Colles

semaine 19 : 31 janvier - 5 février

I. Loi uniforme sur un intervalle réel

I.1. Densité

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi uniforme** sur $[a, b]$ (pour a et b deux réels tels que $a < b$) si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = [a, b]}$

  b) X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, a[\\ \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x \in \,]b, +\infty[\end{cases} \end{array} \right.$$

- On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ pour signifier que X suit la loi uniforme sur $[a, b]$.

I.2. Fonction de répartition

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.

Alors sa fonction de répartition F_X est définie par :

$$F_X : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & si\ x \in \,]-\infty, a[\\ \dfrac{x-a}{b-a} & si\ x \in [a, b] \\ 1 & si\ x \in \,]b, +\infty[\end{cases} \end{array} \right.$$

I.3. Espérance et variance

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ $(a < b)$.

Alors, on a :

1) X admet une espérance.

2) $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}}$

(point milieu de $[a, b]$)

1) X admet une variance.

2) $\boxed{\mathbb{V}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}}$

Remarque générale sur les lois à densité

- Rappelons tout d'abord qu'une v.a.r. X à densité admet une infinité de densités : une densité f_X de X sera toujours une densité de X si on modifie sa valeur sur un nombre fini de points, à condition que les nouvelles valeurs données soient toutes positives. Pour autant, il faut comprendre que toutes les densités de X produisent la même fonction de répartition.
- On présente dans ce cours `UNE` densité possible pour chaque loi usuelle. Mais on gardera en tête le point précédent. En particulier, il ne faut pas accorder d'importance sur le caractère ouvert ou fermé des intervalles intervenant dans la définition par cas de chaque densité f.
- Dans les énoncés de concours, il sera pas toujours précisé l'ensemble image de la v.a.r. X considéré. Lorsque la v.a.r. en question suit une loi usuelle, on pourra **considérer** que son ensemble image est celui précisé dans ce cours.

I.4. Loi uniforme sur $[0, 1]$

I.4.a) Simulation informatique

- En **Scilab**, les instructions `rand()` et `grand(1, 1, "def")` permettent de simuler une v.a.r. qui suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1[)$.

I.4.b) Caractéristiques de la loi uniforme sur $[0, 1]$

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, ses caractéristiques sont les suivantes.

- Densité : $$\boxed{f_X : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, 0[\\ 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \in \,]1, +\infty[\end{cases} \end{array} \right.}$$
- Fonction de répartition : $$\boxed{F_X : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, 0[\\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \in \,]1, +\infty[\end{cases} \end{array} \right.}$$
- Espérance de X : $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{2}}$ Variance de X : $\boxed{\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{12}}$

I.5. Transformée affine d'une v.a.r. qui suit une loi uniforme

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$.

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1]) \quad \Leftrightarrow \quad Y = (b - a)X + a \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])}$$

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b]) \;\Leftrightarrow\; X = \frac{1}{b - a}(Y - a) \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])}$$

(cette propriété se démontre en appliquant le résultat ci-dessus à la v.a.r. $X = \frac{1}{b-a}(Y - a)$*)*

Remarque

- Ce théorème énonce une propriété de stabilité des lois uniforme :

Toute transformée affine d'une v.a.r. qui suit une loi uniforme, suit une loi uniforme

- Connaissant l'espérance et la variance d'une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, ce résultat nous permet de retrouver l'espérance et la variance associées à la loi $\mathcal{U}([a,b])$. En effet, la v.a.r. $Y = (b-a)\,X + a$ est telle que : $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$. Elle admet une espérance (resp. une variance) comme transformée affine de la v.a.r. X qui admet une espérance (resp. une variance). De plus :

$$\begin{array}{rclclclcl} \mathbb{E}(Y) & = & \mathbb{E}\big((b-a)\,X+a\big) & = & (b-a)\,\mathbb{E}(X)+a & = & (b-a)\,\dfrac{1}{2}+a & = & \dfrac{a+b}{2} \\ \mathbb{V}(Y) & = & \mathbb{V}\big((b-a)\,X+a\big) & = & (b-a)^2\,\mathbb{V}(X) & = & \dfrac{(b-a)^2}{12} & & \end{array}$$

- L'usage des propriétés de stabilité est très classique lors de l'étude de lois. Considérons une loi, notée par exemple $\mathcal{L}(a,b)$ à paramètres (a,b).
  1) On étudie une loi initialement une v.a.r. X qui suit cette loi avec les paramètres considérés les plus simples. Disons $X \hookrightarrow \mathcal{L}(0,1)$. On détermine alors $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
  2) On considère alors une v.a.r. $Y = h_{a,b}(X)$, transformée de la v.a.r. X.
  On démontre alors : $Y \hookrightarrow \mathcal{L}(a,b)$.
  On cherche alors à déterminer l'espérance (resp. la variance) de Y. Pour ce faire :
  × si $h_{a,b}$ est une application affine, on peut directement utiliser la linéarité de l'espérance.
  × sinon, on utilise le théorème de transfert pour déterminer une écriture de $\mathbb{E}(Y)$ à l'aide de la densité f_X donnée pour la v.a.r. X.

