est une v.a.r. discrète.
- On détermine la loi de $X+Y$ à l'aide d'une des deux rédactions suivantes.

  *1)* La famille $([X=x])_{x \in X(\Omega)}$ est un sce.
  Soit $z \in (X+Y)(\Omega)$. D'après la formule des probabiltés totales :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{P}([X+Y=z]) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=x] \cap [X+Y=z]) \\ &= \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tq } z-x \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}([X=x] \cap [Y=z-x]) \end{aligned}}$$

  *2)* La famille $([Y=y])_{y \in Y(\Omega)}$ est un sce.
  Soit $z \in (X+Y)(\Omega)$. D'après la formule des probabiltés totales :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{P}([X+Y=z]) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y=y] \cap [X+Y=z]) \\ &= \sum_{\substack{y \in Y(\Omega) \\ \text{tq } z-y \in X(\Omega)}} \mathbb{P}([Y=y] \cap [X=z-y]) \end{aligned}}$$

  Le choix de l'introduction du sce $([Y=y])_{y \in Y(\Omega)}$ ou $([X=x])_{x \in X(\Omega)}$ est guidé par les lois de $X$ et $Y$. On optera toujours pour le sce le plus simple.

`À RETENIR`

- On note que la probabilité $\mathbb{P}([X=x] \cap [Y=z-x])$ est nulle dès que $z-x$ n'appartient pas à $Y(\Omega)$ puisqu'alors $[Y=z-x]=\varnothing$.
- Ceci a pour conséquence de restreindre les indices de sommation puisque :

$$\mathbb{P}([X=x] \cap [Y=z-x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0 \ \text{ dès que } \ z-x \notin Y(\Omega)$$

`MÉTHODO` **Trouver les indices convenables lors de la détermination de la loi de $X+Y$**

Il est fréquent, lors de l'étape de restriction des indices de la somme de tomber sur une contrainte s'exprimant par deux inégalités :

$$a \leqslant i \leqslant b \ \texttt{ET} \ c \leqslant i \leqslant d \quad \text{où } (a,b,c,d) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^4$$

On pourra alors utiliser le résultat suivant :

$$\boxed{(a \leqslant i \leqslant b \ \texttt{ET} \ c \leqslant i \leqslant d) \quad \Leftrightarrow \quad \max(a,c) \leqslant i \leqslant \min(b,d)}$$

(à gauche c'est le plus grand élément qui contraint le plus, à droite c'est le plus petit élément qui contraint le plus)

***1)*** **Stabilité des lois binomiales**

Soit $p \in ]0,1[$ et soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ X \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p) \text{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p) \\ \bullet\ X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad X+Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m+n,p)$$

***2)*** **Stabilité des lois de Poisson**

Soient $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\mu \in \mathbb{R}^{+*}$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \text{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu) \\ \bullet\ X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$$

*Démonstration.*

- Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, on a : $(X+Y)(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
- La famille $([X = i])_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.
  Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([X+Y=k]) \\
= {} & \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i] \cap [X+Y=k]) \\
= {} & \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=k-i]) \\
= {} & \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i])\ \mathbb{P}([Y=k-i]) && \textit{(par indépendance de } X \textit{ et } Y\textit{)} \\
= {} & \sum_{\substack{i=0 \\ k-i \in Y(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i])\ \mathbb{P}([Y=k-i]) + \cancel{\sum_{\substack{i=0 \\ k-i \notin Y(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i])\ \mathbb{P}([Y=k-i])} && \textit{(car } [Y=k-i]=\varnothing \textit{ si } k-i \notin Y(\Omega)\textit{)} \\
= {} & \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}([X=i])\ \mathbb{P}([Y=k-i])
\end{aligned}$$

- La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{\begin{array}{l} k-i \in Y(\Omega) = \mathbb{N} \\ i \in [\![0,+\infty[\![ \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant k-i \\ 0 \leqslant i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} i \leqslant k \\ 0 \leqslant i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\ 0 \leqslant i \leqslant k\right.$$

