Colles

semaine 15 : 3 janvier - 8 janvier

I. Relation de similitude

I.1. Notion de matrice semblable

a. Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- Les matrices M et N sont **semblables** s'il existe une matrice inversible P telle que :

$$\boxed{M = PNP^{-1}}$$

- La relation de similitude (celle qui stipule qu'une matrice M est semblable à une matrice N) vérifie les propriétés suivantes.
  1) Elle est réflexive : M est semblable à M.
  2) Elle est symétrique : si M est semblable à N alors N est semblable à M.
  3) Elle est transitive : si M est semblable à N et N est semblable à R alors M est semblable à R.

b. Un intérêt des matrices semblables : calcul des puissances itérées

Soient M et N deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que M et N sont semblables et donc qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que : $M = PNP^{-1}$.

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = PN^kP^{-1}$.

(autrement dit, si M et N sont semblables via la matrice P, M^k et N^k le sont aussi via la même matrice P)

Remarque

- Considérons M et N deux matrices semblables et $k \in \mathbb{N}$. Par définition, il existe P inversible telle que : $M = PNP^{-1}$. Si on sait facilement calculer N^k, on peut en déduire la valeur de M^k en utilisant la relation : $M^k = PN^kP^{-1}$.
- Il est particulièrement aisé de calculer la puissance N^k lorsque :
  × $N = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors $N^k = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.
  (mais ce cas n'est pas très pertinent puisque si $N = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ alors $M = P0P^{-1} = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et on peut donc travailler directement sur M)
  × $N = I_n$. Alors $N^k = {I_n}^k = I_n$.
  (mais ce cas n'est pas très pertinent puisque si $N = I_n$ alors $M = PI_nP^{-1} = I_n$ et on peut donc travailler directement sur M)
  × $N = \lambda\, I_n$. Alors $N^k = (\lambda\, I_n)^k = \lambda^k\, I_n$.
  (mais ce cas n'est pas très pertinent puisque si $N = \lambda \cdot I_n$ alors $M = P(\lambda \cdot I_n)P^{-1} = \lambda \cdot I_n$ et on peut donc travailler directement sur M)

- Dans les énoncés on rencontrera de manière classique les cas suivants.
  × N est diagonale.

$$\text{Si } N = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad N^k = \begin{pmatrix} {d_1}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {d_2}^k & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & {d_n}^k \end{pmatrix}$$

  × $N = \lambda\, I_n + R$ où R est une matrice dont on peut facilement déterminer les itérées. Classiquement R est nilpotente d'ordre 2 : $\forall k \geqslant 2, R^k = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.
  On peut alors utiliser la formule du binôme de Newton puisque λI_n et R commutent ($(\lambda\, I_n)\ R = \lambda R = R\ (\lambda\, I_n)$).

Exercice *(d'après* `EDHEC 2016`*)*
On considère les matrices :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = 2I + N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer N^2 et en déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, N^k.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Démonstration.

1. De plus : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = 0$.
(on peut aussi écrire, pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = N^2\ N^{k-2} = 0\ N^{k-2} = 0$)

2. Les matrices $2I$ et N commutent (car la matrice I commute avec toutes les matrices).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{array}{rcll} T^n & = & (2\,I + N)^n & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ (2\,I)^{n-k}\ N^k & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{n}{k}\ (2\,I)^{n-k}\ N^k + \sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k}\ (2\,I)^{n-k}\ N^k & \textit{(ce découpage est valable car } n \in \mathbb{N}^*\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{n}{k} (2\,I)^{n-k}\ N^k & \textit{(car : } \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0\textit{)} \\ & = & \binom{n}{0}\ (2\,I)^n\ N^0 + \binom{n}{1}\ (2\,I)^{n-1}\ N^1 & \\ & = & (2\,I)^n + n\ (2\,I)^{n-1}\ N & \\ & = & 2^n\, I^n + n\ 2^{n-1}\, I^{n-1}\ N \ = \ 2^n I + n\ 2^{n-1}\ N & \end{array}$$

Il reste à traiter le cas $n = 0$. Dans ce cas, $T^0 = I$.

□

I.2. Lien entre relation de similitude et applications linéaires

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

On note $M = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, $N = Mat_{\mathscr{B}'}(f)$ et $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.
(ce sont toutes des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$)

1. Alors :

$$\boxed{M = P\ N\ P^{-1}}$$

ce qui signifie :

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\ (P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1}}$$

2. De manière générale :

Les matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables	$\Leftrightarrow$	M et N sont les matrices représentatives d'un même endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dans des bases différentes

Démonstration.

1. Soit $u \in E$. On considère $v = f(u)$ et on note :

$$U = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \quad V = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(v) \quad P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$$
$$U' = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) \quad V' = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(v)$$

Avec ces notations :

$$v = f(u)$$

$$\Leftrightarrow \quad V = M\ U$$ *(écriture de l'égalité sous forme matricielle dans la base $\mathscr{B}$)*

$$\Leftrightarrow \quad P\ V' = MP\ U'$$
$$\Leftrightarrow \quad V' = P^{-1}MP\ U'$$
$$\Leftrightarrow \quad N\ U' = P^{-1}MP\ U'$$

En effet : $V' = N\ U'$ (cela correspond à l'écriture matricielle de $v = f(u)$ dans la base $\mathscr{B}'$). On a donc démontré :

$$(P^{-1}MP - N)\ U' \ = \ 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

Ceci étant vrai pour tout U', on en déduit que $P^{-1}MP - N = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. □

Remarque
On peut retenir cette formule sous la forme :

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\ P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}}$$

($\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ *peut aussi se noter* $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$ *: on a choisit la même base au départ et à l'arrivée)*
que l'on peut rapprocher d'une relation de Chasles (« on va de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}$ en passant par $\mathscr{B}'$ »).

II. Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

II.1. Notion de valeur propre et vecteur propre

a. Définition

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Valeur propre d'un endomorphisme

- On dit qu'un réel λ est une **valeur propre** de l'endomorphisme f s'il existe un vecteur $u \in E$ **non nul** ($u \neq 0_E$) tel que :

$$\boxed{f(u) = \lambda \cdot u}$$

- L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f est appelé **spectre de** f et est noté $\mathrm{Sp}(f)$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists u \neq 0_E,\ f(u) = \lambda \cdot u\}}$$

2) Valeur propre d'une matrice

- On dit qu'un réel λ est une **valeur propre** de la matrice A s'il existe un vecteur colonne $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ **non nul** ($U \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$) tel que :

$$\boxed{AU = \lambda \cdot U}$$

- L'ensemble des valeurs propres d'une matrice carrée A est appelé **spectre de** A et est noté $\mathrm{Sp}(A)$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists U \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})},\ AU = \lambda \cdot U\}}$$

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que f (resp. A) admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$.
(ce n'est pas forcément le cas !)

1) Vecteur propre d'un endomorphisme

- On appelle **vecteur propre** de f associé à la valeur propre λ, tout vecteur $u \in E$ **non nul** ($u \neq 0_E$) tel que $f(u) = \lambda \cdot u$.

2) Vecteur propre d'une matrice

- On appelle **vecteur propre** de A associé à la valeur propre λ, tout vecteur colonne $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ **non nul** ($U \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$) tel que $AU = \lambda \cdot U$.

b. **Nombre maximal de valeurs propres**

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ et soit $(U_1, \dots, U_p) \in (\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^p$.

Soit f un endomorphisme de E.

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Cas des endomorphismes

Les vecteurs u_1, …, u_p sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres **distinctes** λ_1, …, λ_p de f	$\Rightarrow$	La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre

On en déduit que l'endomorphisme f possède au plus n valeurs propres **distinctes**.

2) Cas des matrices carrées

Les vecteurs colonnes U_1, …, U_p sont vecteurs propres associés à des valeurs propres **distinctes** λ_1, …, λ_p de A	$\Rightarrow$	La famille $(U_1, \dots, U_p)$ est libre

On en déduit que la matrice A possède au plus n valeurs propres **distinctes**.

Généralisation

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit f un endomorphisme de E.

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Cas des endomorphismes

- Soient λ_1, …, λ_p p valeurs propres **distinctes** de f.
- Soient $\mathcal{F}_1$, …, $\mathcal{F}_p$ p familles de vecteurs de E telles que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:
  - × les familles $\mathcal{F}_i$ sont libres.
  - × les vecteurs de $\mathcal{F}_i$ sont des vecteurs propres associés à la valeur propre λ_i.

Alors la famille $\mathcal{F} = \big(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p\big)$ (obtenue par concaténation des familles $\mathcal{F}_i$) est une famille libre de E.

2) Cas des matrices carrées

- Soient λ_1, …, λ_p des valeurs propres **distinctes** de A.
- Soient $\mathcal{F}_1$, …, $\mathcal{F}_p$ des familles de vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:
  - × les familles $\mathcal{F}_i$ sont libres.
  - × les vecteurs de $\mathcal{F}_i$ sont des vecteurs propres associés à la valeur propre λ_i.

Alors la famille $\mathcal{F} = \big(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p\big)$ (obtenue par concaténation des familles $\mathcal{F}_i$) est une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

c. Caractérisation des valeurs propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit f un endomorphisme de E.

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Cas des endomorphismes

$$\begin{array}{lcl} \lambda \text{ est valeur propre de } f & \Leftrightarrow & \text{il existe } u \neq 0_E \text{ tel que } f(u) = \lambda \cdot u \\ & \Leftrightarrow & \text{il existe } u \neq 0_E \text{ tel que } (f - \lambda \, \mathrm{id}_E)(u) = 0_E \\ & \Leftrightarrow & \text{il existe } u \neq 0_E \text{ tel que } u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \, \mathrm{id}_E) \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{Ker}(f - \lambda \, \mathrm{id}_E) \neq \left\{ 0_E \right\} \\ & \Leftrightarrow & \text{L'endomorphisme } f - \lambda \, \mathrm{id}_E \text{ n'est pas injectif} \\ & \Leftrightarrow & \text{L'endomorphisme } f - \lambda \, \mathrm{id}_E \text{ n'est pas bijectif} \end{array}$$

Cette dernière équivalence est vérifiée car E est un espace vectoriel de **dimension finie** et que $f - \lambda \, \mathrm{id}_E \in \mathscr{L}(E)$ *(de manière générale, l'équivalence injectivité / surjectivité / bijectivité est vérifiée dans les ev de dimensions finies avec* $f \in \mathscr{L}(E, F)$ *et* $\dim(E) = \dim(F)$*).*

2) Cas des matrices carrées

$$\begin{array}{lcl} \lambda \text{ est valeur propre de } A & \Leftrightarrow & \left\{ U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid (A - \lambda I) \; U = 0 \right\} \neq \left\{ 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \right\} \\ & & \textit{(cet ensemble n'est pas noté } \cancel{\mathrm{Ker}(A - \lambda I)} \textit{ car} \\ & & A - \lambda I \textit{ n'est pas un endomorphisme)} \\ & \Leftrightarrow & \text{La matrice } A - \lambda I \text{ n'est pas inversible} \end{array}$$

d. Lien entre éléments propres d'un endomorphisme et éléments propres de sa matrice représentative dans une base donnée