- Simulation informatique : si `a` et `b` sont deux variables précédemment affectées, on peut simuler une v.a.r. Y telle que $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\mathtt{a},\mathtt{b}])$ de deux manières :

À l'aide de la propriété de stabilité.

```
x = rand()
y = (b-a) * x + a
```

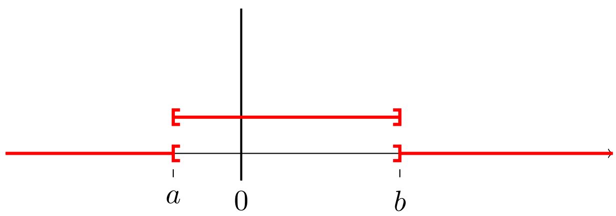
Ou alors de manière directe grâce aux fonctions prédéfinies en **Scilab**.

```
x = grand(1, 1, "unf", a, b)
```

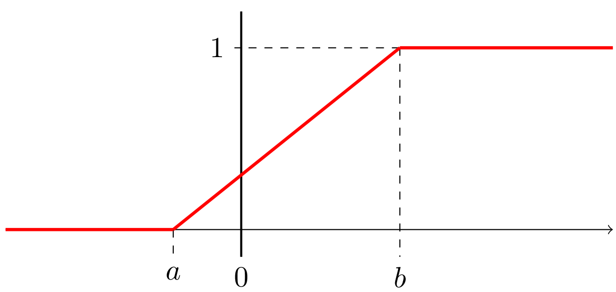
I.6. Représentation grapique

On considère une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$.

- Représentation graphique de la densité f_X introduite en définition



- Représentation graphique de la fonction de répartition F_X



II. Loi exponentielle

II.1. Densité

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi exponentielle de paramètre** λ (avec $\lambda > 0$) si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = [0, +\infty[}$

  b) X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f \; : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, 0[\\ \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{array} \right. \end{array} \right.$$

- On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ pour signifier que X suit la loi exponentielle de paramètre λ.

II.2. Fonction de répartition

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Alors sa fonction de répartition F_X est définie par :

$$F_X \; : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \textit{si } x \in \,]-\infty, 0[\\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \textit{si } x \in [0, +\infty[\end{array} \right. \end{array} \right.$$

II.3. Espérance et variance

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ (avec $\lambda > 0$).

Alors, on a :

1) X admet une espérance.

2) $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}}$

1) X admet une variance.

2) $\boxed{\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}}$

II.4. La seule loi à densité à perte de mémoire

Soit X une v.a.r. à densité.

La v.a.r. X suit une loi exponentielle si et seulement si :

1) $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{R}_+}$

2) $\forall (s, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, $\boxed{\mathbb{P}_{[X>s]}([X > s + t]) = \mathbb{P}([X > t])}$

(on dit que la loi exponentielle est sans mémoire)

3) $\forall s \in \mathbb{R}_+$, $\boxed{\mathbb{P}([X > s]) \neq 0}$

II.5. Transformée affine d'une v.a.r. qui suit une loi exponentielle

Soit $\lambda > 0$.

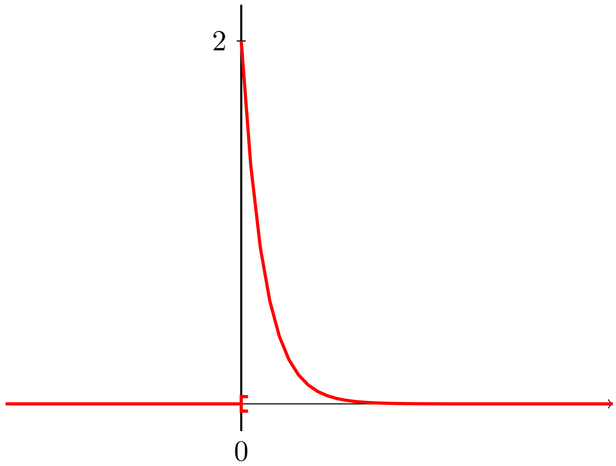
1) $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \quad \Leftrightarrow \quad Y = \dfrac{1}{\lambda} X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)}$

2) $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \quad \Leftrightarrow \quad Y = \lambda X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)}$

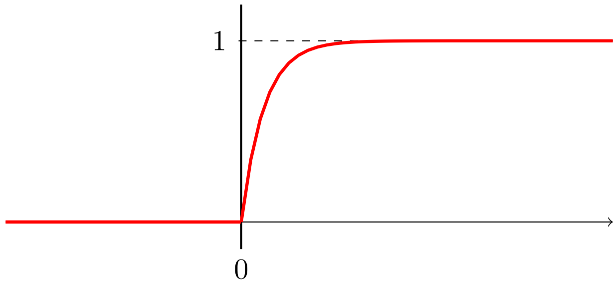
II.6. Représentation graphique

On considère une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$.

