# Colles

semaine 16 : 10 janvier - 15 janvier

# I. Intégration sur un segment

## I.1. Primitives sur un intervalle $I$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I$.

- On appelle **primitive de** $f$ **sur l'intervalle** $I$ toute fonction $F : I \to \mathbb{R}$ qui vérifie :
  ***a)*** $F$ est dérivable sur $I$.
  ***b)*** $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.
- **Lien entre la continuité et la notion de primitive**

$$\boxed{f \text{ continue sur un } \textbf{intervalle } I \quad \Rightarrow \quad f \text{ admet une primitive sur } I}$$

- **Les primitives, si elles existent, sont en nombre infini**
  Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $I$.
  Soit $F$ une primitive de $f$ sur $I$.

***1)*** $$\boxed{G \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que :} \\ \forall x \in I,\ G(x) \ = \ F(x) + \lambda \end{array}}$$

*(on en déduit notamment que $f$ admet une infinité de primitives sur $I$)*

***2)*** Soit $c \in I$.
Il existe une unique primitive de $f$ sur $I$ s'annulant en $c$.
C'est la fonction $x \mapsto F(x) - F(c)$.

## I.2. Intégrale sur un segment d'une fonction continue

### I.2.a) Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle $I$.
Soit $F$ une primitive de $f$ sur $I$ et soit $(a, b) \in I^2$.
*(on ne suppose pas ici $a < b$)*

- On appelle **intégrale de** $a$ **à** $b$ de la fonction $f$, et on note $\int_a^b f(t)\ dt$ la quantité :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt \ = \ [\ F(t)\ ]_a^b \ = \ F(b) - F(a)}$$

## I.3. Intégrale fonction de ses bornes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur un intervalle $I$.

Soit $F : I \to \mathbb{R}$ une prmitive de $F$ sur $I$.

Soit $c \in I$.

La fonction $\begin{array}{rccc} H & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_c^x f(t)\ dt \end{array}$ est la primitive de $f$ sur $I$ qui s'annule en $c$.

*(Ainsi, pour tout $x \in I$, $H(x) = F(x) - F(c)$)*

*1)* En particulier, la fonction $H$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et de dérivée $f$.

$$\boxed{\forall x \in I,\ H'(x) = F'(x) = f(x)}$$

*2)* Si de plus $u, v : J \to I$ sont deux fonctions dérivables sur l'intervalle $J$, alors les fonctions :

$$H_1 : x \mapsto \int_c^{v(x)} f(t)\ dt, \quad H_2 : x \mapsto \int_{u(x)}^{c} f(t)\ dt, \quad H_3 : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt$$

sont dérivables sur $J$. De plus, pour tout $x \in J$ :

$$H_1'(x) = v'(x)\ f(v(x)), \quad H_2'(x) = -u'(x)\ f(u(x))$$

$$H_3'(x) = v'(x)\ f(v(x)) - u'(x)\ f(u(x))$$

*Démonstration.*

Comme $f$ est continue sur $I$, elle admet une primitive $F$ sur $I$.

*1)* Soit $x \in I$. On a alors : $H(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_c^x = F(x) - F(c)$.

Ainsi $H : x \mapsto F(x) - F(c)$ est la primitive de $f$ sur $I$ qui s'annule en $c$.
En particulier, la fonction $H$ est dérivable sur $I$.
Sa dérivée $f$ étant continue sur $I$, la fonction $H$ est $\mathcal{C}^1$ sur $I$.

*2)* Soit $x \in J$.

- Remarquons tout d'abord :

$$H_1(x) = \int_c^{v(x)} f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_c^{v(x)} = F(v(x)) - F(c)$$

La fonction $x \mapsto F(v(x))$ est dérivable sur $J$ car elle est la composée $F \circ v$ où :

× $v$ est dérivable sur $J$.
De plus, $v(J) \subset I$.

× $F$, dérivable sur $I$.

Par la formule de dérivation d'une composée, on obtient :

$$(F \circ v)'(x) = F'(v(x)) \times v'(x) = f(v(x)) \times v'(x)$$

et ainsi : $\forall x \in J,\ H_1'(x) = v'(x)\ f(v(x))$.

- De même : $\displaystyle\int_{u(x)}^{c} f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_{u(x)}^{c} = F(c) - F(u(x))$.

  La fonction $H_2 : x \mapsto F(c) - F(u(x))$ est dérivable sur $J$ (démonstration analogue) et :

$$\forall x \in J,\ H_2'(x) = -F'(u(x)) \times u'(x) = -u'(x)\ f(u(x))$$

- Enfin : $\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_{u(x)}^{v(x)} = F(v(x)) - F(u(x))$.

  La fonction $H_3 : x \mapsto F(v(x)) - F(u(x))$ est dérivable sur $J$ et :

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in J,\ H_3'(x) & = & F'(v(x)) \times v'(x) - F'(u(x)) \times u'(x) \\ & = & v'(x)\ f(v(x)) - u'(x)\ f(u(x)) \end{array}$$

□

**Exercice**

On considère la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_{-\sqrt{x}}^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{\mathrm{e}^t}\ dt$.

Montrer que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

*Démonstration.*

- La fonction $h : t \mapsto \dfrac{\ln(1+t^2)}{\mathrm{e}^t}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  *(on détermine ici l'intervalle de continuité de $h$ indépendamment du reste de l'exercice)*
  Elle admet donc une primitive $H$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
  *(on précise toujours le caractère $\mathcal{C}^1$ dès le début de l'exercice)*
- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par définition :

$$g(x) = \int_{-x}^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{\mathrm{e}^t}\ dt = [\ H(t)\ ]_{-\sqrt{x}}^{x^2} = H(x^2) - H(-\sqrt{x})$$

  La fonction $x \mapsto H(x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est la composée $H \circ v$ où :
  - × $v : x \mapsto x^2$ est :
    - dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,
    - telle que $v(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}$
  - × $H$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

  La fonction $x \mapsto H(-\sqrt{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est la composée $H \circ u$ où :
  - × $u : x \mapsto -\sqrt{x}$ est :
    - dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,
    - telle que $u(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}$
  - × $H$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

  *(dans une épreuve, on pourra se permettre de ne démontrer que la dérivabilité de $H \circ v$ et de signaler qu'on procéderait de même pour $H \circ u$)*
  On en déduit que la fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\begin{array}{rcl} g'(x) & = & 2x\ H'(x^2) + \dfrac{1}{2\ \sqrt{x}}\ H'(-\sqrt{x}) \\ & = & 2x\ h(x^2) + \dfrac{1}{2\ \sqrt{x}}\ h(-\sqrt{x})\ =\ 2x\ \dfrac{\ln(1+x^4)}{\mathrm{e}^{x^2}} + \dfrac{1}{2\ \sqrt{x}}\ \dfrac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}} \end{array}$$