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Soit $u \in E$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1) Alors : $\boxed{f(u) = \lambda u \ \Leftrightarrow \ AU = \lambda U}$

2) En conséquence :

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } f \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \text{ est valeur propre de } A}$$

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)}$$

Le vecteur u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ	$\Leftrightarrow$	Le vecteur colonne U est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ

MÉTHODO **Déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme**

Dans les sujets, un endomorphisme f sera généralement représentée par sa matrice A dans une base donnée. On détermine alors $\text{Sp}(f)$ en déterminant $\text{Sp}(A)$ ($\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A)$).
Pour ce faire, on utilise la caractérisation suivante.

$$\begin{array}{rcl}
\lambda \text{ est valeur propre de } f & \Leftrightarrow & \lambda \text{ est valeur propre de } A \\
& \Leftrightarrow & \exists U \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})},\ AU = \lambda U \\
& \Leftrightarrow & \exists U \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})},\ (A - \lambda\ I_n)\ U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \\
& \Leftrightarrow & A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible} \\
& \Leftrightarrow & \begin{array}{l}\text{l'un (au moins) des coefficients diagonaux de la réduite} \\ \text{(obtenue par pivot de Gauss) } \textbf{triangulaire supérieure} \\ \text{de } A - \lambda I_n \text{ est nul}\end{array}
\end{array}$$

Exercice
Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de E. On considère l'endomorphisme de $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la représentation matricielle dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les valeurs propres de f.

2) Même question avec $E = \mathbb{R}^2$ et g l'endomorphisme dont la représentation matricielle dans la base canonique est : $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl}
\text{rg}(A - \lambda\ I_3) & = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
& \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 5-\lambda & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) \\
& \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2\ L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (5-\lambda)\ L_1}}{=} & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 6-\lambda & -8+2\lambda \\ 0 & 6-\lambda & -1-(5-\lambda)(3-\lambda) \end{pmatrix}\right) \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 6-\lambda & -8+2\lambda \\ 0 & 0 & -8+6\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure.
Elle (et donc $A - \lambda I_3$) est non inversible si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul. On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
A - \lambda I_3 \text{ non inversible} & \Leftrightarrow & 6 - \lambda = 0 \ \texttt{OU} \ -8 + 6\,\lambda - \lambda^2 = 0 \\
& \Leftrightarrow & \lambda = 6 \ \texttt{OU} \ -(\lambda-2)(\lambda-4) = 0 \\
& \Leftrightarrow & \lambda = 6 \ \texttt{OU} \ \lambda = 2 \ \texttt{OU} \ \lambda = 4
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Sp}(f) = \text{Sp}(A) = \{2, 4, 6\}.}$$

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\det(B-\lambda I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) \begin{array}{cl} = & (1-\lambda)(3-\lambda)+1 \\ = & 3-4\,\lambda+\lambda^2+1 \\ = & 4-4\lambda+\lambda^2 \ = \ (2-\lambda)^2 \end{array}$$

$$B-\lambda I_3 \text{ non inversible } \Leftrightarrow \det(B-\lambda I_3)=0 \Leftrightarrow (2-\lambda)^2=0 \Leftrightarrow \lambda=2$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(B) = \{2\}.}$$

□

Valeurs propres d'une matrice triangulaire / diagonale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) La matrice A est triangulaire supérieure (resp. inférieure) $\Rightarrow$ Les valeurs propres de A sont ses coefficients diagonaux

2) La matrice A est diagonale $\Rightarrow$ Les valeurs propres de A sont ses coefficients diagonaux

Démonstration.

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Supposons que la matrice A est triangulaire.
Alors $A-\lambda I_n$ est elle aussi triangulaire. On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ est valeur propre de } f & \Leftrightarrow & \lambda \text{ est valeur propre de } A \\ & \Leftrightarrow & A-\lambda I_n \text{ n'est pas inversible} \\ & \Leftrightarrow & \text{l'un (au moins) des coefficients diagonaux de } A-\lambda I_n \\ & & \text{(qui est } \textbf{triangulaire}\text{ !) est nul} \\ & \Leftrightarrow & a_{1,1}-\lambda=0 \ \texttt{OU} \ \ldots \ \texttt{OU} \ a_{n,n}-\lambda=0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda \in \{a_{1,1},\ldots,a_{n,n}\} \end{array}$$

2) Supposons que la matrice A est diagonale. En particulier elle est triangulaire.
On conclut alors par la propriété *1)*. □

e. Valeurs propres de matrices semblables

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient M et N des matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) M et N sont semblables $\Rightarrow$ $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(N)$

2) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

M et N sont semblables $\Rightarrow$ $\mathrm{rg}(M-\lambda I_n) = \mathrm{rg}(N-\lambda I_n)$

3) M et N sont semblables $\Rightarrow$ $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(N)$

Démonstration.
Supposons que les matrices M est N (éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$) sont semblables.
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme M et N sont semblables, il existe $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E et un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ tels que :

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) \qquad \text{et} \qquad N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f)$$

S'ensuit alors les résultats suivants.

