Colles

semaine 17 : 17 janvier - 22 janvier

I. Les v.a.r. à densité

I.1. Définition

Soit X une v.a.r.

- On dit que la v.a.r. X **est une v.a.r. à densité** si sa fonction de répartition F_X est :
  - ***a)*** continue sur $\mathbb{R}$,
  - ***b)*** de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf (éventuellement) en un nombre fini de points.

I.2. Rappels sur les fonctions de répartition

I.2.a) Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit X une v.a.r.

- On appelle **fonction de répartition de** X et on note F_X l'application :

$$\boxed{F_X \; : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F_X(x) \; = \; \mathbb{P}([X \leqslant x]) \end{array} \right.}$$

I.2.b) Caractérisations des fonctions de répartition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit X une v.a.r.

La fonction de répartition F_X vérifie les propriétés suivantes.

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \ 0 \leqslant F_X(x) \leqslant 1$.

2) La fonction F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.

3) $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1}$

4) La fonction F_X est continue à droite en tout point $x \in \mathbb{R}$.

Autrement dit : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ \lim\limits_{\substack{t \to x \\ t > x}} F_X(t) = F_X(x)}$

5) F_X admet une limite finie à gauche en tout point $x \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ \lim\limits_{\substack{t \to x \\ t < x}} F_X(t) \; = \; F_X(x) - \mathbb{P}([X = x]) \; = \; \mathbb{P}([X < x])}$$

*Les points **2.**, **3.** et **4.** caractérisent les fonctions de répartition. Ainsi, une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie ces 3 points peut être considérée comme la fonction de répartition d'une v.a.r. X.*

I.2.c) Continuité d'une fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une v.a.r.

$$\boxed{\text{La fonction } F_X \text{ continue en } x \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}([X = x]) = 0}$$

En particulier : $\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ est à densité } \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}\big([X = x]\big) = 0}$

I.2.d) Propriété des fonctions de répartition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une v.a.r.

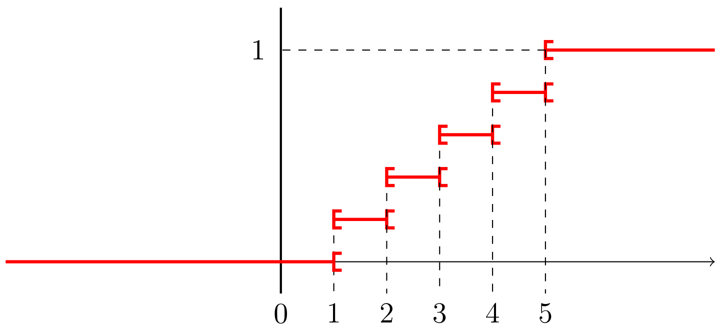
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$.

$$\boxed{\mathbb{P}([a < X \leqslant b]) = F_X(b) - F_X(a)}$$

I.3. Toutes les v.a.r. ne sont pas à densité

Exemple

Une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 5]\!])$ est-elle une densité ?
Rappelons la fonction de répartition d'une telle v.a.r.



- Ici, F_X est bien $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[\cup]1, 2[\cup]2, 3[\cup]3, 4[\cup]4, 5[\cup]5, +\infty[$.
- Par contre, F_X n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ car non continue en les x_i.

Ainsi, si une v.a.r. **discrète finie** suit une loi uniforme, alors X n'admet pas de densité.
De manière générale :

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ est une v.a.r. discrète} \quad \Rightarrow \quad X \text{ n'admet pas de densité}}$$

Exercice

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. On pose $Y = \max(1, X)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y.

2. La v.a.r. Y est-elle une v.a.r. à densité ? discrète ?

II. Densité d'une v.a.r.

II.1. Définition

Soit X une v.a.r. à densité.

On dit qu'une fonction $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **une densité de** X si :

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f_X(x) \geqslant 0$,

b) La fonction f_X coïncide avec F_X' sauf en un nombre fini de points.
Autrement dit, il existe $\{x_1, \ldots, x_n\}$ tel que :

$$\forall x \in \,]-\infty, x_1[\, \cup \,]x_1, x_2[\, \cup \, \ldots \, \cup \,]x_{n-1}, x_n[\, \cup \,]x_n, +\infty[, \quad f_X(x) \ = \ F_X'(x)$$

(sans perte de généralité, on a supposé : $x_1 \ < \ \ldots \ < \ x_n$)

II.2. Expression de la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité

Soit X une v.a.r. admettant une densité notée f_X.