  *(la première ligne est simplement une illustration de la formule de dérivation d'une composée)* □

### I.3.a) Calcul de primitives « à vue »

**Primitives classiques.**

| Fonction | Tout intervalle $I$ tel que : | Une primitive |
|---|---|---|
| $x \mapsto a$ | $I \subset \mathbb{R}$ | $x \mapsto a\,x + \lambda$ |
| $x \mapsto x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$) | $I \subset \mathbb{R}$ | $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \lambda$ |
| $x \mapsto x^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$) | $I \subset \mathbb{R}^{+*}$ | $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \lambda$ |
| $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ | $I \subset \mathbb{R}^{+*}$ | $x \mapsto \ln(x) + \lambda$ |
| $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ | $I \subset \mathbb{R}^{-*}$ | $x \mapsto \ln(-x) + \lambda$ |
| $x \mapsto \mathrm{e}^x$ | $I \subset \mathbb{R}$ | $x \mapsto \mathrm{e}^x + \lambda$ |
| $x \mapsto a^x$ (avec $a > 0$ et $a \neq 1$) | $I \subset \mathbb{R}$ | $x \mapsto \dfrac{a^x}{\ln(a)} + \lambda$ |

*(où $\lambda$ est un réel quelconque)*

**Remarque**
Il ne faut pas confondre $x^\alpha$ (avec $\alpha \neq -1$) et $a^x$ (avec $a > 0$) :
- × pour tout $x > 0$ : $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$.
- × pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $a^x = \mathrm{e}^{x \ln(a)}$.

| Fonction | Tout intervalle $I$ tel que : | Une primitive |
|---|---|---|
| $x \mapsto u'(x)\ (u(x))^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$) | × $u$ dérivable sur $I$ | $x \mapsto \dfrac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + \lambda$ |
| $x \mapsto u'(x)\ (u(x))^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$) | × $u$ dérivable sur $I$<br>× $u > 0$ sur $I$ | $x \mapsto \dfrac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \lambda$ |
| $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ | × $u$ dérivable sur $I$<br>× $u$ ne s'annule pas sur $I$ | $x \mapsto \ln(\lvert u(x)\rvert) + \lambda$ |
| $x \mapsto u'(x)\ \mathrm{e}^{u(x)}$ | × $u$ dérivable sur $I$ | $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)} + \lambda$ |

# II. Extension de la notion d'intégrale

## II.1. Extension à des fonctions continues sur $[a,+\infty[$ ou $]-\infty,b]$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

- Soit $f : [a,+\infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,+\infty[$.
  - × On dit que l'objet $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ est une **intégrale impropre en** $+\infty$.
  - × On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ est **convergente** si la fonction :

$$\begin{array}{ccc} [a,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt \end{array}$$

    admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
    Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ est donnée par :

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)\ dt \ = \ \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\ dt}$$

  - × Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ **diverge**.
- Soit $f : ]-\infty,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]-\infty,b]$.
  - × On dit que l'objet $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\ dt$ est une **intégrale impropre en** $-\infty$.
  - × On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\ dt$ est **convergente** si la fonction :

$$\begin{array}{ccc} ]-\infty,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_x^b f(t)\ dt \end{array}$$

    admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $-\infty$.
    Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\ dt$ est donnée par :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(t)\ dt \ = \ \lim_{x\to-\infty} \int_x^b f(t)\ dt}$$

  - × Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\ dt$ **diverge**.

- Soit $f : ]-\infty, +\infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]-\infty, +\infty[$.
  - $\times$ On dit que l'objet $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ est une **intégrale impropre à la fois en $-\infty$ et $+\infty$**.
  - $\times$ On dit l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ est **convergente** s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(t)\ dt$ sont toutes deux convergentes.
    *(en pratique, on considère $c = 0$)*
    Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ est donnée par :
    $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \ = \ \int_{-\infty}^{c} f(t)\ dt \ + \ \int_{c}^{+\infty} f(t)\ dt}$$
  - $\times$ Dans le cas contraire, *i.e.* si, pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'une des intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(t)\ dt$ ou $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(t)\ dt$ diverge, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ **diverge**.
    *(en pratique, considérer $c = 0$ suffit à conclure)*

`MÉTHODO` : étude de l'objet $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(t)\ dt$ où $f$ est continue sur $[a, +\infty[$.

*1)* On rappelle que $f$ est continue sur $[a, +\infty[$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(t)\ dt$ est impropre seulement en $+\infty$.

*2)* On introduit $B \in [a, +\infty[$ et on étudie si $\displaystyle\int_{a}^{B} f(t)\ dt$, intégrale sur le segment $[a, B]$, admet une limite finie lorsque $B \to +\infty$.
*(comme $f$ est continue sur $[a, +\infty[$, $f$ est aussi continue sur $[a, B]$)*

*3)* Si c'est le cas, on conclut que $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente.
Dans le cas contraire, cette intégrale impropre est divergente.

**Exemple**

Étude de la nature de $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\ dt$.

*1)* La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{t}}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(t)\ dt$ est impropre seulement en $+\infty$.

*2)* Soit $B \in [1, +\infty[$.

$$\int_{1}^{B} \frac{1}{t\sqrt{t}}\ dt \ = \ \int_{1}^{B} t^{-\frac{3}{2}}\ dt = \left[ \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_{1}^{B} = -2 \ \left[ \frac{1}{\sqrt{t}} \right]_{1}^{B} \ = \ -2 \left( \frac{1}{\sqrt{B}} - 1 \right) \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} 2$$

*3)* On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\ dt$ est convergente.
De plus : $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\ dt = 2$.

## II.2. Extension à des fonctions continues sur $[a, b[$ ou $]a, b]$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

- Soit $f : [a, b[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b[$.
  - $\times$ On dit que l'objet $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est une **intégrale impropre en** $b$.
  - $\times$ On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est **convergente** si la fonction :

$$\begin{array}{ccc} [a, b[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt \end{array}$$

admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $b$.
Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est donnée par :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\, dt \ = \ \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\, dt}$$

  - $\times$ Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ **diverge**.

