

Colles

semaine 19 : 31 janvier - 5 février

I. Les v.a.r. à densité

I.1. Définition

Soit X une v.a.r.

- On dit que la v.a.r. X est une **v.a.r. à densité** si sa fonction de répartition F_X est :
 - a) continue sur \mathbb{R} ,
 - b) de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf (éventuellement) en un nombre fini de points.

I.2. Rappels sur les fonctions de répartition

I.2.a) Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.Soit X une v.a.r.

- On appelle **fonction de répartition de X** et on note F_X l'application :

$$F_X : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F_X(x) = \mathbb{P}([X \leq x]) \end{cases}$$

I.2.b) Caractérisations des fonctions de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.Soit X une v.a.r.La fonction de répartition F_X vérifie les propriétés suivantes.

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(x) \leq 1.$
- 2) La fonction F_X est croissante sur $\mathbb{R}.$
- 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
- 4) La fonction F_X est continue à droite en tout point $x \in \mathbb{R}.$

Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t > x}} F_X(t) = F_X(x)$

- 5) F_X admet une limite finie à gauche en tout point $x \in \mathbb{R}.$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t < x}} F_X(t) = F_X(x) - \mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{P}([X < x])$$

Les points 2., 3. et 4. caractérisent les fonctions de répartition. Ainsi, une fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie ces 3 points peut être considérée comme la fonction de répartition d'une v.a.r. X .

I.2.c) Continuité d'une fonction de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probablisé.

Soit X une v.a.r.

$$\text{La fonction } F_X \text{ continue en } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathbb{P}([X = x]) = 0$$

En particulier : $\text{La v.a.r. } X \text{ est à densité} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}([X = x]) = 0$

I.2.d) Propriété des fonctions de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probablisé.

Soit X une v.a.r.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$.

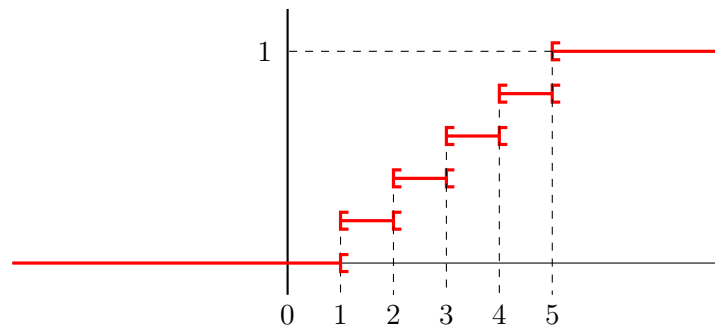
$$\mathbb{P}([a < X \leq b]) = F_X(b) - F_X(a)$$

I.3. Toutes les v.a.r. ne sont pas à densité

Exemple

Une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 5 \rrbracket)$ est-elle une densité ?

Rappelons la fonction de répartition d'une telle v.a.r.



- Ici, F_X est bien \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, 1[\cup]1, 2[\cup]2, 3[\cup]3, 4[\cup]4, 5[\cup]5, +\infty[$.
- Par contre, F_X n'est pas continue sur \mathbb{R} car non continue en les x_i .

Ainsi, si une v.a.r. **discrète finie** suit une loi uniforme, alors X n'admet pas de densité.
De manière générale :

$$\text{La v.a.r. } X \text{ est une v.a.r. discrète} \Rightarrow X \text{ n'admet pas de densité}$$

Exercice

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. On pose $Y = \max(1, X)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y .
2. La v.a.r. Y est-elle une v.a.r. à densité ? discrète ?

II. Densité d'une v.a.r.

II.1. Définition

Soit X une v.a.r. à densité.

On dit qu'une fonction $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est **une densité de X** si :

a) $\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) \geq 0,$

b) La fonction f_X coïncide avec F'_X sauf en un nombre fini de points.
Autrement dit, il existe $\{x_1, \dots, x_n\}$ tel que :

$$\forall x \in]-\infty, x_1[\cup]x_1, x_2[\cup \dots \cup]x_{n-1}, x_n[\cup]x_n, +\infty[, \quad f_X(x) = F'_X(x)$$

(sans perte de généralité, on a supposé : $x_1 < \dots < x_n$)

II.2. Expression de la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité

Soit X une v.a.r. admettant une densité notée f_X .

Les propriétés suivantes sont vérifiées.

1) La fonction $x \mapsto \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 en tout point où f est continue.

De plus : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbb{P}([X \leq x]) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$

et, en tout point où f est continue, $F'(x) = f(x)$. Plus généralement :

× si f est continue à droite en x , F_X est dérivable à droite en x .

× si f est continue à gauche en x , F_X est dérivable à gauche en x .