- Ainsi, en reprenant les égalités précédentes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X+Y=k]) &= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}([X=i])\ \mathbb{P}([Y=k-i]) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\ \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}\,\mathrm{e}^{-\mu} && \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \textit{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)\textit{)} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{e}^{-\mu} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!\,(k-i)!}\ \lambda^i\,\mu^{k-i} = \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\ \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!\,(k-i)!}\ \lambda^i\,\mu^{k-i} \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\ \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\ \lambda^i\,\mu^{k-i} = \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\ \frac{1}{k!}\ (\lambda+\mu)^k && \textit{(d'après la formule du binôme de Newton)}
\end{aligned}$$

Finalement : $X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$. □

### *b)* Loi du produit de deux v.a.r. discrètes

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(X, Y)$ un couple de v.a.r. discrètes.

- $XY$ est une v.a.r. discrète.
- On détermine la loi de $XY$ à l'aide d'une des deux rédactions suivantes.

*1)* La famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un sce.
Ainsi, d'après la formule des probabiltés totales :

$$\boxed{\begin{aligned}\forall z \in (XY)(\Omega),\ \mathbb{P}([XY = z]) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [XY = z]) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [xY = z])\end{aligned}}$$

*2)* La famille $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$ est un sce.
Ainsi, d'après la formule des probabiltés totales :

$$\boxed{\begin{aligned}\forall z \in (XY)(\Omega),\ \mathbb{P}([XY = z]) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y = y] \cap [XY = z]) \\ &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y = y] \cap [yX = z])\end{aligned}}$$

Le choix de l'introduction du sce $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$ ou $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est guidé par les lois de $X$ et $Y$. On optera toujours pour le sce le plus simple.

### *c)* Loi du maximum / minimum de deux v.a.r. discrètes

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soient $X$ et $Y$ deux v.a.r. discrètes **indépendantes**.

On note $F_X$ et $F_Y$ les fonctions de répartition de ces v.a.r.

On note $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

Remarquons tout d'abord :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ [\min(X, Y) > t] \ = \ [X > t] \cap [Y > t]}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ [\max(X, Y) \leqslant t] \ = \ [X \leqslant t] \cap [Y \leqslant t]}$$

*1)*
- La v.a.r. $U = \min(X, Y)$ est une v.a.r. discrète.
- La fonction de répartition de $U = \min(X, Y)$ vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_U(t) = 1 - \big(1 - F_X(t)\big)\ \big(1 - F_Y(t)\big)$$

*2)*
- La v.a.r. $V = \max(X, Y)$ est une v.a.r. discrète.
- La fonction de répartition de $V = \max(X, Y)$ vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_V(t) = F_X(t)\ F_Y(t)$$

*Démonstration.*

- Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{cll} & F_V(t) & \\ = & \mathbb{P}([Z \leqslant t]) & \\ = & \mathbb{P}([\max(X,Y) \leqslant t]) & \\ = & \mathbb{P}([X \leqslant t] \cap [Y \leqslant t]) & \\ = & \mathbb{P}([X \leqslant t])\ \mathbb{P}([Y \leqslant t]) & \textit{(car $X$ et $Y$ sont indépendantes)} \\ = & F_X(t)\ F_Y(t) & \end{array}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{cll} & F_U(t) & \\ = & \mathbb{P}(U \leqslant t) & \\ = & 1 - \mathbb{P}([U > t]) & \\ = & 1 - \mathbb{P}(\min(X,Y) > t) & \\ = & 1 - \mathbb{P}([X > t] \cap [Y > t]) & \\ = & 1 - \mathbb{P}([X > t])\ \mathbb{P}([Y > t]) & \textit{(car $X$ et $Y$ sont indépendantes)} \\ = & 1 - (1 - F_X(t))\ (1 - F_Y(t)) & \end{array}$$

$\square$

# Informations concernant cette semaine de colles

## Questions de cours

Les questions de cours pour cette semaine sont les suivantes :

- Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire. Énoncé et démonstration.
- Image d'une application linéaire en dimension finie. Énoncé et démonstration.
- Si $E$ est un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$, alors $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.
- Stabilité par somme des lois usuelles. Énoncé (pour les lois binomiales et de Poisson) et démonstration (seulement pour les lois de Poisson).