- Représentation graphique de la densité f_X introduite en définition



- Représentation graphique de la fonction de répartition F_X



II.7. `BONUS` : Simulation informatique

- En **Scilab**, l'instruction `grand(1, 1, "exp", 1/lam)` permet de simuler une v.a.r. qui suit la loi exponenentielle $\mathcal{E}(\texttt{lam})$.
- On peut aussi tirer parti du résultat suivant.

$$U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[) \;\Rightarrow\; V = -\frac{1}{\lambda}\,\ln(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$$

On en déduit le programme suivant qui permet de simuler une v.a.r. V suivant la loi $\mathcal{E}(2)$.

```
lam = 2
u = rand()
v = - (1 / lam) * log(1 - u)
```

III. Loi normale centrée réduite

III.1. Densité

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi normale centrée réduite** si :

  a) $\boxed{X(\Omega) =]-\infty, +\infty[}$

  b) X admet pour densité la fonction φ définie par :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \end{array} \right.$$

- On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ pour signifier que X suit la loi normale centrée réduite.

III.2. Espérance et variance

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Alors, on a :

1) X admet une espérance.

2) $\boxed{\mathbb{E}(X) = 0}$

1) X admet une variance.

2) $\boxed{\mathbb{V}(X) = 1}$

Démonstration.

1) La v.a.r. X admet une espérance ssi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\, dt$ converge absolument, ce qui équivaut à de la convergence pour ce calcul de moment.

a) Étude de la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\ \varphi(t)\ dt$.

- La fonction $t \mapsto t\ \varphi(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Soit $B \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_0^B t\ \varphi(t)\ dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^B t\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\ dt = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^B (-t)\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\ dt \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \left[\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\ \right]_0^B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{B^2}{2}}\right) \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

- On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, \varphi(t)\ dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

b) Étude de la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t\ \varphi(t)\ dt$.

On se ramène au cas précédent en posant le changement de variable affine $\boxed{u = -t}$. Plus précisément :

$$\int_{-\infty}^0 t\ \varphi(t)\ dt = \int_{+\infty}^0 (\cancel{-}u)\ \varphi(-u)(\cancel{-}\,du) = -\int_0^{+\infty} u\ \varphi(u)\, du$$

On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 t\ \varphi(t)\ dt$ converge et vaut $-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

On en conclut que X amdet une espérance. De plus :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\,\varphi(t)\ dt = \int_{-\infty}^{0} t\,\varphi(t)\ dt + \int_{0}^{+\infty} t\,\varphi(t)\ dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0$$

2) La v.a.r. X admet une espérance ssi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f_X(t)\ dt$ converge absolument, ce qui équivaut à de la convergence pour ce calcul de moment.

a) Étude de la nature de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^2\ \varphi(t)\ dt$.

- La fonction $t \mapsto t^2\ \varphi(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Soit $B \in [0, +\infty[$.

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int_0^B t^2\ \varphi(t)\ dt & = & \displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^B t^2\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\ dt \\
& = & \displaystyle\frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^B t \times (-t)\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\ dt \\
& = & \displaystyle -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\Big[\ t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\ \Big]_0^B - \int_0^B \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\ dt \right) \\
& \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} & \displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\ dt\ =\ \frac{1}{2}
\end{array}$$

En effet, par parité de φ sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\ dt}_{=1} \ =\ 2 \int_0^{+\infty} \varphi(t)\ dt$$

- On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,\varphi(t)\ dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.

b) Étude de la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t^2\ \varphi(t)\ dt$.

En posant le changement de variable $\boxed{u = -t}$ on obtient :

$$\int_{-\infty}^{0} t^2\ \varphi(t)\ dt\ =\ \int_{+\infty}^{0} (-u)^2\ \varphi(-u)(-\,du)\ =\ \int_0^{+\infty} u^2\ \varphi(u)\,du$$

On en conclut que X admet un moment d'ordre 2 et :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(X^2) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,\varphi(t)\ dt \\
& = & \displaystyle\int_{-\infty}^{0} t^2\,\varphi(t)\ dt + \int_0^{+\infty} t^2\,\varphi(t)\ dt \\
& = & \displaystyle\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ =\ 1
\end{array}$$

Enfin, d'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 1 - 0 = 1$$

□

III.3. Fonction de répartition

III.3.a) Définition

La fonction de répartition associée à la loi normale centrée réduite n'admet pas d'expression « simple ». On la note Φ.

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} \, dt \end{array} \right.$$

III.3.b) Propriétés remarquables de Φ

Notons Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1) La fonction Φ réalise une bijection de $]-\infty,+\infty[$ sur $]0,1[$.

2) $\boxed{\Phi(0) = \mathbb{P}([X \leqslant 0]) = \frac{1}{2}}$

3) $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$

4) $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([|X| \leqslant x]) = 2\,\Phi(x) - 1}$

Démonstration.

1) • La fonction φ est continue sur $]-\infty,+\infty[$.
Ainsi, la fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,+\infty[$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi'(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} > 0$$

On en déduit que la fonction Φ est strictement croissante sur $]-\infty,+\infty[$.

• La fonction Φ est :

× continue sur $]-\infty,+\infty[$,

× strictement croissante sur $]-\infty,+\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $]-\infty,+\infty[$ sur $\Phi(]-\infty,+\infty[)$. Or :

$$\Phi\big(]-\infty,+\infty[\big) = \big]\lim_{x\to-\infty} \Phi(x), \lim_{x\to+\infty} \Phi(x)\big[=]0,1[$$

2) • La fonction φ étant une densité de probabilité, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt$ converge.