- Soit $f : ]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]a, b]$.
  - $\times$ On dit que l'objet $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est une **intégrale impropre en** $a$.
  - $\times$ On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est **convergente** si la fonction :

$$\begin{array}{ccc} ]a, b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_x^b f(t)\, dt \end{array}$$

admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $a$.
Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est donnée par :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\, dt \ = \ \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)\, dt}$$

  - $\times$ Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ **diverge**.

- Soit $f : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]a,b[$.
  - $\times$ On dit que l'objet $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est une **intégrale impropre à la fois en $a$ et $b$.**
  - $\times$ On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est **convergente** s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ sont toutes deux convergentes.
    *(dans la pratique, on prend n'importe quel $c \in \,]a,b[$)*
    Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est donnée par :
    $$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt \;=\; \int_a^c f(t)\,dt \;+\; \int_c^b f(t)\,dt}$$
  - $\times$ Dans le cas contraire, *i.e.* si, pour tout $c \in \,]a,b[$, l'une des intégrales impropres $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ ou $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ diverge, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ **diverge**.
    *(en pratique, considérer un seul élément $c \in \,]a,b[$ suffit pour conclure)*

`MÉTHODO` : étude de l'objet $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ où $f$ est continue sur $[a,b[$.

*1)* On rappelle que $f$ est continue sur $[a,b[$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est impropre seulement en $b$.

*2)* On introduit $B \in [a,b[$ et on étudie si $\displaystyle\int_a^B f(t)\,dt$, intégrale sur le segment $[a,B]$, admet une limite finie lorsque $B \to b$.
*(comme $f$ est continue sur $[a,b[$, $f$ est aussi continue sur $[a,B]$)*

*3)* Si c'est le cas, on conclut que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente.
Dans le cas contraire, cette intégrale impropre est divergente.

**Exemple**

Étude de la nature de $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{t-2}\,dt$.

*1)* La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t-2}$ est continue sur $[0,2[$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt$ est impropre seulement en 2.

*2)* Soit $B \in [0,2[$.

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^B \frac{1}{t-2}\,dt & = & \big[\ \ln(|t-2|)\ \big]_0^B \\ & = & \big[\ \ln(2-t)\ \big]_0^B \\ & = & \ln(2-B) - \ln(2) \underset{B\to 2}{\longrightarrow} -\infty \end{array}$$

*3)* L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{t-2}\,dt$ est donc divergente.

### II.3. Extension à des fonctions continues sur un intervalle quelconque

#### II.3.a) Intervalle ouvert quelconque

Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

- Soit $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]a, b[$.
  - × On dit que l'objet $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est une **intégrale impropre à la fois en** $a$ **et** $b$.
  - × On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est **convergente** s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\ dt$ sont toutes deux convergentes.
    *(dans la pratique, on prend n'importe quel $c \in ]a, b[$)*
    Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est donnée par :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt \ = \ \int_a^c f(t)\ dt \ + \ \int_c^b f(t)\ dt}$$

  - × Dans le cas contraire, *i.e.* si, pour tout $c \in ]a, b[$, l'une des intégrales impropres $\displaystyle\int_a^c f(t)\ dt$ ou $\displaystyle\int_c^b f(t)\ dt$ diverge, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ **diverge**.
    *(en pratique, considérer un seul élément $c \in ]a, b[$ suffit)*

**Exemple**

Étude de la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\ dt$.

***1)*** La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ est impropre à la fois en 0 et en $+\infty$.

***2)*** • Étudions la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\ dt$.

***(i)*** La fonction $f$ est continue sur $]0, 1]$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ est impropre seulement en 0.

***(ii)*** Soit $A \in ]0, 1]$.

$$\int_A^1 \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\ dt \ = \ -\int_A^1 \frac{-1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\ dt \ = \ -\Big[\ \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\ \Big]_A^1 \ = \ -(\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-\sqrt{A}}) \ = \ \mathrm{e}^{-\sqrt{A}}-\frac{1}{\mathrm{e}} \underset{A\to 0}{\longrightarrow} 1-\frac{1}{\mathrm{e}}$$

***(iii)*** On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\ dt$ est convergente.
De plus : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\ dt = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

- Étudions maintenant la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\ dt$.

  ***(i)*** La fonction $f$ est continue sur $[1, +\infty[$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ dt$ est impropre seulement en $+\infty$.

  ***(ii)*** Soit $B \in [1, +\infty[$.

$$\begin{aligned}\int_1^{B} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\ dt &= -\Big[\ e^{-\sqrt{t}}\ \Big]_1^B \\ &= -(e^{-\sqrt{B}} - e^{-1}) \\ &= \frac{1}{e} - e^{-\sqrt{B}} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}\end{aligned}$$

  ***(iii)*** On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\ dt$ est convergente.

  De plus : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\ dt = \frac{1}{e}$.

***3)*** On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente. De plus :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\ dt &= \int_0^{1} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\ dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\ dt \\ &= \left(1 - \frac{1}{e}\right) + \frac{1}{e} \\ &= 1\end{aligned}$$

### II.3.b) Extension au cas des fonctions ayant un nombre fini de points de discontinuité sur un intervalle $I$

Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Soit $f$ une fonction ayant un nombre fini de points de discontinuité sur l'intervalle $]a, b[$ (ou $]a, b]$, ou $[a, b[$ ou $[a, b]$).
Autrement dit, il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que $f$ est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$.

- On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est convergente si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, les intégrales impropres $\displaystyle\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)\ dt$ sont convergentes.

  Si c'est le cas la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est donnée par :

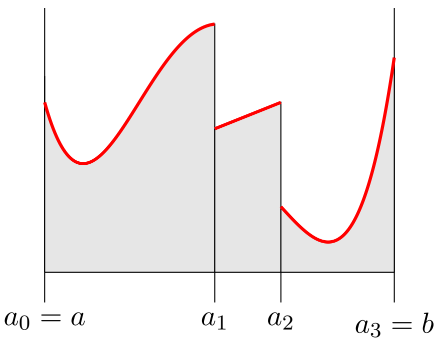
$$\int_a^b f(t)\ dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)\ dt$$

**Un cadre idéal : le cas des fonctions continues par morceaux**

- Une fonction $f$ est dite continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ :
  - × $f$ est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$,
  - × $f$ admet une limite à droite finie en $a_i$,
  - × $f$ admet une limite à gauche finie en $a_{i+1}$.
- On peut alors, pour tout intervalle $]a_i, a_{i+1}[$, considérer la fonction $\tilde{f}_i$ obtenue par prolongement par continuité de $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ sur $[a_i, a_{i+1}]$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ apparaît alors comme somme d'intégrales de fonctions continues sur un segment, ce qui démontre la bonne définition d'un tel objet :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\, dt \ = \ \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \tilde{f}_i(t)\, dt}$$

**Représentation graphique.**




# III. Calcul des intégrales impropres convergentes

## III.1. Primitive à vue d'une intégrale impropre : un exemple

On renvoie aux tableaux de primitives usuelles.