Les propriétés suivantes sont vérifiées.

1) La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en tout point où f est continue.

De plus : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{F_X(x) \ = \ \mathbb{P}([X \leqslant x]) \ = \ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ dt}$

et, en tout point où f est continue, $F'(x) = f(x)$. Plus généralement :

× si f est continue à droite en x, F_X est dérivable à droite en x.

× si f est continue à gauche en x, F_X est dérivable à gauche en x.

2) $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\ dt = 1}$ *3)* $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([X = x]) = 0}$

4) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a : $\boxed{\mathbb{P}([X < a]) \ = \ \mathbb{P}([X \leqslant a]) \ = \ \displaystyle\int_{-\infty}^{a} f_X(t)\ dt}$

$$\boxed{\mathbb{P}([X > b]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([X \leqslant b]) \ = \ \int_{b}^{+\infty} f_X(t)\ dt}$$

5) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, si $a \leqslant b$, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}([a < X \leqslant b]) \ = \ F_X(b) - F_X(a) \ = \ \int_{a}^{b} f_X(t)\ dt}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([a < X < b]) = \mathbb{P}([a < X \leqslant b]) = \mathbb{P}([a \leqslant X < b]) = \mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b])}$$

- Ce théorème illustre l'intérêt des v.a.r. à densité : on obtient la valeur de la fonction de répartition F_X et donc la loi de X sous forme d'un calcul d'intégrales (éventuellement impropres).

- Nous avons obtenu des résultats analogues dans le chapitre des v.a.r. discrètes.

	Cas discret (v.a.r. discrète)	Cas continu (v.a.r. à densité)
$\mathbb{P}([X \leqslant b])$	$\displaystyle\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \leqslant b}} \mathbb{P}([X = x])$	$\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f_X(t)\ dt$
$\mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b])$ *(avec $a \leqslant b$)*	$\displaystyle\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ a \leqslant x \leqslant b}} \mathbb{P}([X = x])$	$\displaystyle\int_{a}^{b} f_X(t)\ dt$
$\mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b])$ *(avec $a \leqslant b$)*	$F_X(b) - F_X(a) + \mathbb{P}([X = a])$	$F_X(b) - F_X(a)$
$\mathbb{P}(\Omega) = 1$	$\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x]) = 1$	$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\ dt = 1$
Régularité de F_X	En tout point $x \in \mathbb{R}$: • F_X continue à droite en x • F_X admet une limite finie à gauche en x	F_X continue sur $\mathbb{R}$

II.3. Démontrer qu'une fonction est une densité

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

La fonction f est une densité de probabilité $\Leftrightarrow$

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf (éventuellement) en un nombre fini de points,
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$,
3. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente et vaut 1.

III. Transformation d'une v.a.r. à densité

III.1. Transformation affine d'une v.a.r. à densité

Soit X une v.a.r. à densité f_X.
Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$.

1) La var $Y = aX + b$ est une v.a.r. à densité.

2) De plus, sa densité est donnée par : $\boxed{f_Y : x \mapsto \dfrac{1}{|a|}\ f_X\left(\dfrac{x-b}{a}\right)}$

III.2. Transformation polynomiale (carré)

Soit X une v.a.r. à densité f_X.

1) La var $Y = X^2$ est une v.a.r. à densité.

2) De plus, sa densité est donnée par :

$$\boxed{f_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ \Big(f_X\big(\sqrt{x}\big) + f_X\big(-\sqrt{x}\big)\Big) & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

III.3. Une transformation usuelle

Soit U une v.a.r. tel que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$.
Soit $\lambda > 0$.

$$\boxed{V = -\frac{1}{\lambda}\ \ln(1-U)\ \hookrightarrow\ \mathcal{E}(\lambda)}$$

Démonstration.