• On effectue alors le changement de variable $\boxed{u = -t}$:

$$\left| \begin{array}{l} u = -t \quad \text{(et donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -\,dt \quad \text{et} \quad dt = -\,du \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = 0 \\ \bullet\ t = +\infty \ \Rightarrow\ u = -\infty \end{array} \right.$$

Ce changement de variable est valide car la fonction $\psi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$.
On obtient alors :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \varphi(t)\ dt &= \int_0^{-\infty} \varphi(-u)(-\ du) = -\int_0^{-\infty} \varphi(-u)\ du \\ &= \int_{-\infty}^0 \varphi(-u)\ du = \int_{-\infty}^0 \varphi(u)\ du\end{aligned}$$

Ainsi : $1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\ dt = \int_{-\infty}^0 \varphi(t)\ dt + \int_0^{+\infty} \varphi(t)\ dt = 2 \int_{-\infty}^0 \varphi(t)\ dt$.
On en conclut : $\mathbb{P}([X \leqslant 0]) = \frac{1}{2}$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par le même changement de variable $u = -t$, on a :

$$\begin{aligned}\Phi(-x) &= \int_{-\infty}^{-x} \varphi(t)\ dt = -\int_{+\infty}^{x} \varphi(-u)\ du \\ &= \int_x^{+\infty} \varphi(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\ du - \int_{-\infty}^{x} \varphi(u)\ du = 1 - \Phi(x)\end{aligned}$$

4) Soit $x \in \mathbb{R}$.

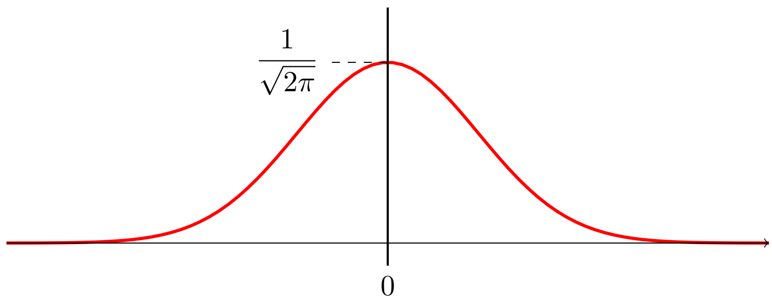
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\,[|X| \leqslant x]\,\big) &= \mathbb{P}\big(\,[-x \leqslant X \leqslant x]\,\big) \\ &= \Phi(x) - \Phi(-x) \\ &= \Phi(x) - \big(1 - \Phi(x)\big) = 2\,\Phi(x) - 1\end{aligned}$$

□

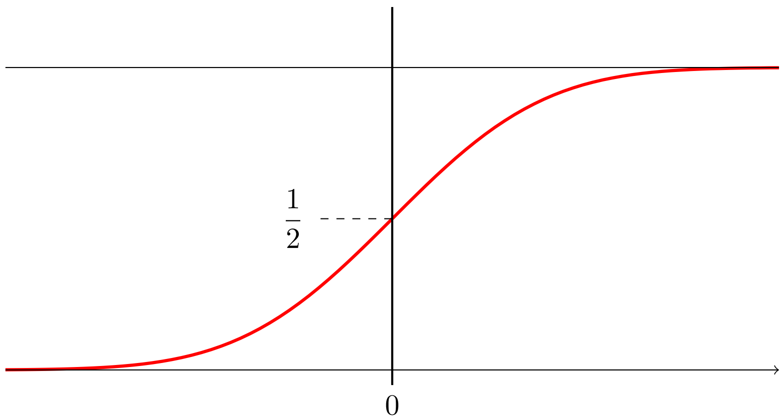
III.4. Représentation graphique

On considère une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

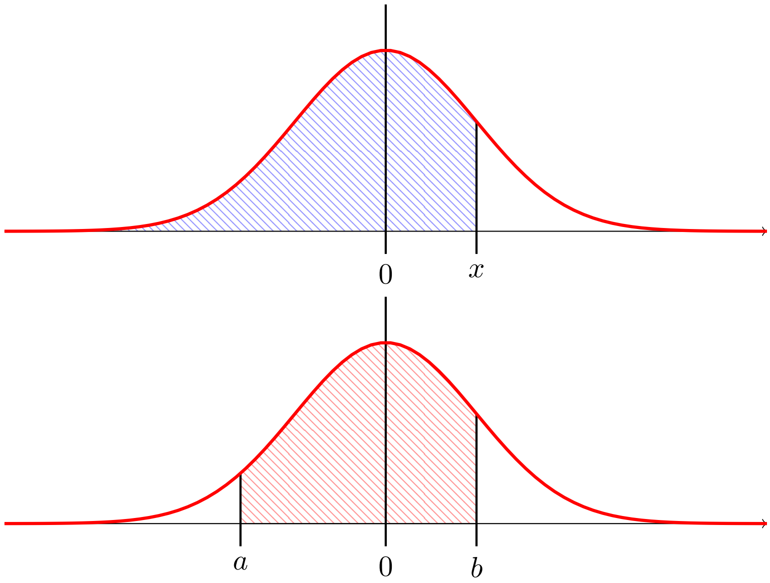
- Représentation graphique de la densité φ introduite en définition