## III.2. Intégration par parties

### III.2.a) Intégration par parties d'une intégrale d'une fonction continue sur un segment

Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $I$.
Soit $(a, b) \in I^2$.

$$\boxed{\int_a^b u'(t)\ v(t)\ dt = [\ u(t)\ v(t)\ ]_a^b - \int_a^b u(t)\ v'(t)\ dt}$$

Ce qu'on peut lire :

$$\boxed{\int_a^b u(t)\ v'(t)\ dt = [\ u(t)\ v(t)\ ]_a^b - \int_a^b u'(t)\ v(t)\ dt}$$

*Démonstration.*
Pour simplifier les écritures, on suppose $a < b$.

- La fonction $u'v + uv'$ est continue sur $I$ comme somme et produits de deux fonctions continues sur $I$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (u'v+uv')(t)\ dt$ est bien définie.
- Or, d'après la formule de dérivation d'un produit :
$$(uv)' = u'v + uv'$$
On en déduit :
$$\int_a^b (u'v+uv')(t)\ dt = \Big[\ u(t)v(t)\ \Big]_a^b$$
- Enfin, par linéarité de l'intégrale :
$$\int_a^b (u'v+uv')(t)\ dt = \int_a^b (u'v)(t)\ dt + \int_a^b (uv')(t)\ dt$$
□

**Remarque**
Effectuer une IPP consiste donc à écrire la fonction dont on doit calculer l'intégrale comme un produit de deux fonctions $(u \times v')$ :

× dont l'une sera dérivée $(u \rightsquigarrow u')$,

× et l'autre sera intégrée $(v' \rightsquigarrow v)$.

**Exemple**

- $\displaystyle\int_1^2 \ln(t)\ dt = \Big[\ t\ln(t)\ \Big]_1^2 - \int_1^2 1\ dt = 2\ln(2) - 1$
- $\displaystyle\int_1^2 t^2\ln(t)\ dt = \frac{1}{3}\Big[\ t^3\ln(t)\ \Big]_1^2 - \frac{1}{3}\int_1^2 t^2\ dt = \dots$
- $\displaystyle\int_1^2 t^k\ln(t)\ dt = \frac{1}{k+1}\Big[\ t^{k+1}\ln(t)\ \Big]_1^2 - \frac{1}{k+1}\int_1^2 t^k\ dt = \dots$
- $\displaystyle\int_1^2 (\ln(t))^2\ dt = \Big[\ (\ln(t))^2\ \Big]_1^2 - 2\int_1^2 \ln(t)\ dt = \dots$
- $\displaystyle\int_1^2 \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}\ dt = -\frac{1}{2}\Big[\ (t^2+1)^{-1}\ln(t)\ \Big]_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{t(1+t^2)}\ dt$
Or $\displaystyle\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}$ donc …
- $\displaystyle\int_0^1 t^3\mathrm{e}^{t^2}\ dt = \frac{1}{2}\Big[\ t^2\mathrm{e}^{t^2}\ \Big]_0^1 - \int_0^1 t\mathrm{e}^{t^2}\ dt = \dots$

`À RETENIR`

Il faut s'empresser de dériver la fonction ln : en la dérivant, on tombe sur le calcul de la primitive d'une fonction rationnelle.

**Application : calcul d'une primitive de** $\ln$
Soit $x > 0$.
Le calcul précédent fournit la primitive de la fonction ln qui s'annule en 1.
$$\int_1^x \ln(t)\ dt = \Big[\ t\ln(t)\ \Big]_1^x - \int_1^x 1\ dt = x\ln(x) - (x-1)$$

### III.2.b) Intégration par parties d'une intégrale impropre : un exemple

**Exemple**

Étude de la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}{t^3}\, dt$.

*1)* La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}{t^3}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ est impropre seulement en $+\infty$.

*2)* Soit $B \in [1, +\infty[$.
On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{ll} u(t) = \dfrac{1}{t} & u'(t) = -\dfrac{1}{t^2} \\[2mm] v'(t) = \dfrac{1}{t^2}\, \mathrm{e}^{\frac{1}{t}} & v(t) = -\mathrm{e}^{\frac{1}{t}} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, B]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_1^B \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}{t^3}\, dt &= \left[ -\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}{t} \right]_1^B - \int_1^B \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}{t^2}\, dt = \left( \mathrm{e}^1 - \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{B}}}{B} \right) - \left[ -\mathrm{e}^{\frac{1}{t}} \right]_1^B \\ &= \left( \cancel{\mathrm{e}^1} - \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{B}}}{B} \right) - \left( \cancel{\mathrm{e}^1} - \mathrm{e}^{\frac{1}{B}} \right) = \mathrm{e}^{\frac{1}{B}} - \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{B}}}{B} \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

*3)* On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente. De plus : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt = 1$.

## III.3. Changement de variable

### III.3.a) Changement de variable pour une intégrale d'une fonction continue

> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle $I$.
> Soit $\varphi$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J = [\alpha, \beta]$ tq $\varphi([\alpha, \beta]) \subseteq I$.
>
> $$\boxed{\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\, dt = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\, \varphi'(t)\, dt}$$

*Démonstration.*

- La fonction $f$ est continue sur l'intervalle $I$.
Elle admet donc une primitive $F$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\, dt &= [\, F(t)\, ]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha) = [\, (F \circ \varphi)(t)\, ]_\alpha^\beta \end{aligned}$$

- Par composée, la fonction $F \circ \varphi$ est $\mathcal{C}^1$ sur $J$. De plus :

$$(F \circ \varphi)' = F' \circ \varphi \times \varphi' = f \circ \varphi \times \varphi'$$

- On en déduit :

$$[\, (F \circ \varphi)(t)\, ]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta f \circ \varphi \times \varphi'(t)\, dt$$

□

**Aspect pratique**

- MÉTHODO : calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{\mathrm{e}^t+1}$ à l'aide du changement de variable $\boxed{u = \mathrm{e}^t}$

$$\left|\begin{array}{l} u = \mathrm{e}^t \ (\text{donc } t = \ln(u)) \\ \hookrightarrow du = \mathrm{e}^t\ dt \quad \text{et} \quad dt = \dfrac{1}{\mathrm{e}^t}\,du = \dfrac{1}{u}\,du \\ \bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ u = \mathrm{e}^1 \\ \bullet\ t = 2 \ \Rightarrow\ u = \mathrm{e}^2 \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto \ln(u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\mathrm{e}, \mathrm{e}^2]$.
En remplaçant $dt$ par $\dfrac{1}{u}\,du$ et $\mathrm{e}^t$ par $u$, on obtient :

$$\int_1^2 \frac{dt}{\mathrm{e}^t+1} = \int_{\mathrm{e}^1}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{u+1}\,\frac{1}{u}\,du$$

ce qui correspond au calcul précédent.