1) $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(N)$

2) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$M - \lambda I = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) - \lambda\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}\big(f - \lambda \mathrm{id}_E\big) \quad \textit{(par linéarité de } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\cdot)\textit{)}$$

De même : $N - \lambda I = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f) - \lambda\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}\big(f - \lambda \mathrm{id}_E\big)$.
Les matrices $M - \lambda I$ et $N - \lambda I$ représentent donc le même endomorphisme $f - \lambda\ \mathrm{id}_E$ respectivement dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$. On en déduit que ces deux matrices sont semblables. Et ainsi, par la propriété énoncée en ***1)*** :

$$\mathrm{rg}(M - \lambda I) = \mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{id}_E) = \mathrm{rg}(N - \lambda I)$$

3) $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(N)$

□

`À RETENIR`

Deux matrices semblables ont même valeurs propres.

f. Cas particulier de la valeur propre 0

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit f un endomorphisme de E.

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Cas des endomorphismes

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Le réel 0 est une valeur propre de } f \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(f) \neq \left\{0_E\right\} \\ &\Leftrightarrow \quad f \text{ n'est pas injective} \\ &\Leftrightarrow \quad f \text{ n'est pas bijective} \end{aligned}}$$

Évidemment, on peut aussi écrire :

$$\boxed{f \text{ est bijective} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Le réel 0 n'est pas valeur propre de } f}$$

2) Cas des matrices carrées

$$\boxed{\text{Le réel 0 est une valeur propre de } A \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ n'est pas inversible}}$$

Évidemment, on peut aussi écrire :

$$\boxed{A \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Le réel 0 n'est pas valeur propre de } A}$$

II.2. Sous-espaces propres d'un endomorphisme

a) Définition

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Cas des endomorphismes

On appelle **sous-espace propre** de f associé à la valeur propre λ, l'ensemble noté $E_\lambda(f)$ défini par :

$$\boxed{\begin{aligned} E_\lambda(f) &= \big\{u \in E \mid f(u) = \lambda \cdot u\big\} \\ &= \big\{u \in E \mid (f - \lambda \mathrm{id})(u) = 0_E\big\} \ = \ \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}) \end{aligned}}$$

2) Cas des matrices carrées

On appelle **sous-espace propre** de A associé à la valeur propre λ, l'ensemble noté $E_\lambda(A)$ défini par :

$$\boxed{\begin{aligned} E_\lambda(A) &= \{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AU = \lambda \cdot U\} \\ &= \{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid (A - \lambda I) \times U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\} \end{aligned}}$$

(cet ensemble n'est pas noté $\cancel{\mathrm{Ker}(A - \lambda I)}$ car $A - \lambda I$ n'est pas un endomorphisme)

Lien entre endomorphisme et représentation matricielle (rappel)

Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Soit $u \in E$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

$$\boxed{u \in E_\lambda(f) \ \Leftrightarrow \ f(u) = \lambda \cdot u \ \Leftrightarrow \ AU = \lambda \cdot U \ \Leftrightarrow \ U \in E_\lambda(A)}$$

Soit λ une valeur propre d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$.
Il faut faire attention à cette définition :

- × $u = 0_E$ n'est `JAMAIS` vecteur propre de l'endomorphisme f.
- × ainsi, l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ n'est `JAMAIS` un espace vectoriel.
  (contrairement à $E_\lambda(f)$ qui l'est toujours, cf ci-dessous)

Attention à la confusion :

$$E_\lambda(f) \ \neq \left\{ \begin{array}{l} \text{vecteurs propres associés} \\ \text{à la valeur propre } \lambda \end{array} \right\}$$

La bonne définition est :

$$\boxed{E_\lambda(f) \ = \left\{ \begin{array}{l} \text{vecteurs propres associés} \\ \text{à la valeur propre } \lambda \end{array} \right\} \ \cup \ \{0_E\}}$$

b) Structure d'un sous-espace propre

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Cas des endomorphismes

Soit λ une valeur propre de f.

a. $\boxed{E_\lambda(f) \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$

b. $E_\lambda(f) \neq \{0_E\}$. En particulier : $\boxed{\dim(E_\lambda(f)) \geqslant 1}$

2) Cas des matrices carrées

Soit λ une valeur propre de A.

a. $\boxed{E_\lambda(A) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

b. $E_\lambda(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. En particulier : $\boxed{\dim(E_\lambda(A)) \geqslant 1}$

c) Détermination d'un sous-espace propre

MÉTHODO **Déterminer $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre de f associé à une valeur propre λ donnée**

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathscr{B}$ une base de E.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Notons $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
Soit $u \in E$. Notons $U = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.
Soit λ est une valeur propre de f.

On rappelle que :

$$\begin{array}{rcl} u \in E_\lambda(f) & \Leftrightarrow & f(u) = \lambda \cdot u \\ & \Leftrightarrow & (f - \lambda \, \text{id}_E)(u) = 0_E \\ & \Leftrightarrow & (A - \lambda \, I_n) \times U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \end{array}$$

On se ramène ainsi à la résolution d'un système linéaire.

Exercice

On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est : $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de f.

2. Déterminer les sous-espaces propres correspondants.

3. Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = ((2,1,0), (-1,0,1), (-1,-2,1))$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

4. Déterminer la matrice représentative de f dans $\mathscr{B}'$.

Démonstration.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{rg}(A - \lambda\ I_3) & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
& \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 & -\lambda \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ 2-\lambda & -2 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
& \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2\ L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (2-\lambda)\ L_1}}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2-2\lambda \\ 0 & 2-2\lambda & 1-\lambda(2-\lambda) \end{pmatrix}\right) \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2\ L_2}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2-2\lambda \\ 0 & 0 & (1-\lambda)^2 - 4\ (1-\lambda) \end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

Remarquons alors :

$$(1-\lambda)^2 - 4\ (1-\lambda) = (1-\lambda)\ ((1-\lambda) - 4) = (1-\lambda)\ (-3-\lambda)$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure.
Elle (et donc $A - \lambda I_3$) est non inversible si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul. On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
A - \lambda I_3 \text{ non inversible} & \Leftrightarrow & 1 - \lambda = 0 \ \texttt{OU}\ (1-\lambda)\ (-3-\lambda) = 0 \\
& \Leftrightarrow & \lambda = 1 \ \texttt{OU}\ \lambda = 1 \ \texttt{OU}\ \lambda = -3
\end{array}$$

Ainsi : $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A) = \{1, -3\}$.