- Représentation graphique de la fonction de répartition Φ

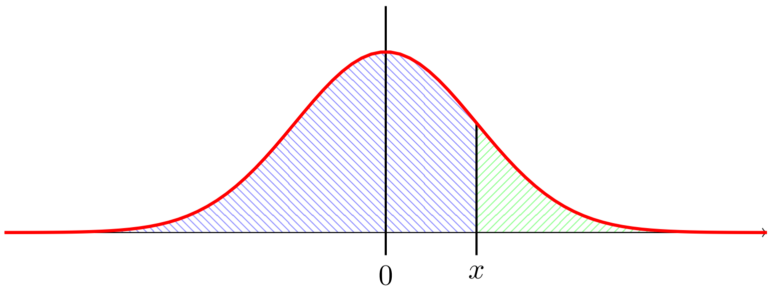


- Lecture des propriétés associés à la fonction de répartition Φ
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la quantité $\Phi(x)$ représente l'aire sous la courbe de φ entre $-\infty$ et x. Cela permet d'obtenir les graphiques suivants.

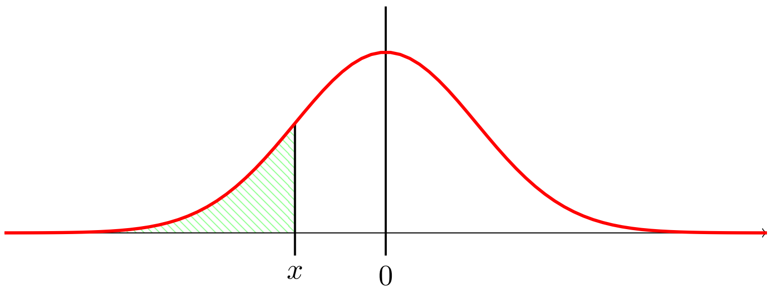


$= \Phi(x)$ et $= \Phi(b) - \Phi(a)$

- Comme dit plus haut, pour tout $x \in \mathbb{R}$ la quantité $\Phi(x)$ est une aire sous la courbe de φ.
  Les propriétés associées à Φ peuvent de ce fait se représenter comme des égalités entre certaines aires sous la courbe.



$= \Phi(x)$ et $= 1 - \Phi(x)$



$= \Phi(-x)$

III.5. Table de la loi normale centrée réduite

On utilise parfois (notamment en statistiques), des tables contenant les valeurs caractéristiques de certaines lois usuelles. La table ci-dessous contient les valeurs de Φ, fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

$$\Phi(t) = \mathbb{P}([X \leqslant t]) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2} \, du$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Fig. 1 Table de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

Comment lire les valeurs de cette table ?

- Par exemple, pour lire la valeur de $\Phi(1.64)$
  - × on sélectionne la ligne 1.6
  - × on sélectionne alors la colonne 0.04

  On lit la valeur de la cellule l'intersection de cette ligne et colonne. On lit : $\Phi(1.64) = 0.9495$
  (la probabilité de l'événement $[X \leqslant 1.64]$ *est d'environ* 95%*)*
- Par exemple, pour lire la valeur de $\Phi(-0.81)$
  On utilise la formule : $\Phi(-0.81) = 1 - \Phi(0.81)$
  On lit alors : $\Phi(-0.81) = 1 - 0.7910 = 0.209$
  (la probabilité de l'événement $[X \leqslant -0.81]$ *est d'environ* 21%*)*

IV. Loi normale (ou de Laplace-Gauss)

IV.1. Densité

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi normale (ou loi de Laplace-Gauss) de paramètre** (m, σ^2) (avec $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$) si :

  a) $\boxed{X(\Omega) =]-\infty, +\infty[}$

  b) X admet pour densité la fonction φ_{m,σ^2} définie par :

$$\varphi_{m,\sigma^2} \ : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sigma\,\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \end{array}\right.$$

- On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$ pour signifier que X suit la loi normale de paramètre (m, σ^2).

Remarque

- L'expression de φ_{m,σ^2} est proche de celle de φ : on obtient $\varphi_{m,\sigma^2}(x)$ en appliquant à x une transformation affine.
  Plus précisément, notons $t : x \mapsto \dfrac{x-m}{\sigma}$.
  On a alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\varphi_{m,\sigma^2}(x) \ = \ \dfrac{1}{\sigma}\ \varphi\left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right)} = \dfrac{1}{\sigma}\ \varphi\big(t(x)\big)$.
- On peut se servir de cette propriété pour déduire les propriétés de φ_{m,σ^2} de celle de φ.
  Par exemple, on peut vérifier que φ_{m,σ^2} est bien une densité de probabilité :
  1) φ_{m,σ^2} est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.
  2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_{m,\sigma^2}(x) \geqslant 0$.
  3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{m,\sigma^2}(x)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma}\ \varphi(t(x))\ dx = \frac{1}{\cancel{\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cancel{\sigma}\varphi(u)\ du.$

La dernière égalité provient du changement de variable $u = \frac{x-m}{\sigma}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = \dfrac{x-m}{\sigma} \qquad \text{(et donc } x = \sigma\, u + m\text{)} \\ \hookrightarrow du = \dfrac{1}{\sigma}\ dx \quad \text{ et } \quad dx = \sigma\ du \\ \bullet\ x = -\infty \ \Rightarrow\ u = -\infty \\ \bullet\ x = +\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car la fonction $\psi : u \mapsto \sigma\, u + m$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, +\infty[$.