- MÉTHODO : calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t+2\sqrt{t}}$ à l'aide du changement de variable $\boxed{u = \sqrt{t}}$

$$\left|\begin{array}{l} u = \sqrt{t} \quad (\text{donc } t = u^2) \\ \hookrightarrow du = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\ dt \quad \text{et} \quad dt = 2\sqrt{t}\,du = 2\,u\,du \\ \bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ u = \sqrt{1} = 1 \\ \bullet\ t = 2 \ \Rightarrow\ u = \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto u^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, \sqrt{2}]$.
On obtient :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dt}{t+2\sqrt{t}} &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{u^2+u}\,2u\ du = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\cancel{u}(u+1)}\,2\cancel{u}\ du \\ &= 2\left[\ \ln(|u+1|)\ \right]_1^{\sqrt{2}} = 2\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right) \end{aligned}$$

- MÉTHODO : calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^t}}\ dt$ en posant $\boxed{u = \sqrt{1+\mathrm{e}^t}}$

$$\left|\begin{array}{l} u = \sqrt{1+\mathrm{e}^t} \quad (\text{donc } \mathrm{e}^t = u^2-1 \text{ et } t = \ln(u^2-1)) \\ \hookrightarrow du = \dfrac{\mathrm{e}^t}{2\sqrt{1+\mathrm{e}^t}}\ dt \quad \text{et} \quad dt = \dfrac{2\sqrt{1+\mathrm{e}^t}}{\mathrm{e}^t}\,du = \dfrac{2\,u}{u^2-1}\,du \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = \sqrt{1+\mathrm{e}^0} = \sqrt{2} \\ \bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ u = \sqrt{1+\mathrm{e}} \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto \ln(u^2-1)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\sqrt{2}, \sqrt{1+\mathrm{e}}]$. On obtient : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^t}}\ dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+\mathrm{e}}} \frac{1}{\cancel{u}}\,\frac{2\,\cancel{u}}{u^2-1}\ du.$

On termine ce calcul en remarquant que : $\dfrac{1}{u^2-1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{u-1} - \dfrac{\frac{1}{2}}{u+1}$.

### III.3.b) Changement de variable pour une intégrale impropre : un exemple

**Exemple**

Étude de la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t+1}$.

*1)* La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{e^t+1}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ est impropre seulement en $+\infty$.

*2)* Soit $B \in [0, +\infty[$. Posons le changement de variable $\boxed{u = e^t}$.

$u = e^t$ (donc $t = \ln(u)$)

$\hookrightarrow du = e^t\ dt$ et $dt = \dfrac{du}{e^t} = \dfrac{du}{u}$

- Si $t = 0$ alors $u = e^0 = 1$
- Si $t = B$ alors $u = e^B$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto \ln(u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, e^B]$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^B \frac{dt}{e^t+1} &= \int_1^{e^B} \frac{du}{u(u+1)} = \int_1^{e^B} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du \\
&= \int_1^{e^B} \frac{du}{u} - \int_1^{e^B} \frac{du}{u+1} = [\ \ln(|u|)\ ]_1^{e^B} - [\ \ln(|u+1|)\ ]_1^{e^B} \\
&= \ln\left(\frac{e^B}{e^B+1}\right) + \ln(2) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)
\end{aligned}$$

car $\dfrac{e^B}{e^B+1} \underset{B\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^B}{e^B} = 1$ et donc : $\ln\left(\dfrac{e^B}{e^B+1}\right) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$.

*3)* Ainsi, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente.

De plus : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt = \ln(2)$.

### III.3.c) Changement de variable et parité dans le cas d'une intégrale impropre

Soit $a \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et soit $f : ]-a, a[ \to \mathbb{R}$ <u>continue</u> sur $]-a, a[$.

- Si $f$ est paire :

  *1)* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\ dt$ est convergente $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\int_0^{a} f(t)\ dt$ est convergente.

  *2)* Dans ce cas : $\boxed{\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\ dt = 2\int_0^{a} f(u)\ du}$

- Si $f$ est impaire :

  *1)* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\ dt$ est convergente $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\int_0^{a} f(t)\ dt$ est convergente.

  *2)* Dans ce cas : $\boxed{\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\ dt = 0}$

# IV. Intégrales classiques

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

*1)* $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt \text{ est convergente } \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1}$

*(intégrales de Riemann impropres en $+\infty$)*

$$\boxed{\text{De plus, si } \alpha > 1 \text{ alors } \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \frac{1}{\alpha - 1}.}$$

*2)* $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\, dt \text{ est convergente } \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 0}$

$$\boxed{\text{De plus, si } \alpha > 0 \text{ alors } \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\, dt = \frac{1}{\alpha}.}$$

*(il faut savoir retrouver ce résultat à l'aide d'une v.a.r. $X$ telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$)*

*Démonstration.*

*1)* La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ est impropre seulement en $+\infty$.

Soit $B \in [1, +\infty[$.

Si $\alpha = 1$ : $\displaystyle\int_1^B \frac{1}{t}\, dt = [\ \ln(|t|)\ ]_1^B = \ln(B)$

Comme $\ln(B) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$ diverge.

Si $\alpha \neq 1$ : $\displaystyle\int_1^B \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \int_1^B t^{-\alpha}\, dt = \left[\ \frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\ \right]_1^B = \frac{B^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1}$

Enfin si $-\alpha + 1 < 0$ alors $B^{-\alpha+1} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

et si $-\alpha + 1 > 0$ alors $B^{-\alpha+1} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

*2)* La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Soit $B \in [0, +\infty[$.

Si $\alpha = 0$ : $\displaystyle\int_0^B 1\, dt = [\ t\ ]_0^B = B$

Comme $B \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\, dt$ diverge.