2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- Déterminons $E_1(f)$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in E_1(f) & \Longleftrightarrow & (f - \mathrm{id})(u) = 0_E \\
& \Longleftrightarrow & (A - I_3) \times U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ 2\ x & - & 4\ y & + & 2\ z & = & 0 \\ -\ x & + & 2\ y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2\ L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 +\ L_1}}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{\ x \ = \ 2y - z\right.
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_1(f) & = & \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u \in E_1(f)\} \\
& = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y - z\} \\
& = & \{(2y - z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R} \ \texttt{ET}\ z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \{y \cdot (2, 1, 0) + z \cdot (-1, 0, 1) \mid y \in \mathbb{R} \ \texttt{ET}\ z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \mathrm{Vect}\,((2, 1, 0),\ (-1, 0, 1))
\end{array}$$

- Déterminons $E_{-3}(f)$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in E_{-3}(f) & \Longleftrightarrow & (f + 3\ \mathrm{id})(u) = 0_E \\[4pt]
& \Longleftrightarrow & (A + 3\ I_3) \times U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[4pt]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 5\ x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ 2\ x & & & + & 2\ z & = & 0 \\ -\ x & + & 2\ y & + & 3\ z & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \underset{L_3 \leftarrow 5\ L_3 +\ L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 5\ L_2 - 2\ L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 5\ x & - & 2\ y & + & z & = & 0 \\ & & 4\ y & + & 8\ z & = & 0 \\ & & 8\ y & + & 16\ z & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2\ L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 5\ x & - & 2\ y & + & z & = & 0 \\ & & 4\ y & + & 8\ z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2\ L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 5\ x & - & 2\ y & = & -\ z \\ & & y & = & -2\ z \end{array} \right. \\[4pt]
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 + 2\ L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 5\ x & & & = & -5\ z \\ & & y & = & -2\ z \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-3}(f) & = & \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u \in E_{-3}(f)\} \\
& = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z \ \texttt{ET}\ \ y = -2z\} \\
& = & \{(-z, -2z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \{z \cdot (-1, -2, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} \ = \ \mathrm{Vect}\left((-1, -2, 1)\right)
\end{array}$$

3. À vos stylos !

4. Notons $u = (2, 1, 0)$, $v = (-1, 0, 1)$ et $w = (-1, -2, 1)$.
D'après ce qui précède :

× $f(u) = 1 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(u)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

× $f(v) = 0 \cdot u + 1 \cdot v + 0 \cdot w$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(v)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

× $f(w) = 0 \cdot u + 0 \cdot v - 3 \cdot w$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(v)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

On en déduit : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. □

II.3. Polynômes annulateurs

II.3.a) Polynômes d'endomorphismes, de matrices carrées

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Il existe donc $r \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$ tel que : $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k \ X^k$.

1) Cas des endomorphismes

On note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par $P(f) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k f^k$.

C'est un polynôme d'endomorphismes.

2) Cas des matrices carrées

On note $P(A)$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $P(A) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k A^k$.

C'est un polynôme de matrices.

Lien entre les deux
Si $\mathscr{B}$ est une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, on a alors : $P(A) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P(f))$.

II.3.b) Polynômes annulateurs

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1) Cas des endomorphismes
On dit que P est un polynôme annulateur de f si $P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2) Cas des matrices carrées
On dit que P est un polynôme annulateur de A si $P(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

3) Lien entre les deux
Si $\mathscr{B}$ est une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, on a alors :

$$\boxed{P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)} \ \Leftrightarrow \ P(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}}$$

ou encore :

P est une polynôme annulateur de f	$\Leftrightarrow$	P est un polynôme annulateur de A

Remarque
Considérons $E = \mathbb{R}^3$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ l'endomorphisme dont la représentation matricielle dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Par calcul, on démontre : $A^2 + 2A - 3I = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
On en déduit que $P(X) = X^2 + 2X - 3$ est un polynôme annulateur de A (et donc de f).
Par ailleurs : $\dfrac{1}{3}(A + 2I) \ A = I$. Ainsi, A est inversible, d'inverse $A^{-1} = \dfrac{1}{3}(A + 2I)$.
(et, par la passerelle matrice-endomorphisme, f est bijective de réciproque $\dfrac{1}{3}(f + 2\mathrm{id}_E)$)

II.3.c) Existence d'un polynôme annulateur non nul

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Cas des endomorphismes
Il existe un polynôme annulateur **non nul** de f.

2) Cas des matrices carrées
Il existe un polynôme annulateur **non nul** de A.

Démonstration.
Considérons la famille $(A^0, A^1, A^2, \ldots, A^{n^2})$.
Cette famille contient n^2+1 éléments dans l'ev $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie n^2.
On en déduit que cette famille est liée.
Il existe donc un (n^2+1)-uplet $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n^2}) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ tel que :

$$\alpha_0 \; A^0 + \ldots + \alpha_{n^2} \; A^{n^2} \; = \; 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

Le polynôme $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n^2} \alpha_k \; X^k$ est donc un polynôme annulateur non nul de A. □

Remarque
En fait, toute matrice de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à n, mais ce résultat est hors-programme.