## Exercices types

Les compétences attendues sur le chapitre couple de v.a.r. sont les suivantes :

- savoir déterminer la loi d'un couple (et rédaction associée).
- savoir déterminer une loi marginale connaissant la loi du couple.
- savoir déterminer une loi marginale connaissant une loi conditionnelle.
- savoir passer de la loi du couple à la loi conditionnelle (et inversement) à l'aide de la connaissance de la loi de la v.a.r. adéquate.
- savoir démontrer que deux v.a.r. $X$ et $Y$ sont non indépendantes en exhibant un couple $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ qui met en défaut la propriété d'indépendance.
  *(on exhibe* **un** *couple particulier, on ne cherche en aucun cas tous les couples qui mettent en défaut la propriété)*
- savoir déterminer la loi d'une v.a.r. $Z = g(X, Y)$ dans les cas particuliers classiques.
  Plus précisément, savoir déterminer la loi d'une somme $X + Y$ / d'une différence $X - Y$ / d'une distance $|X - Y|$ / d'un produit $XY$ de deux v.a.r.
  *(on pourra se reporter à l'énoncé* `HEC 2010` - *exercice 7 des annales passées, thème Probabilités discrètes)*
  Pour ce faire, on testera l'événement $[Z = z]$ en fonction du sce $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ ou du sce $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$ (on choisira le sce le plus simple) et on déterminera la probabilité de $\mathbb{P}([Z = z])$ à l'aide de la FPT.
- savoir déterminer la loi du max ou du min de deux v.a.r. discrètes indépendantes (en particulier la loi du min de deux v.a.r. indépendantes suivant la même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ où $p \in ]0, 1[$)
- savoir déterminer l'espérance d'une somme (linéarité !), d'un produit (théorème de transfert).

`MÉTHODO` **Calcul de probabilités** *(rappel / bilan des chapitres précédents)*

Afin de résoudre un exercice de calcul de probabilités, il faudra penser au schéma suivant.

***0)*** Introduction des événements basiques (le fait d'avoir tiré une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage, le fait d'avoir obtenu pile au $i^{\text{ème}}$ tirage, le fait d'avoir obtenu un 6 au $i^{\text{ème}}$ tirage ...) liés à l'expérience considérée.
Nommage de l'événement $A$ dont on cherche à déterminer la probabilité.
*(ces deux étapes sont parfois directement données dans l'énoncé)*

***1)*** Décomposition de l'événement $A$ à l'aide d'événements basiques.

***2)*** Deux cas se présentent alors :

$(i)$ si cette décomposition fait apparaître une union, il faut retenir le triptyque :

$$\boxed{\text{union / incompatibilité / somme}}$$

Dans le cas d'une union finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette union (cas d'une union croissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles.
  - × si c'est le cas, on utilise l'additivité de $\mathbb{P}$.
  - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la formule du crible.

Dans le cas d'une union infinie d'événements

- On vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles :
  - × si c'est le cas, on utilise la $\sigma$-additivité de $\mathbb{P}$.
  - × si ce n'est pas le cas, on se ramène au cas d'une union finie d'événements en utilisant le théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une intersection d'événements en considérant la formule liant probabilité d'un événement à la probabilité de l'événement contraire.

$(ii)$ si cette décomposition fait apparaître une intersection, il faut retenir le triptyque :

$$\boxed{\text{intersection / indépendance / produit}}$$

Dans le cas d'une intersection finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette intersection (cas d'une intersection décroissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont mutuellement indépendants.
  - × si c'est le cas, on utilise la formule associée.
  - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la Formule des Probabilités Composées (FPC).

Dans le cas d'une intersection infinie d'événements

- On se ramène au cas d'une intersection finie d'événements en utilisant le théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une union d'événements en considérant la formule liant probabilité d'un événement à la probabilité de l'événement contraire.