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt = 1$

3) $\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}([X = x]) = 0$

4) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a : $\mathbb{P}([X < a]) = \mathbb{P}([X \leq a]) = \int_{-\infty}^a f_X(t) dt$

$$\mathbb{P}([X > b]) = 1 - \mathbb{P}([X \leq b]) = \int_b^{+\infty} f_X(t) dt$$

5) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, si $a \leq b$, on a :

$$\mathbb{P}([a < X \leq b]) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t) dt$$

$$\mathbb{P}([a < X < b]) = \mathbb{P}([a < X \leq b]) = \mathbb{P}([a \leq X < b]) = \mathbb{P}([a \leq X \leq b])$$

- Ce théorème illustre l'intérêt des v.a.r. à densité : on obtient la valeur de la fonction de répartition F_X et donc la loi de X sous forme d'un calcul d'intégrales (éventuellement impropres).

- Nous avons obtenu des résultats analogues dans le chapitre des v.a.r. discrètes.

	Cas discret (v.a.r. discrète)	Cas continu (v.a.r. à densité)
$\mathbb{P}([X \leq b])$	$\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \leq b}} \mathbb{P}([X = x])$	$\int_{-\infty}^b f_X(t) dt$
$\mathbb{P}([a \leq X \leq b])$ (avec $a \leq b$)	$\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ a \leq x \leq b}} \mathbb{P}([X = x])$	$\int_a^b f_X(t) dt$
$\mathbb{P}([a \leq X \leq b])$ (avec $a \leq b$)	$F_X(b) - F_X(a) + \mathbb{P}([X = a])$	$F_X(b) - F_X(a)$
$\mathbb{P}(\Omega) = 1$	$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x]) = 1$	$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt = 1$
Régularité de F_X	En tout point $x \in \mathbb{R}$: <ul style="list-style-type: none"> • F_X continue à droite en x • F_X admet une limite finie à gauche en x 	F_X continue sur \mathbb{R}

II.3. Démontrer qu'une fonction est une densité

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

La fonction f est une densité de probabilité \Leftrightarrow $\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf (éventuellement) en un nombre fini de points,} \\ 2. \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0, \\ 3. \text{ L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \text{ est convergente et vaut } 1. \end{array} \right.$

III. Transformation d'une v.a.r. à densité

III.1. Transformation affine d'une v.a.r. à densité

Soit X une v.a.r. à densité f_X .

Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$.

1) La var $Y = aX + b$ est une v.a.r. à densité.

2) De plus, sa densité est donnée par :

$$f_Y : x \mapsto \frac{1}{|a|} f_X \left(\frac{x-b}{a} \right)$$

III.2. Transformation polynomiale (carré)

Soit X une v.a.r. à densité f_X .

1) La var $Y = X^2$ est une v.a.r. à densité.

2) De plus, sa densité est donnée par :

$$f_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x}) \right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

III.3. Une transformation usuelle

Soit U une v.a.r. tel que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1[)$.

Soit $\lambda > 0$.

$$V = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$$

Démonstration.

- Notons $h : x \mapsto -\frac{1}{\lambda} \ln(1-x)$, de sorte que $V = h(U)$.

Comme $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1[)$, alors $U(\Omega) = [0, 1[$. On en déduit :

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= (h(U))(\Omega) = h(U(\Omega)) = h([0, 1[) \\ &= \left[h(0), \lim_{x \rightarrow 1} h(x) \right[\quad (\text{car } h \text{ est continue et strictement} \\ &\quad \text{croissante sur } [0, 1[\text{ (*)}) \\ &= [0, +\infty[\end{aligned}$$

Ainsi : $V(\Omega) = [0, +\infty[$.

On peut démontrer (*) par une rapide étude de fonction :

- × la fonction h est dérivable (donc continue) sur $[0, 1[$ en tant que composée de fonctions dérivables sur les intervalles adéquats.
- × soit $x \in]0, 1[$.

$$h'(x) = -\frac{1}{\lambda} \left(-\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{\lambda(1-x)} > 0$$

Donc la fonction h est strictement croissante sur $[0, 1[$.

- Déterminons la fonction de répartition de V .

Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- × Si $x < 0$, alors $[V \leq x] = \emptyset$ car $V(\Omega) = [0, +\infty[$. Ainsi :

$$F_V(x) = \mathbb{P}([V \leq x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

- × Si $x \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} F_V(x) &= \mathbb{P}([V \leq x]) = \mathbb{P}\left(\left[-\frac{1}{\lambda} \ln(1-U) \leq x\right]\right) \\ &= \mathbb{P}([\ln(1-U) \geq -\lambda x]) \quad (\text{car } -\lambda < 0) \\ &= \mathbb{P}([1-U \geq e^{-\lambda x}]) \quad (\text{car la fonction exp est} \\ &\quad \text{strictement croissante sur } \mathbb{R}) \\ &= \mathbb{P}([U \leq 1 - e^{-\lambda x}]) \\ &= F_U(1 - e^{-\lambda x}) \\ &= 1 - e^{-\lambda x} \quad (\text{car } 1 - e^{-\lambda x} \in [0, 1[) \end{aligned}$$

En effet, comme $x \geq 0$

alors $-\lambda x \leq 0$

d'où $0 < e^{-\lambda x} \leq 1$ (*car la fonction
exp est
croissante sur \mathbb{R}*)

et donc $0 \leq 1 - e^{-\lambda x} < 1$

Enfinement : $F_V : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$.