Si $\alpha \neq 0$ : $\displaystyle\int_0^B \mathrm{e}^{-\alpha t}\, dt = \left[\ \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{-\alpha}\ \right]_0^B = -\left(\frac{\mathrm{e}^{-\alpha B}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} - \frac{\mathrm{e}^{-\alpha B}}{\alpha}$

Enfin si $\alpha > 0$ alors $\mathrm{e}^{-\alpha B} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

et si $\alpha < 0$ alors $\mathrm{e}^{-\alpha B} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. $\square$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\, dt \text{ est convergente} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1}$$

*(critère de Riemann pour les intégrales impropres en* $0$*)*

# V. Le cas des fonctions continues positives

## V.0. Rappel : théorème de la limite monotone

On rappelle ici le théorème de la limite monotone, résultat fondamental pour le reste de la section mais trop souvent oublié car peu utilisé dans les sujets de concours.

Soit $f$ une fonction monotone sur $I = \,]a, b[$ $(a < b)$.
(avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$)

*1)* Si $x_0 \in I$ : $f$ admet une limite **finie** à gauche et à droite en $x_0$.

*2)* Si $x_0 = a$ : $f$ admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en $x_0$.

*a)* si $f$ est croissante, $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = \begin{cases} \inf\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est minorée} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}}$

*b)* si $f$ est décroissante, $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est majorée} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}}$

*3)* Si $x_0 = b$ : $f$ admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en $x_0$.

*a)* si $f$ est croissante, $\boxed{\lim\limits_{x \to b} f(x) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est majorée} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}}$

*b)* si $f$ est décroissante, $\boxed{\lim\limits_{x \to b} f(x) = \begin{cases} \inf\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est minorée} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}}$

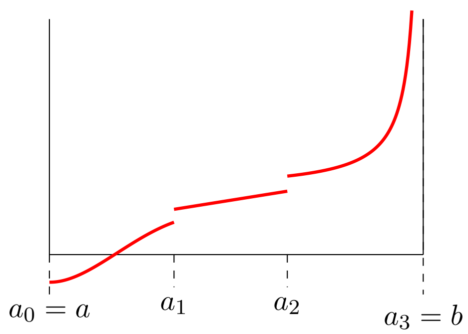
En résumé :

× si une fonction $f$ est monotone sur un intervalle $I$, elle admet des limites à gauche et à droite de tout point intérieur à l'intervalle $I$.

× les limites à gauche et à droite en un point ne sont pas forcément égales.

× les limites ne sont pas forcément finies. C'est l'hypothèse de majoration / minoration (suivant les cas) qui permet de conclure quant au caractère fini ou non.

**Représentation graphique.**




La fonction $f$ représentée à gauche est croissante sur $]a, b[$. D'après le théorème précédente, elle admet donc des limites à gauche et à droite en en tout point intérieur à $]a, b[$.

- La limite à gauche en $a_1$ est finie car $f$ est croissante et majorée sur $]a, a_1[$.
- La limite à droite en $a_1$ est finie car $f$ est croissante et minorée sur $]a_1, a_2[$.
- La limite (à gauche) en $b$ est infinie car $f$ est croissante et non majorée sur $]a_2, b[$.

## V.1. Critère de convergence d'une intégrale généralisée d'une fonction continue positive

### V.1.a) Cas d'un intégrale impropre en $b$

Soient $a < b \leqslant +\infty$ et $f : [a,b[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b[$.

Notons $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$.

Supposons : $\forall x \in [a,b[,\ f(x) \geqslant 0$.

*0)* La fonction $F$ est croissante.

*1)* $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt \text{ est convergente} \quad \Leftrightarrow \quad F \text{ est majorée}}$

*2)* Si $F$ est non majorée, $\displaystyle\lim_{x\to b} F(x) = +\infty$.

### V.1.b) Cas d'une intégrale impropre en $a$

Soient $-\infty \leqslant a < b$ et $f : ]a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]a,b]$.

Notons $G : x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\ dt$.

Supposons : $\forall x \in ]a,b],\ f(x) \geqslant 0$.

*0)* La fonction $G$ est décroissante.

*1)* $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt \text{ est convergente} \quad \Leftrightarrow \quad G \text{ est majorée}}$

*2)* Si $G$ est non majorée, $\displaystyle\lim_{x\to a} G(x) = +\infty$.

*Démonstration.*

- La fonction $f$ étant continue sur $]a,b]$, elle admet une primitive $F$ sur $]a,b]$.
  Alors, pour tout $x \in ]a,b]$ :
  $$\int_x^b f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_x^b = F(b) - F(x)$$
  La fonction $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b]$ et :
  $$\forall x \in [a,b[,\ G'(x) = -F'(x) = -f(x) \leqslant 0$$
  Ainsi, $G$ est décroissante sur $]a,b]$.
- En vertu du théorème de la limite monotone, $G$ admet donc une limite éventuellement infinie (à droite) en $a$. De plus :
  - × cette limite est finie si $G$ est majorée.
    *(oui, la condition est bien $G$ majorée et pas minorée !)*
  - × cette limite est $+\infty$ si $G$ non majorée. □

## V.2. Règles de comparaison

### V.2.a) Comparaison par inégalité

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$).
Soient $f, g : [a, b[ \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).
Supposons : $\forall t \in [a, b[,\ 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$.

*1)* Alors on a :

**a.** $\boxed{\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt \text{ est convergente} \quad\Rightarrow\quad \int_a^b f(t)\,dt \text{ est convergente}}$

**b.** $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \text{ est divergente} \quad\Rightarrow\quad \int_a^b g(t)\,dt \text{ est divergente}}$

*2)* De plus, dans le cas de la convergence, on a :

$$\boxed{0 \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt}$$

### V.2.b) Comparaison par négligeabilité

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$).
Soient $f, g : [a, b[ \to \mathbb{R}$ deux fonctions :
× continues sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).
× positives sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).
Supposons de plus : $f(t) \underset{t \to b}{=} o(g(t))$ (resp. $f(t) \underset{t \to a}{=} o(g(t))$).

**a.** $\boxed{\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt \text{ est convergente} \quad\Rightarrow\quad \int_a^b f(t)\,dt \text{ est convergente}}$

**b.** $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \text{ est divergente} \quad\Rightarrow\quad \int_a^b g(t)\,dt \text{ est divergente}}$

### V.2.c) Comparaison par équivalence

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$).
Soient $f, g : [a, b[ \to \mathbb{R}$ deux fonctions :
× continues sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).
× positives sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).
Supposons de plus : $f(t) \underset{t \to b}{\sim} g(t)$ (resp. $f(t) \underset{t \to a}{\sim} g(t)$).

$$\boxed{\text{Alors } \int_a^b f(t)\,dt \text{ et } \int_a^b g(t)\,dt \text{ sont de même nature.}}$$

**Exemple**

- <u>`MÉTHODO`</u> : étude de la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\, dt$.