IV.2. Transformée affine d'une v.a.r. qui suit une loi normale

Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

On a alors :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right) \ \Leftrightarrow\ \frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)}$$

Démonstration.
Notons $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma}$.

($\Rightarrow$) Remarquons tout d'abord : $X^* = \dfrac{1}{\sigma}\ X - \dfrac{m}{\sigma}$. Notons $a = \dfrac{1}{\sigma}$ et $b = -\dfrac{m}{\sigma}$.

Alors $X^* = aX + b$ est une transformée affine de X. On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la densité de probabilité f_{X^*} vérifie :

$$\begin{aligned} f_{X^*}(x) &= \frac{1}{|a|}\ \varphi_{m,\sigma^2}\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{\frac{1}{\sigma}}\ \varphi_{m,\sigma^2}\left(\frac{x+\frac{m}{\sigma}}{\frac{1}{\sigma}}\right) = \sigma \cdot \varphi_{m,\sigma^2}\left(\sigma\ x + m\right) \\ &= \cancel{\sigma} \cdot \frac{1}{\cancel{\sigma}\ \sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(\sigma x+m)-m}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x)^2} \end{aligned}$$

On reconnaît une densité de probabilité de la loi normale centrée réduite.
Ainsi : $X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

($\Leftarrow$) On se sert ici du fait que X apparaît comme transformée affine de la v.a.r. X^*. En effet : $X = \sigma\ X^* + m$ ($X = aX^* + b$ avec $a = \sigma$ et $b = m$).
On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la densité de probabilité f_X vérifie :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{|a|}\ f_{X^*}\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{\sigma}\ f_{X^*}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \end{aligned}$$

On reconnaît une densité de probabilité de la loi normale de paramètre (m, σ^2).
Ainsi : $X^* \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$. $\square$

IV.3. Espérance et variance

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$.

Alors, on a :

1) X admet une espérance.	***1)*** X admet une variance.
2) $\boxed{\mathbb{E}(X) = m}$	***2)*** $\boxed{\mathbb{V}(X) = \sigma^2}$

Démonstration.
Il y a deux manières de faire cette démonstration.

- La manière directe consiste à étudier $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ \varphi_{m,\sigma^2}(t)\ dt$ (bon exercice).
- La seconde manière est plus élégante. Elle consiste à utiliser le théorème précédent.
  Notons $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma}$. On a alors $X = \sigma\ X^* + m$.
  Par la linéarité de l'espérance, la v.a.r. X^* admet une espérance donnée par :
  $$\mathbb{E}(X) = \sigma\ \mathbb{E}(X^*) + m = \sigma \times 0 + m = m$$
  (de même, $\mathbb{V}(X) = \sigma^2 \mathbb{V}(X^*) = \sigma^2 \times 1 = \sigma^2$) $\square$

À RETENIR

- On retiendra que la transformée affine d'une v.a.r. qui suit une loi normale (de paramètres quelconques) suit une loi normale.
- Plus précisément, si $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$:

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right) \ \Leftrightarrow\ aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}\left(am + b, a^2\,\sigma^2\right)}$$

Partant de X v.a.r. tel que $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$, la v.a.r. $Y = aX + b$ suit une loi normale.
Ses caractéristiques s'obtiennent en calculant :

$$\begin{array}{rcccccc} \mathbb{E}(Y) & = & \mathbb{E}(aX+b) & = & a\,\mathbb{E}(X)+b & = & a\,m+b \\ \mathbb{V}(Y) & = & \mathbb{V}(aX+b) & = & a^2\,\mathbb{V}(X) & = & a^2\,\sigma^2 \end{array}$$

IV.4. Stabilité par somme des lois normales

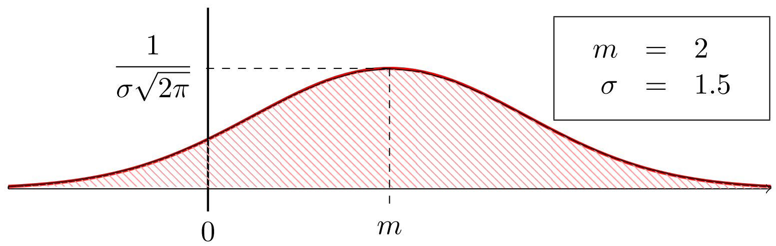
Soit $(m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(\sigma_1, \sigma_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.
Soit X_1 une v.a.r. telle que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_1, \sigma_1^2\right)$.
Soit X_2 une v.a.r. telle que $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_2, \sigma_2^2\right)$.
On suppose de plus que X_1 et X_2 sont indépendantes.
Alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$.

Généralisation :
Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes.
On suppose que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$: $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_i, \sigma_i^2\right)$.
Alors $X_1 + \ldots + X_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_1 + \ldots + m_n, \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2\right)$.