- Notons $h : x \mapsto -\dfrac{1}{\lambda}\ \ln(1-x)$, de sorte que $V = h(U)$.
  Comme $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$, alors $U(\Omega) = [0,1[$. On en déduit :

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \big(h(U)\big)(\Omega) = h\big(U(\Omega)\big) = h\big([0,1[\big) \\ &= \Big[h(0), \lim_{x\to 1} h(x)\Big[\quad \textit{(car } h \textit{ est continue et strictement croissante sur } [0,1[\ (*)\textit{)} \\ &= [0,+\infty[\end{aligned}$$

  Ainsi : $V(\Omega) = [0,+\infty[$.
  On peut démontrer $(*)$ par une rapide étude de fonction :

  × la fonction h est dérivable (donc continue) sur $[0,1[$ en tant que composée de fonctions dérivables sur les intervalles adéquats.

  × soit $x \in \,]0,1[$.

$$h'(x) = -\frac{1}{\lambda}\ \left(-\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{\lambda\,(1-x)} > 0$$

  Donc la fonction h est strictement croissante sur $[0,1[$.

- Déterminons la fonction de répartition de V.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  × Si $x < 0$, alors $[V \leqslant x] = \varnothing$ car $V(\Omega) = [0, +\infty[$. Ainsi :
  $$F_V(x) = \mathbb{P}([V \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$
  × Si $x \in [0, +\infty[$:
  $$\begin{aligned} F_V(x) &= \mathbb{P}([V \leqslant x]) = \mathbb{P}\left(\left[-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leqslant x\right]\right) \\ &= \mathbb{P}([\ln(1-U) \geqslant -\lambda x]) && \textit{(car } -\lambda < 0\textit{)} \\ &= \mathbb{P}\left(\left[1-U \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda x}\right]\right) && \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ &= \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]\right) \\ &= F_U\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right) \\ &= 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} && \textit{(car } 1-e^{-\lambda x} \in [0,1[\textit{)} \end{aligned}$$
  En effet, comme $x \geqslant 0$
  alors $-\lambda x \leqslant 0$
  d'où $0 < \mathrm{e}^{-\lambda x} \leqslant 1$ *(car la fonction* $\exp$ *est croissante sur* $\mathbb{R}$*)*
  et donc $0 \leqslant 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} < 1$

Finalement : $F_V : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, 0[\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$.

On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
Or, la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r. . Ainsi, $V \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. □

III.4. D'autres techniques à connaître

Parmi les autres autres transformées classiques, on peut citer :

× la loi de la valeur absolue d'une v.a.r. à densité. En particulier, il faut savoir écrire :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ [\ |X| \leqslant x] \ = \ [-x \leqslant X \leqslant x]}$$

× la loi de la partie entière d'une v.a.r. à densité. En particulier, il faut savoir écrire :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ [\lfloor X \rfloor = k] \ = \ [k \leqslant X < k+1]}$$

× la loi du min / max d'un nombre fini de v.a.r. **indépendantes**. Il faut savoir écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \boxed{[\max(X_1, X_2) \leqslant x] \ = \ [X_1 \leqslant x] \ \cap \ [X_2 \leqslant x]}\ \boxed{[\min(X_1, X_2) > x] \ = \ [X_1 > x] \ \cap \ [X_2 > x]}$$

× la loi de la somme de deux v.a.r. **indépendantes**. On admet que si U et V sont deux variables aléatoires à densité indépendantes, alors la v.a.r. $U+V$ est à denisté à condition que la fonction f_{U+V} suivante existe. Cette fonction f_{U+V} définit alors une densité de $U+V$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f_{U+V}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x-t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t) f_U(x-t)\ dt}$$

IV. Espérance d'une v.a.r. à densité

IV.1. Définition

Soit X une v.a.r. de densité f_X.

- On dit que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f_X(x)\ dx$ est absolument convergente.
- Dans ce cas, $\boxed{\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f_X(x)\ dx}$

Méthode.

Soit X une v.a.r. de densité f.

$$\text{La v.a.r. } X \text{ admet une espérance} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \textit{1)} \displaystyle\int_{-\infty}^{0} t\ f(t)\ dt \text{ est convergente} \\ \textit{2)} \displaystyle\int_{0}^{+\infty} t\ f(t)\ dt \text{ est convergente} \end{array}\right.$$

On rédigera comme suit.