  *1)* La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ est impropre seulement en $+\infty$.

  *2)* On a :

  × $\forall t \in [1, +\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.

  × L'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, dt$ est convergente.

  Ainsi, par le théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\, dt$ est convergente.

- <u>`MÉTHODO`</u> : étude de la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$.

  *1)* La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est impropre seulement en $+\infty$.

  *2)* On a :

  × $\forall t \in [0, +\infty[,\ \ \mathrm{e}^{-t^2} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$

  × $\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{-t}\right)$

  × L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, dt$ est convergente.

  Ainsi, par le théorème de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$ est convergente.

- <u>`MÉTHODO`</u> : étude de la nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}\, dt$.

  *1)* La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $[2, +\infty[$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\, dt$ est impropre seulement en $+\infty$.

  *2)* On a :

  × $\forall t \in [2, +\infty[,\ \ \dfrac{1}{t} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{1}{\ln(t)} \geqslant 0$

  × $\dfrac{1}{t} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\ln(t)}\right)$ *(comprendre que* $\dfrac{1}{\ln(t)}$ *est grand devant* $\dfrac{1}{t}$*)*

  × L'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ est divergente en tant qu'intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $1 \not> 1$.

  Ainsi, par le théorème de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}\, dt$ est divergente.

- MÉTHODO : étude de la nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\, dt$.

*1)* La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}$ est continue sur $]0,1]$.

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$ est impropre seulement en 0.

*2)* On a :

× $\forall t \in ]0,1],\ \dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$

× $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$

× L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2}\, dt$ est une intégrale de Riemann impropre en 0 d'exposant 2 ($2 \not< 1$). Elle est donc divergente.

Ainsi, par le théorème d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$ est divergente.

## V.3. Critère de convergence d'une intégrale généralisée d'une fonction continue négative

- Si la fonction $f$ considérée est continue et négative sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$, resp. $]a,b[$), on se ramène aux cas précédents en considérant la fonction $-f$ qui est positive sur cet intervalle.
- En réalité, les théorèmes précédents auraient pu être énoncés dans le cas de fonctions continues négatives. La bonne hypothèse est donc celle de fonction continue et **de signe constant** sur l'intervalle considéré.

## V.4. Critère de convergence d'une intégrale généralisée d'une fonction continue de signe quelconque

### V.4.a) Notion convergence absolue

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$, resp. $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$).
Soient $f : [a,b[ \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$, resp. $]a,b[$).

- On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est **absolument convergente** si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b |\, f(t)\, |\, dt$ est convergente.
- $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt \text{ est absolument convergente} \ \Rightarrow\ \int_a^b f(t)\, dt \text{ est convergente}}$
- Dans le cas où l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est absolument convergente, on a :

$$\boxed{\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leqslant \int_a^b |\, f(t)\, |\, dt}$$

*(inégalité triangulaire)*

# VI. Comparaison séries / intégrales

On considère une fonction $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ continue sur $[0, +\infty[$.

On suppose de plus que $f$ est décroissante sur $[0, +\infty[$. Alors :

*1)* $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\, dt \leqslant f(k-1)}$

*2)* On en déduit, par sommation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \boxed{S_n - f(0) = \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_{0}^{n} f(t)\, dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k-1) = S_{n-1}}$$

*(prudence lors de la sommation : pour quels entiers $k$ peut-on sommer ?)*

*3)* Si, de plus, $f$ est positive, on a :

$$\boxed{\text{La série } \sum f(n) \text{ est convergente} \Leftrightarrow \text{L'intégrale impropre } \int_{0}^{+\infty} f(t)\, dt \text{ est convergente}}$$

*(la série $\sum f(n)$ et l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\, dt$ sont de même nature)*

*Démonstration.*

*1)* Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $t \in [k-1, k]$.

$$\begin{array}{llllll} \text{Comme} & k-1 & \leqslant & t & \leqslant & k \\ \text{alors} & f(k-1) & \geqslant & f(t) & \geqslant & f(k) \end{array}$$

*(par décroissance de la fonction $f$ sur $[0, +\infty[$)*

- La fonction $f$ est continue sur le **segment** $[k-1, k]$.
  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\, dt$ est bien définie.
  De plus, par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k - 1 \leqslant k$) :

$$\underbrace{\int_{k-1}^{k} f(k-1)\, dt}_{= \big(k-(k-1)\big)\, f(k-1)} \geqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt \geqslant \underbrace{\int_{k-1}^{k} f(k)\, dt}_{= \big(k-(k-1)\big)\, f(k)}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt \leqslant f(k-1)}$$

*2)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient, par sommation des inégalités précédentes :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt}_{= \int_{0}^{n} f(t)\, dt} \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k-1)$$

*(d'après la relation de Chasles)*

Enfin : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) = S_n - f(0)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k-1) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) = S_{n-1}$. □

# VII. Propriétés des intégrales impropres

## VII.1. Relation de Chasles

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$).

Soit $f : [a, b[ \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).

Supposons de plus que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ <u>est convergente</u>.

Soit $c \in [a, b[$. Alors on a :

***a)*** L'intégrale impropre $\displaystyle\int_c^b f(t)\ dt$ est convergente.

***b)*** De plus, on a : $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^c f(t)\ dt + \int_c^b f(t)\ dt}$

*Démonstration.*

***1)*** La fonction $f$ est continue sur $[a, b[$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est impropre seulement en $b$.

***2)*** Soient $B \in [a, b[$ et $c \in [a, b[$. D'après la relation de Chasles sur un segment :

$$\begin{array}{rrcl} & \displaystyle\int_a^B f(t)\ dt & = & \displaystyle\int_a^c f(t)\ dt + \int_c^B f(t)\ dt \\ \text{et donc} & \displaystyle\int_c^B f(t)\ dt & = & \displaystyle\int_a^B f(t)\ dt - \int_a^c f(t)\ dt \end{array}$$

Or :

× l'intégrale $\displaystyle\int_a^c f(t)\ dt$ est bien définie car $f$ est continue sur le segment $[a, c]$.
Cette intégrale est donc un réel indépendant de $B$. Ainsi : $\displaystyle\int_a^c f(t)\ dt \underset{B\to b}{\longrightarrow} \int_a^c f(t)\ dt$.

× par hypothèse, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est convergente.
Donc la quantité $\displaystyle\int_a^B f(t)\ dt$ admet une limite finie lorsque $B \to b$.