II.3.d) Intérêt des polynômes annulateurs

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1) Cas des endomorphismes
Si P est un polynôme annulateur de f alors :

$$\boxed{\lambda \text{ une valeur propre de } f \quad \Rightarrow \quad \lambda \text{ est une racine de } P}$$

Ainsi : $\boxed{\mathrm{Sp}(f) \;\subset\; \left\{ \begin{array}{l} \text{racines de } P \text{, polynôme} \\ \text{annulateur de } f \end{array} \right\}}$

2) Cas des matrices carrées
Si P est un polynôme annulateur de A alors :

$$\boxed{\lambda \text{ une valeur propre de } A \quad \Rightarrow \quad \lambda \text{ est une racine de } P}$$

Ainsi : $\boxed{\mathrm{Sp}(A) \;\subset\; \left\{ \begin{array}{l} \text{racines de } P \text{, polynôme} \\ \text{annulateur de } A \end{array} \right\}}$

Remarque
Considérons un ev E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{B}$ une de ses bases et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

- Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme annulateur de f, alors les valeurs propres de f sont parmi les racines de P. On dit alors que les racines de P sont les valeurs propres `POSSIBLES` de f.
- Une fois les valeurs propres `POSSIBLES` de f déterminées, il faut s'assurer qu'elles sont bien valeurs propres. Par exemple, si 3 est racine de P, on détermine si $A - 3I_n$ est inversible par un calcul de rang.

III. Théorèmes de réduction

III.1. Endomorphisme diagonalisable, matrice diagonalisable

III.1.a) Définition

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Cas des endomorphismes

- On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale.
- Autrement dit, $f \in \mathscr{L}(E)$ est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tels que : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = D$.

2) Cas des matrices carrées

- On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice **diagonalisable** si A est semblable à une matrice diagonale.
- Autrement dit, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice **diagonalisable** s'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.

III.1.b) Caractérisation de la diagonalisabilité

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Cas des endomorphismes

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l}\text{il existe une base de } E \text{ formée} \\ \text{de vecteurs propres de } f\end{array}}$$

2) Cas des matrices carrées

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l}\text{il existe une base de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ \text{formée de vecteurs propres de } A\end{array}}$$

3) Lien entre endomorphisme et représentation matricielle
Si $\mathscr{B}$ est une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, on a alors :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ est diagonalisable}}$$

Remarque
On a adopté ici une présentation légèrement différente de celle du programme officiel. Celui-ci recommande de considérer comme définition de diagonalisibilité de f le résultat de ce théorème. À savoir que f est diagonalisable s'il existe une base de vecteurs propres de f.

Démonstration.

1) f est diagonalisable

il existe une base $\mathscr{B}' = (e_1{}', \ldots, e_n{}')$ pour laquelle la matrice

$\Leftrightarrow$ représentative de f est diagonale.

Autrement dit, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ il existe une base $\mathscr{B}' = (e_1{}', \ldots, e_n{}')$ telle que :

$$\begin{array}{rcl} f(e_1{}') & = & \lambda \cdot e_1{}' + 0 \cdot e_2{}' + \ldots + 0 \cdot e_{n-1}{}' + 0 \cdot e_n{}' \\ \vdots & & \vdots \\ f(e_n{}') & = & 0 \cdot e_1{}' + 0 \cdot e_2{}' + \ldots + 0 \cdot e_{n-1}{}' + \lambda_n \cdot e_n{}' \end{array}$$

$\Leftrightarrow$ il existe une base $\mathscr{B}' = (e_1{}', \ldots, e_n{}')$ formée de vecteurs propres de f

($\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres - pas forcément distinctes - de f)

3) f est diagonalisable

$\Leftrightarrow$ il existe une base $\mathscr{B}'$ et une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = D$$

$\Leftrightarrow$ il existe une base $\mathscr{B}'$ et une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que :

$$P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \times \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = D$$

$\Leftrightarrow$ il existe une base $\mathscr{B}'$ et une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times D \times (P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1}$$

$\Leftrightarrow$ A est diagonalisable

2) Soit $u \in E$. Notons $U = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

Rappelons :

$$u \in E_\lambda(f) \ \Leftrightarrow \ U \in E_\lambda(A)$$

Ainsi :

$$\boxed{u \text{ est un vecteur propre de } f \quad \Leftrightarrow \quad U \text{ est un vecteur propre de } A.}$$

Si on considère une famille $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ alors :

$$\begin{array}{rl} & \alpha_1 \ u_1 + \ldots + \alpha_n \ u_n = 0_E \\ \Leftrightarrow & \alpha_1 \ U_1 + \ldots + \alpha_n \ U_n = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \end{array}$$

où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a noté : $U_i = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_i)$.

De sorte que :

$$\boxed{(u_1, \ldots, u_n) \text{ est libre dans } E \quad \Leftrightarrow \quad (U_1, \ldots, U_n) \text{ est libre dans } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

On en déduit, à l'aide du point ***3)*** :

A est diagonalisable

$\Leftrightarrow$ f est diagonalisable

$\Leftrightarrow$ il existe une base $(u_1, \ldots, u_n)$ formée de vecteurs propres de f

$\Leftrightarrow$ il existe une base $(U_1, \ldots, U_n)$ formée de vecteurs propres de A

□

À RETENIR

- Dans les énoncés, l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est généralement donné par A sa matrice représentative dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ donnée.
- Diagonaliser f, c'est trouver une base $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ dans laquelle la matrice représentative de f, notée D, est diagonale. Plus précisément :
  - × cette base $\mathscr{B}'$ est constituée de vecteurs propres de f.
  - × la matrice D a pour coefficients diagonaux les valeurs propres de f.
    Ces valeurs propres apparaissent dans l'ordre de classement des vecteurs propres apparaissant dans $\mathscr{B}'$.
- La formule de changement de base permet de faire le lien entre tous ces objets :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ A & = & P & D & P^{-1} \end{array}$$

La matrice P est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Elle est obtenue en concaténant les matrices colonnes représentatives, dans la base $\mathscr{B}$ des vecteurs propres de f. Plus précisément :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_1) \quad \ldots \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_n)\Big)$$

Exercice

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est diagonalisable.