**Remarque**

- Il est à noter que la Formule des Probabilités Totales (FPT) rentre dans ce schéma. En effet, si la famille $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements, alors tout événement $B$ s'écrit comme une réunion d'événements 2 à 2 incompatibles.

$$B = \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \cap B = \bigcup_{i \in I} \big(A_i \cap B\big)$$

- L'étape de décomposition des événements est **primordiale**.
  On raisonne `TOUJOURS` sur les événements et `JAMAIS` directement sur les probabilités.

  ~~$\mathbb{P}(A) = 0$ car c'est la probabilité d'obtenir ...~~

  *(cf démarche de l'exrcice sur la limite monotone)*

- Lorsqu'il s'agit de raisonner sur les événements, on adopte la rédaction suivante :

  ~~L'événement $A$ signifie que ...~~

  L'événement $A$ est réalisé si et seulement si ... ✓

- Afin de déterminer une probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(B)$ on pourra rédiger comme suit :

  Si l'événement $A$ est réalisé, c'est que ...

  Dans ce cas, l'événement $B$ est réalisé si et seulement si ...

- Dans un énoncé de probabilités discrètes, on manipule différents niveaux d'objets.
  *1)* Au premier niveau, on trouve l'expérience aléatoire considérée.
  On note $\Omega$ l'univers des possibles : c'est **l'ensemble** des résultats possibles (appelés aussi issues) de l'expérience. Si on considère l'expérience consistant à effectuer trois lancers successifs d'une même pièce, alors : $\Omega = \{P, F\}^3$.
  Autrement dit, $\Omega$ est l'ensemble des triplets à coefficitents dans l'ensemble $\{P, F\}$.
  Ces triplets pouront être nommés des 3-lancers (on s'adapte ainsi au vocabulaire des probabilités).
  Par exemple, $\omega = (F, F, P)$ est un 3-lancer qui est un résultat possible de l'expérience. Ce résultat est obtenu si le $1^{\text{er}}$ lancer fournit *Face*, le $2^{\text{ème}}$ fournit *Face*, le $3^{\text{ème}}$ fournit *Pile*.

  *2)* Au deuxième niveau, on trouve les événements : un événement $A$ n'est rien d'autre qu'un **ensemble** qui regroupe certaines issues de l'expérience. Ainsi : $A \subset \Omega$ (un événement est un sous-ensemble de l'univers). Par exemple, l'événement $P_1$ : « obtenir *Pile* au premier lancer » regroupe tous les 3-lancers dont le premier coefficient vaut $P$.

  $$P_1 = \{\ (P, F, F),\ (P, F, P),\ (P, P, F),\ (P, P, P)\ \}$$

  Par exemple, $\omega = (P, F, F) \in P_1$. Lorsque $\omega \in P_1$, on dit que $\omega$ **réalise** l'événement $P_1$.

  *3)* Au troisième niveau, on trouve les v.a.r. . Ce sont des **applications** particulières :
  - elles prennent comme argument **un résultat possible de l'expérience** et renvoient **une valeur réelle**. Consisdérons la v.a.r. $X$ qui donne le nombre de Pile obtenus au cours de l'expérience. Avec le 3-lancer $\omega$ précédent, on obtient : $X(\omega) = X\Big((P, F, F)\Big) = 1$.
    Cela démontre que la v.a.r. $X$ peut prendre la valeur 1 (on a exhibé un 3-lancer $\omega$ tel que $X(\omega) = 1$).
  - elles sont des machines à créer des événements. Par exemple, $[X = 2]$ est un événement.
    Il regroupe **tous** les 3-lancers $\omega$ tels que : $X(\omega) = 2$.
    Autrement dit : $[X = 2] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 2\} = \{\ (P, P, F),\ (P, F, P),\ (F, F, P)\ \}$.

  Ce deuxième point nous replonge au deuxième niveau. Ainsi, pour comprendre le chapitre sur les v.a.r. , il est donc essentiel de maîtriser celui sur les probabilités générales.