On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Or, la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r. . Ainsi, $V \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. □

III.4. D'autres techniques à connaître

Parmi les autres autres transformées classiques, on peut citer :

- × la loi de la valeur absolue d'une v.a.r. à densité. En particulier, il faut savoir écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, [|X| \leq x] = [-x \leq X \leq x]$$

- × la loi de la partie entière d'une v.a.r. à densité. En particulier, il faut savoir écrire :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, [[X] = k] = [k \leq X < k + 1]$$

- × la loi du min / max d'un nombre fini de v.a.r. **indépendantes**. Il faut savoir écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, [\max(X_1, X_2) \leq x] = [X_1 \leq x] \cap [X_2 \leq x] \quad [\min(X_1, X_2) > x] = [X_1 > x] \cap [X_2 > x]$$

- × la loi de la somme de deux v.a.r. **indépendantes**. On admet que si U et V sont deux variables aléatoires à densité indépendantes, alors la v.a.r. $U + V$ est à densité à condition que la fonction f_{U+V} suivante existe. Cette fonction f_{U+V} définit alors une densité de $U + V$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{U+V}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t) f_U(x-t) dt$$

IV. Espérance d'une v.a.r. à densité

IV.1. Définition

Soit X une v.a.r. de densité f_X .

- On dit que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$ est absolument convergente.

- Dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$

Méthode.

Soit X une v.a.r. de densité f .

$$\text{La v.a.r. } X \text{ admet une espérance} \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \int_{-\infty}^0 t f(t) dt \text{ est convergente} \\ 2) \int_0^{+\infty} t f(t) dt \text{ est convergente} \end{cases}$$

On rédigera comme suit.

« La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale doublement impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$ est absolument convergente, ce qui revient / équivaut à démontrer la convergence pour les calculs de moment du type $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f_X(t) dt$. »

Il est fréquent que la fonction f_X soit définie par cas et qu'elle soit nulle sauf sur un intervalle $[a, b]$ (avec $a \leq b$). On poursuivra alors la rédaction comme suit :

« D'autre part :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt = \int_a^b t f_X(t) dt$$

car la fonction f_X est nulle en dehors de $[a, b]$. »

Cette rédaction est valable pour tout type d'intervalles $[a, b[$ ou $]a, b[$ ou $]a, b]$ et en choisissant $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

IV.2. Propriétés de l'espérance

IV.2.a) Espérance de la transformée affine d'une v.a.r. à densité

Soit X une v.a.r. à densité f .

On suppose que X admet une espérance.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq 0$.

1) La v.a.r. $Y = aX + b$ est une v.a.r. à densité.

2) La v.a.r. X admet une espérance. De plus :

$$\mathbb{E}(aX + b) = a \mathbb{E}(X) + b$$

IV.2.b) Linéarité de l'espérance

Soient X et Y deux v.a.r. (à densité). Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

On suppose que X et Y admettent chacune une espérance.

Alors la v.a.r. $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance. De plus :

$$\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y)$$

Généralisation :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient X_1, \dots, X_n des v.a.r. (à densité).

On suppose que les v.a.r. X_1, \dots, X_n admettent chacune une espérance.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Alors la v.a.r. $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n$ admet une espérance. De plus :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{E}(X_i)$$

IV.2.c) Espérance du produit de deux v.a.r. indépendantes

Soient X et Y deux v.a.r. (à densité).

On suppose que :

- X et Y admettent une espérance.
- X et Y sont indépendantes.

Alors XY admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y)$$

IV.2.d) Croissance de l'espérance

Soient X et Y deux v.a.r. (à densité).

On suppose que X et Y admettent chacune une espérance.

$$\mathbb{P}([X \leq Y]) = 1 \Rightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$$

V. Moments d'une v.a.r. à densité

V.1. Définition

Soit X une v.a.r. de densité f_X et soit $r \in \mathbb{N}^*$.

- On dit que X **admet un moment d'ordre** r , noté $m_r(X)$, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_X(x) dx$ est absolument convergente.
(ce qui revient à démontrer la convergence pour ces calculs de moment !)

- Sous réserve d'existence, on a :
$$m_r(X) = \mathbb{E}(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_X(x) dx$$

V.2. Théorème de transfert

Soit X une v.a.r. de densité f .