Soit B une matrice semblable à A.

Démontrer que B est diagonalisable.

Démonstration.

1) En détaillant les formules

Comme A est diagonalisable, il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que :

$$A = PDP^{-1}$$

Comme A et B sont semblables, il existe $Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que : $A = QBQ^{-1}$.
On en déduit :

$$QBQ^{-1} = PDP^{-1} \quad \text{et donc} \quad B = Q^{-1}P\ D\ P^{-1}Q$$

Et ainsi $B = Q^{-1}P\ D\ (Q^{-1}P)^{-1}$.

2) À l'aide de la passerelle endomorphisme-matrice (beaucoup plus élégant)

- Comme A et B sont semblables, elles représentent le même endomorphisme, noté $f \in \mathscr{L}(E)$ dans des bases différentes.
- Or A est diagonalisable donc f l'est (sens réciproque du point *3)* du théorème précédent).
- Comme f est diagonalisable, B l'est (c'est le sens direct du point *3)* du théorème précédent). □

III.2. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

III.2.a) Critère de diagonalisabilité

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Cas des endomorphismes

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes de f.

Notons $E_{\lambda_1}(f), \ldots, E_{\lambda_m}(f)$ les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

a. $\sum\limits_{i=1}^{m} \dim(E_{\lambda_i}(f)) \leqslant \dim(E)$

b. $\boxed{f \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \sum\limits_{i=1}^{m} \dim(E_{\lambda_i}(f)) = \dim(E)}$

2) Cas des matrices carrées

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes de A.

Notons $E_{\lambda_1}(A), \ldots, E_{\lambda_m}(A)$ les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

a. $\sum\limits_{i=1}^{m} \dim(E_{\lambda_i}(A)) \leqslant n$

b. $\boxed{A \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \sum\limits_{i=1}^{m} \dim(E_{\lambda_i}(A)) = n}$

III.2.b) Condition suffisante de diagonalisabilité

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Cas des endomorphismes

$$\boxed{f \text{ admet } n \text{ valeurs propres distinctes} \quad \Rightarrow \quad f \text{ est diagonalisable}}$$

2) Cas des matrices carrées

$$\boxed{A \text{ admet } n \text{ valeurs propres distinctes} \quad \Rightarrow \quad A \text{ est diagonalisable}}$$

III.2.c) Démontrer par l'absurde la non diagonalisabilité

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Cas des endomorphismes

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est diagonalisable} \\ f \text{ n'admet qu'une seule valeur propre } \lambda \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad f = \lambda \, \mathrm{id}_E$$

2) Cas des matrices carrées

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ est diagonalisable} \\ A \text{ n'admet qu'une seule valeur propre } \lambda \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad A = \lambda \, I_n$$

Exercice

Soit E un ev de dimension 3 (par exemple $E = \mathbb{R}^3$) et soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Si $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Démonstration.

- La matrice A est triangulaire supérieure.
  Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux. Ainsi : $\mathrm{Sp}(A) = \{7\}$.
- On procède par l'absurde. Supposons que f est diagonalisable.
  Alors A est diagonalisable. Il existe donc :
  × $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale,
  × $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible,
  telles que : $A = PDP^{-1}$.
  De plus, les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A.
  (comme D est semblable à A, alors : $\mathrm{Sp}(D) = \mathrm{Sp}(A)$; et comme D est diagonale, les valeurs propres de D sont ses coefficients diagonaux)
  On en déduit :
  $$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 7 \, I_3$$
  Et :
  $$A = PDP^{-1} = P(7 \, I_3)P^{-1} = 7 \, PP^{-1} = 7 \, I_3$$
  Absurde ! Ainsi, f n'est pas diagonalisable.

□

III.3. Caractère diagonalisable des matrices symétriques

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- La matrice A est dite **symétrique** si ${}^tA = A$.
- Autrement dit, A est **symétrique** si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = a_{j,i}$$

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Cas des endomorphismes

Il existe une base dans laquelle la matrice représentative de f est symétrique	$\Rightarrow$	f est diagonalisable

2) Cas des matrices carrées

$$\boxed{A \text{ est symétrique} \quad \Rightarrow \quad A \text{ est diagonalisable}}$$

Remarque

- Ce résultat n'a rien à faire dans un cours sur les applications linéaires. C'est un résultat qui provient du cours sur les applications bilinéaires, chapitre qui n'est pas au programme de la section ECE.
- Il faut donc utiliser ce résultat comme une recette qu'on applique bêtement.
- Ainsi, dès qu'on rencontre une matrice A symétrique, il faut avoir le réflexe de dire qu'elle est diagonalisable. On note cependant que ce résultat ne dit `RIEN` sur les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

Exercice
On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. *a)* La matrice A est-elle inversible ?

b) En déduire une valeur propre de A.

3. *a)* Calculer A^2.

b) Déterminer alors un polynôme annulateur de A.

4. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de f.

5. *a)* Exhiber $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

b) Que représentent la matrice P ?

c) Déterminer P^{-1}.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer A^n ?

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

– Démontrer par l'absurde la non diagonalisabilité. Le colleur donnera l'exemple d'une matrice (ou d'un endomorphisme) n'ayant qu'une seule valeur propre.

– Formule du binôme de Newton : un exercice du type calcul de $(\alpha\ I + R)^n$ où $R^k = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$ à partir de $k = 2$ ou $k = 3$ *(*`EDHEC 2016` *ou exercice analogue).*

– Valeurs propres de matrices semblables. Énoncé et démonstration.

Exercices types

Les compétences attendues sur le chapitre applications linéaires sont les suivantes :

– savoir démontrer qu'une application $f : E \to F$ est linéaire.

– savoir démontrer qu'une application $f : E \to E$ est un endomorphisme (ne pas oublier de démontrer que f est à valeurs dans E).

– savoir déterminer le noyau d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Si E est de dimension finie, savoir déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
En déduire la dimension de $\text{Ker}(f)$.

– savoir déterminer l'image d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ (notamment si E est de dimension finie).
Si E est de dimension finie, savoir déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
En déduire la dimension de $\text{Im}(f)$.

– savoir déterminer la dimension de $\text{Ker}(f)$ (resp. $\text{Im}(f)$) par application du théorème du rang (si E est de dimension finie !) en connaissant la dimension de $\text{Im}(f)$ (resp. $\text{Ker}(f)$).

– savoir démontrer qu'une application $f : E \to F$ est un isomorphime / automorphisme dans le cas où E et F sont deux espaces vectoriels de même dimension.

– savoir appliquer les schémas de démonstration (démontrer une implication, une équivalence, une inclusion d'ensembles, une égalité d'ensembles ...).
$\hookrightarrow$ la plupart des exercices théoriques de ce chapitre ne sont que des mises en place de ces schémas de démonstration. Ainsi, rien ne peut légitimer ne pas savoir commencer une démonstration d'un exercice théorique.
Typiquement, si $f \in \mathscr{L}(E)$, savoir démontrer : $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.

– savoir déterminer la matrice colonne associée à un vecteur $x \in E$ dans une base $\mathscr{B}$ de E.

– savoir déterminer la matrice de passage d'une base $\mathscr{B}$ à une base $\mathscr{B}'$ et connaître / savoir appliquer la formule de changement de base (« $X = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} X'$ »).

– savoir déterminer la matrice A représentative d'une application $f \in \mathscr{L}(E, F)$ dans des bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$. Il faut alors savoir déduire des propriétés de A celles de f.
$(\text{rg}(f) = \text{rg}(A) \quad \text{et} \quad f \text{ bijective} \ \Leftrightarrow \ A \text{ inversible})$

– savoir déterminer le rang d'une matrice par application du pivot de Gauss.

L'esprit du chapitre est que si E et F sont des espaces vectoriels de dimensions finies, une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ n'est, **à isomorphisme près**, qu'une matrice. Il est donc essentiel de savoir distinguer ces deux mondes (par exemple, si $E = \mathbb{R}_2[X]$, alors $E \cancel{=} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) tout en sachant utiliser les passerelles permettant le passage de l'un à l'autre. Il faut particulièrement veiller à ne pas commettre de confusions d'objets (elles seront lourdement sanctionnées).

Les compétences attendues sur le chapitre réduction sont les suivantes :

- connaître la formule de changement de base pour les représentations matricielles d'un endomorphisme.
- savoir déterminer les itérées d'une matrice diagonale. Savoir déterminer les itérées d'une matrice semblable à une matrice diagonale.
- savoir utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer les itérées d'une matrice.
- savoir **déterminer** les valeurs propres d'une matrice par un calcul de rang.
  (si la matrice est dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on préférera un calcul de déterminant)
- savoir **vérifier** qu'un réel est valeur propre d'un endormorphisme f.
- savoir déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme donné par sa matrice représentative dans une base $\mathscr{B}$.
- savoir ce que signifie que 0 est (resp. n'est pas) valeur propre d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée.
- savoir déterminer les sous-espaces propres d'un endomorphisme donné par sa matrice représentative dans une base $\mathscr{B}$.
- savoir déterminer un polnôme annulateur à l'aide d'un calcul donné par l'énoncé.
- savoir démontrer qu'une matrice est inversible / non inversible connaissant un polnôme annulateur P :
  × si $A^2 + 2A - 3I = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$ alors $A^{-1} = \dfrac{1}{3}(A + 2I)$.
  × si $A^2 + 2A = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$ alors, si A était inversible, on aurait : $A + 2I = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.
  (dans une démonstration par l'absurde, si on suppose A inversible, on pense systématiquement à introduire A^{-1} et à multiplier les égalités matricielles par A^{-1})
- savoir que les racines d'un polynôme annulateur de f sont les valeurs propres `POSSIBLES` de f.
- savoir démontrer qu'une valeur propre possible est une valeur propre (on renvoie à l'item « savoir vérifier qu'un réel est une valeur propre »).
- savoir démontrer par l'absurde qu'un endomorphisme f n'ayant qu'une valeur propre n'est pas diagonalisable.
- savoir que si E est un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et que $f \in \mathscr{L}(E)$ admet n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.
- savoir déterminer les sous-espaces propres d'un endomorphisme f.
- savoir démontrer que f est diagonalisable à l'aide d'une condition sur la dimension des espaces propres.
- savoir que les matrices symétriques réelles sont diagonalisables.