> « La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui revient / équivaut à démontrer la convergence pour les calculs de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\, f_X(t)\ dt$. »

Il est fréquent que la fonction f_X soit définie par cas et qu'elle soit nulle sauf sur un intervalle $[a, b]$ (avec $a \leqslant b$). On poursuivra alors la rédaction comme suit :

> « D'autre part :
>
> $$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\ dt\ =\ \int_{a}^{b} t\, f_X(t)\ dt$$
>
> car la fonction f_X est nulle en dehors de $[a, b]$. »

Cette rédaction est valable pour tout type d'intervalles $[a, b[$ ou $]a, b[$ ou $]a, b]$ et en choisissant $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

IV.2. Propriétés de l'espérance

IV.2.a) Espérance de la transformée affine d'une v.a.r. à densité

Soit X une v.a.r. à densité f.

On suppose que X admet une espérance.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq 0$.

1) La v.a.r. $Y = aX + b$ est une v.a.r. à densité.

2) La v.a.r. X admet une espérance. De plus :

$$\boxed{\mathbb{E}(aX + b) = a\,\mathbb{E}(X) + b}$$

IV.2.b) Linéarité de l'espérance

Soient X et Y deux v.a.r. (à densité). Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

On suppose que X et Y admettent chacune une espérance.

Alors la v.a.r. $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance. De plus :

$$\boxed{\mathbb{E}\big(\lambda X + \mu Y\big) \;=\; \lambda\,\mathbb{E}(X) + \mu\,\mathbb{E}(Y)}$$

Généralisation :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. (à densité).

On suppose que les v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$ admettent chacune une espérance.

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Alors la v.a.r. $\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n$ admet une espérance. De plus :

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,\mathbb{E}(X_i)}$$

IV.2.c) Espérance du produit de deux v.a.r. indépendantes

Soient X et Y deux v.a.r. (à densité).

On suppose que :
- X et Y admettent une espérance.
- X et Y sont indépendantes.

Alors XY admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)$$

IV.2.d) Croissance de l'espérance

Soient X et Y deux v.a.r. (à densité).

On suppose que X et Y admettent chacune une espérance.

$$\boxed{\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = 1 \;\Rightarrow\; \mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)}$$

V. Moments d'une v.a.r. à densité

V.1. Définition

Soit X une v.a.r. de densité f_X et soit $r \in \mathbb{N}^*$.

- On dit que X **admet un moment d'ordre** r, noté $m_r(X)$, si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r\ f_X(x)\ dx$ est absolument convergente.
(ce qui revient à démontrer la convergence pour ces calculs de moment !)

- Sous réserve d'existence, on a : $\boxed{m_r(X) = \mathbb{E}(X^r) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r\ f_X(x)\ dx}$

V.2. Théorème de transfert

Soit X une v.a.r. de densité f.

On considère une fonction $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ telle que :

(i) g est continue sur $\mathbb{R}$ sauf (éventuellement) en un nombre fini de points.

(ii) l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)\ dt$ est **absolument** convergente.
(cela ne revient pas à démontrer la convergence, sauf si $g : t \mapsto t^n$ ...)

1) Alors la v.a.r. $g(X)$ admet une espérance.

2) De plus : $\boxed{\mathbb{E}(g(X)) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)\ dt}$

V.3. Variance d'une loi à densité

V.3.a) Definition

Soit X une v.a.r. à densité.

- Si la v.a.r. X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et que la v.a.r. $(X - \mathbb{E}(X))$ admet un moment d'ordre 2, on dit que X **admet une variance**, notée $\mathbb{V}(X)$:

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = m_2(X - \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}$$

- Sous ces hypothèses on appelle écart-type et on note $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}}$

V.3.b) Détermination en pratique de la variance

Soit X une v.a.r. à densité.

On suppose que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$.

La v.a.r. X admet une variance	$\Leftrightarrow$	La v.a.r. X admet un moment d'ordre 2

Et dans ce cas :

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2}$$

V.3.c) Variance d'une somme de v.a.r. indépendantes

Soient X et Y deux v.a.r. (à densité).