***3)*** Ainsi, $\displaystyle\int_c^B f(t)\ dt$ admet aussi une limite finie lorsque $B \to b$ et, par passage à la limite :

$$\int_c^b f(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ dt - \int_a^c f(t)\ dt$$

□

### VII.2. Linéarité de l'intégration

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$).
Soit $f, g : [a, b[ \to \mathbb{R}$ continues sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).
Supposons que les intégrales impropres $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$ sont convergentes.

***a)*** $\displaystyle\int_a^b (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(t)\, dt$ est convergente.

***b)*** De plus : $\boxed{\displaystyle\int_a^b (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(t)\, dt \;=\; \lambda \int_a^b f(t)\, dt \;+\; \mu \int_a^b g(t)\, dt}$

*Démonstration.*

***1)*** La fonction $f$ est continue sur $[a, b[$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est impropre seulement en $b$.

***2)*** Soit $B \in [a, b[$. Par linéarité de l'intégration sur un segment :

$$\int_a^B (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(t)\, dt \;=\; \lambda \int_a^B f(t)\, dt \;+\; \mu \int_a^B g(t)\, dt$$

Les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$ sont convergentes donc $\displaystyle\int_a^B f(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_a^B g(t)\, dt$ admettent chacune une limite finie lorsque $B \to b$. On en déduit que $\displaystyle\int_a^B (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(t)\, dt$ admet une limite finie lorsque $B \to b$.

***3)*** Par passage à la limite dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\int_a^b (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(t)\, dt \;=\; \lambda \int_a^b f(t)\, dt \;+\; \mu \int_a^b g(t)\, dt$$

□

### VII.3. Techniques de majoration, minoration

#### VII.3.a) Positivité

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$).
Soit $f : [a, b[ \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).
Supposons que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est convergente.
Et supposons enfin : $\forall t \in [a, b[,\ f(t) \geqslant 0$.

***a)*** Les bornes d'intégration étant dans l'ordre croissant : $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt \;\geqslant\; 0}$

***b)*** $\boxed{f \;>\; 0 \text{ sur } [a, b[ \quad\Rightarrow\quad \displaystyle\int_a^b f(t)\, dt \;>\; 0}$

***c)*** $\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ \displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = 0 \\ \bullet\ f \text{ continue et positive sur } [a, b[ \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad f = 0 \text{ sur } [a, b[}$

### VII.3.b) Croissance de l'intégration

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$).

Soit $f : [a, b[ \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).

Supposons que les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ sont convergentes.

Et supposons enfin : $\forall t \in [a, b[,\ f(t) \leqslant g(t)$.

Les bornes d'intégration étant dans l'ordre croissant :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt \ \leqslant\ \int_a^b g(t)\ dt}$$

*Démonstration.*

La fonction $g - f$ est :

× continue sur $[a, b[$,

× vérifie : $\forall t \in [a, b[,\ (g - f)(t) \geqslant 0$.

L'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b (g-f)(t)\ dt$ est convergente car $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ le sont.

Par croissance de l'intégration, les bornes d'intégration étant dans l'ordre croissant ($b > a$) :

$$\int_a^b (g-f)(t)\ dt \geqslant 0$$

Enfin, par linéarité de l'intégration : $\displaystyle\int_a^b (g-f)(t)\ dt = \int_a^b g(t)\ dt - \int_a^b f(t)\ dt$. □

### VII.3.c) Inégalité de la moyenne (pour une intégrale sur un segment)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ *(pas de borne infinie pour ce résultat)*.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$.

Les bornes d'intégration étant dans l'ordre croissant :

$$\boxed{(b-a) \min_{t \in [a,b]} (f(t)) \ \leqslant\ \int_a^b f(t)\ dt \ \leqslant\ (b-a) \max_{t \in [a,b]} (f(t))}$$

*Démonstration.*

La fonction $f$ est continue sur le segment $[a, b]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes.

Ainsi, $\displaystyle\min_{t \in [a,b]} (f(t))$ et $\displaystyle\max_{t \in [a,b]} (f(t))$ existent bien. Soit $t \in [a, b]$. On a :

$$\min_{t \in [a,b]} (f(t)) \ \leqslant\ f(t) \ \leqslant\ \max_{t \in [a,b]} (f(t))$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($b \geqslant a$), on obtient :

$$\int_a^b \min_{t \in [a,b]} (f(t))\ dt \ \leqslant\ \int_a^b f(t)\ dt \ \leqslant\ \int_a^b \max_{t \in [a,b]} (f(t))\ dt$$

$$\text{ainsi } (b-a) \min_{t \in [a,b]} (f(t)) \ \leqslant\ \int_a^b f(t)\ dt \ \leqslant\ (b-a) \max_{t \in [a,b]} (f(t))$$

□

# Informations concernant cette semaine de colles

## Questions de cours

Cette semaine, les questions de cours sont les suivantes :

- théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives : étude d'un exemple donné par le colleur.
- primitives à vue : les 3 formules (la $1^{\text{ère}}$ n'est qu'un cas particulier de la $2^{\text{ème}}$) de la page 4.
  Un élève qui ne connaît pas ces 3 formules est exclu de colle et invité à aller apprendre son cours.
- caractéristiques des lois à densité usuelles (densité, fonction de répartition, espérance, variance et moment d'ordre 2).

La colle commence par la détermination de la nature d'une intégrale généralisée à l'aide d'un critère de comparaison et la demande des caractéristiques d'une loi à densité usuelle.

## Exercices types

Les compétences attendues sur le chapitre intégration sont les suivantes :

- savoir étudier une intégrale fonction de ses bornes.
- savoir calculer une intégrale d'une fonction continue par un segment :
  × par primitive à vue,
  × par intégration par parties,
  × par changement de variable.
- savoir utiliser ces méthodes pour l'étude d'intégrales généralisées.
- étude de suites d'intégrales (impropres). Si l'énoncé introduit une suite $(I_n)$, il faut savoir distinguer les questions :
  × démontrer que (l'intégrale impropre) $I_n$ est convergente.
  × démontrer que (la suite) $(I_n)$ est convergente.
  *(savoir traiter ce genre de questions)*
- savoir démontrer qu'une intégrale est convergente par utilisation d'un théorème de comparaison (dans le cas où l'intégrande $f$ est positive).
- savoir utiliser la convergence absolue dans le cas où l'intégrande $f$ n'est pas de signe constant.
- savoir redémontrer le résultat de comparaison séries / intégrales dans un exercice.
- savoir encadrer une intégrale en commençant par encadrer son intégrande sur l'intervalle d'intégration.