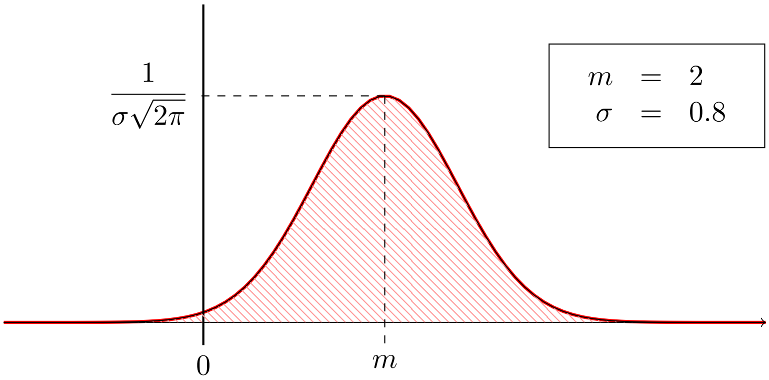
IV.5. Représentation graphique

On considère une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$.
Une densité d'une telle loi est représentée par une courbe en cloche.
× Dans le cas d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$, cette cloche est centrée en 0.
× Dans le cas d'une loi $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$, cette cloche est centrée en m.
D'autre part, la forme de cette cloche (hauteur et largeur) dépend de σ :
× plus σ est petit, plus le pic est haut et fin ;
× plus σ est grand, plus le pic est bas et large.
Notez que l'aire sous la courbe entre $-\infty$ et $+\infty$ est invariante ($\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{m,\sigma}(t)\ dt = 1$).

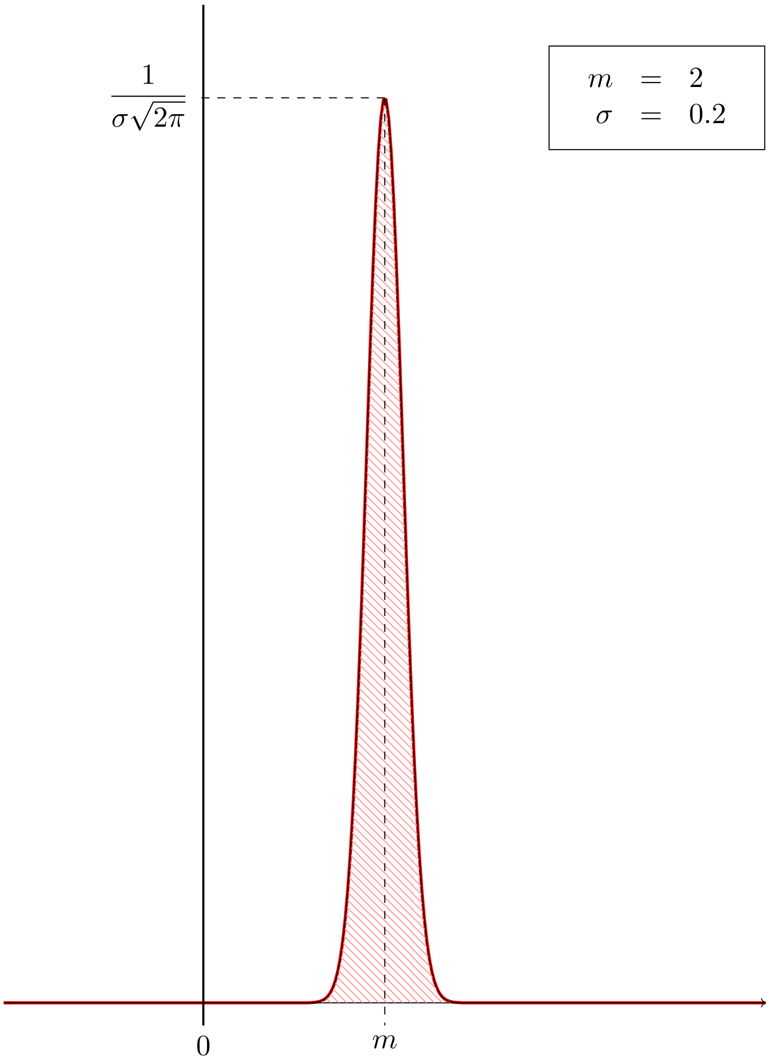
- Représentation graphique de la densité φ_{m,σ^2} introduite en définition
  × Dans le cas où $m = 2$ et $\sigma = 1,5$.



× Dans le cas où $m = 2$ et $\sigma = 0,8$.



× Dans le cas où $m = 2$ et $\sigma = 0,2$.



- Représentation graphique de la fonction de répartition Φ_{m,σ^2}

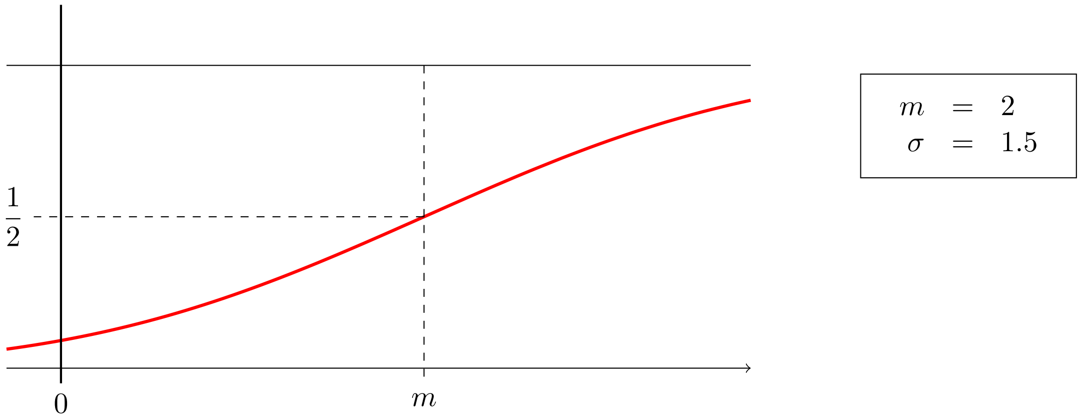
  Rappelons tout d'abord :