On considère une fonction $g : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- (i) g est continue sur \mathbb{R} sauf (éventuellement) en un nombre fini de points.
- (ii) l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t) dt$ est **absolument** convergente.
(cela ne revient pas à démontrer la convergence, sauf si $g : t \mapsto t^n \dots$)

1) Alors la v.a.r. $g(X)$ admet une espérance.

- 2) De plus :
$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t) dt$$

V.3. Variance d'une loi à densité

V.3.a) Définition

Soit X une v.a.r. à densité.

- Si la v.a.r. X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et que la v.a.r. $(X - \mathbb{E}(X))$ admet un moment d'ordre 2, on dit que X **admet une variance**, notée $\mathbb{V}(X)$:

$$\mathbb{V}(X) = m_2(X - \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$

- Sous ces hypothèses on appelle écart-type et on note
$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

V.3.b) Détermination en pratique de la variance

Soit X une v.a.r. à densité.

On suppose que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$.

La v.a.r. X admet une variance	\Leftrightarrow	La v.a.r. X admet un moment d'ordre 2
-------------------------------------	-------------------	--

Et dans ce cas :

$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$

V.3.c) Variance d'une somme de v.a.r. indépendantes

Soient X et Y deux v.a.r. (à densité).

On suppose que X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2.

(i.e. X et Y admettent une variance)

1) Alors la v.a.r. $X + Y$ admet une variance. De plus :

X et Y indépendantes	\Rightarrow	$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$
--------------------------	---------------	---

2) **Généralisation**

On suppose :	<ul style="list-style-type: none"> • X_1, \dots, X_n admettent une variance. • X_1, \dots, X_n mutuellement indépendantes.
--------------	--

Alors $X_1 + \dots + X_n$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \dots + \mathbb{V}(X_n)$$

V.4. Variables centrées / réduites

Soit X une v.a.r. à densité.

a) Si X admet une espérance égale à 0 on dit que X est une variable centrée.

b) Si X admet une variance égale à 1 on dit que X est une variable réduite.

c) Si X admet une variance non nulle, la variable $X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est appelée variable centrée réduite associée à X .

Informations concernant cette semaine de colles

Exercices types

Les compétences attendues sur le chapitre v.a.r. à densité sont les suivantes :

- savoir déterminer la fonction de répartition d'une v.a.r. X .
(on commence généralement par déterminer une sur-approximation de l'ensemble image : $X(\Omega) \subset \dots$, afin de pouvoir mettre en place aisément la disjonction de cas)
- savoir démontrer qu'une v.a.r. est / n'est pas une v.a.r. à densité à l'aide de la régularité de F_X .
La continuité (de F_X) se démontre sur les intervalles ouverts et on complète par une étude des limites aux points restants.
- savoir obtenir **une** densité de probabilité f_X d'une v.a.r. X admettant une densité.
Pour ce faire, on dérive F_X sur les intervalles ouverts et on choisit une valeur positive pour f_X sur les points restants.
- savoir démontrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fournie par l'énoncé est une densité de probabilité (le programme officiel n'exige par contre pas de savoir démontrer qu'une fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de répartition).
- savoir déterminer la fonction de répartition F_X d'une v.a.r. X à partir d'une densité de probabilité f_X .
- savoir exprimer les calculs de probabilités d'une v.a.r. à densité à l'aide d'intégrales.
- savoir déterminer la loi (c'est-à-dire la fonction de répartition) d'une transformée Y (pas forcément affine) d'une v.a.r. X .
(on commence généralement par déterminer une sur-approximation de l'ensemble image : $Y(\Omega) \subset \dots$, afin de pouvoir mettre en place aisément la disjonction de cas)
- en particulier, savoir déterminer la loi d'une transformée affine, du carré, de la valeur absolue, de la partie entière, d'une v.a.r. à densité.
- savoir déterminer la loi du min (resp. du max) de deux v.a.r. à densité indépendantes.
- savoir déterminer la loi de la somme de deux v.a.r. à densité indépendantes (le produit de convolution devra être rappelé dans l'énoncé).
- savoir démontrer qu'une v.a.r. admet une espérance (resp. une variance).
- savoir calculer le moment d'ordre 2 des v.a.r. qui suivent une loi usuelle.
- savoir calculer l'espérance (resp. la variance) d'une v.a.r. à densité.
- savoir déterminer l'espérance d'un produit de deux v.a.r. (à densité ou non) **indépendantes** / savoir déterminer la variance de la somme de deux v.a.r. (à densité ou non) **indépendantes**
- savoir démontrer que la transformée $g(X)$ d'une v.a.r. X à densité admet une espérance à l'aide du théorème de transfert.
- connaître les propriétés de l'espérance (linéarité) et de la variance (variance de la somme dans le cas où les v.a.r. considérées sont indépendantes).