On suppose que X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2.
(i.e. X et Y admettent une variance)

1) Alors la v.a.r. $X+Y$ admet une variance. De plus :

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)}$$

2) **Généralisation**

On suppose :
- $X_1, \ldots, X_n$ admettent une variance.
- $X_1, \ldots, X_n$ mutuellement indépendantes.

Alors $X_1 + \ldots + X_n$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \ldots + \mathbb{V}(X_n)$$

V.4. Variables centrées / réduites

Soit X une v.a.r. à densité.

a) Si X admet une espérance égale à 0 on dit que X est une variable centrée.

b) Si X admet une variance égale à 1 on dit que X est une variable réduite.

c) Si X admet une variance non nulle, la variable $X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est appelée variable centrée réduite associée à X.

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

Cette semaine, les questions de cours sont les suivantes :

– théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives : étude d'un exemple donné par le colleur.
– primitives à vue : les 3 formules (la $1^{\text{ère}}$ n'est qu'un cas particulier de la $2^{\text{ème}}$) de la page 4.
  Un élève qui ne connaît pas ces 3 formules est exclu de colle et invité à aller apprendre son cours.
– caractéristiques des lois à densité usuelles (densité, fonction de répartition, espérance, variance et moment d'ordre 2).

La colle commence par la détermination de la nature d'une intégrale généralisée à l'aide d'un critère de comparaison et la demande des caractéristiques d'une loi à densité usuelle.

Exercices types

Les compétences attendues sur le chapitre v.a.r. à densité sont les suivantes :

– savoir déterminer la fonction de répartition d'une v.a.r. X.
  (on commence généralement par déterminer une sur-approximation de l'ensemble image : $X(\Omega) \subset \ldots$, afin de pouvoir mettre en place aisément la disjonction de cas)
– savoir démontrer qu'une v.a.r. est / n'est pas une v.a.r. à densité à l'aide de la régularité de F_X.
  La continuité (de F_X) se démontre sur les intervalles ouverts et on complète par une étude des limites aux points restants.
– savoir obtenir **une** densité de probabilité f_X d'une v.a.r. X admettant une densité.
  Pour ce faire, on dérive F_X sur les intervalles ouverts et on choisit une valeur positive pour f_X sur les points restants.
– savoir démontrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fournie par l'énoncé est une densité de probabilité (le programme officiel n'exige par contre pas de savoir démontrer qu'une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de répartition).
– savoir déterminer la fonction de répartition F_X d'une v.a.r. X à partir d'une densité de probabilité f_X.
– savoir exprimer les calculs de probabilités d'une v.a.r. à densité à l'aide d'intégrales.
– savoir déterminer la loi (c'est-à-dire la fonction de répartition) d'une transformée Y (pas forcément affine) d'une v.a.r. X.
  (on commence généralement par déterminer une sur-approximation de l'ensemble image : $Y(\Omega) \subset \ldots$, afin de pouvoir mettre en place aisément la disjonction de cas)
– en particulier, savoir déterminer la loi d'une transformée affine, du carré, de la valeur absolue, de la partie entière, d'une v.a.r. à densité.
– savoir déterminer la loi du min (resp. du max) de deux v.a.r. à densité indépendantes.
– savoir déterminer la loi de la somme de deux v.a.r. à densité indépendantes (le produit de convolution devra être rappelé dans l'énoncé).
– savoir démontrer qu'une v.a.r. admet une espérance (resp. une variance).
– savoir calculer le moment d'ordre 2 des v.a.r. qui suivent une loi usuelle.
– savoir calculer l'espérance (resp. la variance) d'une v.a.r. à densité.
– savoir déterminer l'espérance d'un produit de deux v.a.r. (à densité ou non) **indépendantes** / savoir déterminer la variance de la somme de deux v.a.r. (à densité ou non) **indépendantes**
– savoir démontrer que la transformée $g(X)$ d'une v.a.r. X à densité admet une espérance à l'aide du théorème de transfert.
– connaître les propriétés de l'espérance (linéarité) et de la variance (variance de la somme dans le cas où les v.a.r. considérées sont indépendantes).