$$\boxed{\begin{array}{lcl|ccc} \Phi_{m,\sigma^2} & : & & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & & x & \mapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2}\, dt \end{array}}$$

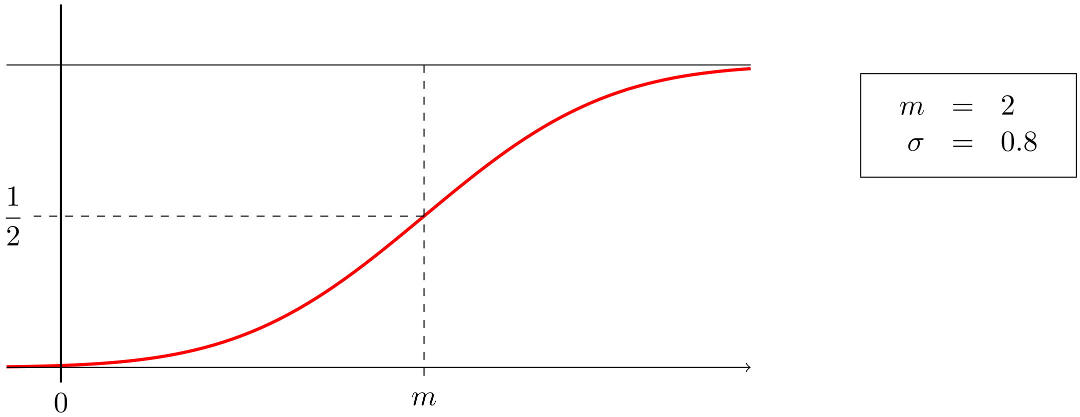
En posant le changement de variable $\boxed{u = \dfrac{t-m}{\sigma}}$, on démontre que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_{m,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2}\, dt = \frac{1}{\cancel{\sigma}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(u)^2}\, (\cancel{\sigma}\, du) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

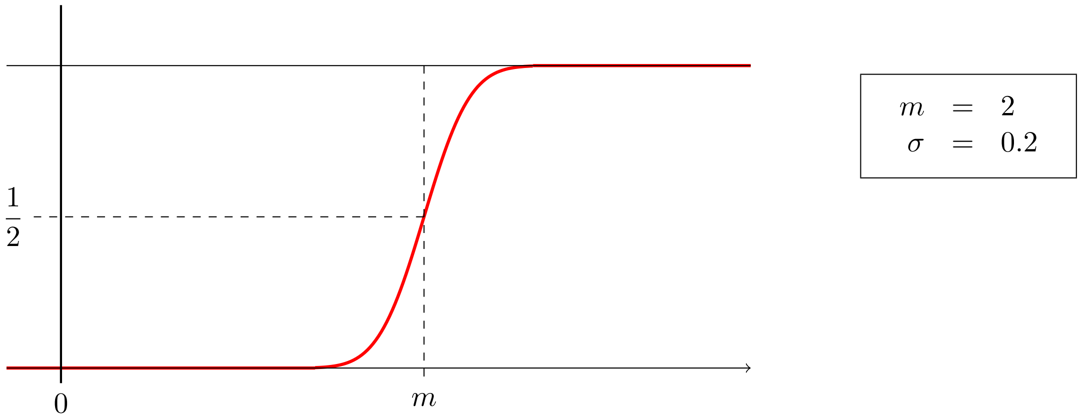
× Dans le cas où $m = 2$ et $\sigma = 1,5$.



× Dans le cas où $m = 2$ et $\sigma = 0,8$.



× Dans le cas où $m = 2$ et $\sigma = 0,2$.



Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

Cette semaine, les questions de cours sont les suivantes :

- propriétés de stabilité des lois usuelles (stabilité des lois uniformes par transformée affine, des lois exponentielles par produit par un scalaire, des lois normales par transformée affine et somme de v.a.r. indépendantes). Énoncés uniquement.
- propriétés de la fonction de répartition Φ. Énoncé et démonstration.
- caractéristiques des lois usuelles à densité (fonction de répartition, densité, espérance, variance).

Exercices types

Les compétences attendues sur le chapitre v.a.r. à densité sont les suivantes :

- savoir déterminer la fonction de répartition d'une v.a.r. X.
  (on commence généralement par déterminer une sur-approximation de l'ensemble image : $X(\Omega) \subset \dots$, afin de pouvoir mettre en place aisément la disjonction de cas)
- savoir démontrer qu'une v.a.r. est / n'est pas une v.a.r. à densité à l'aide de la régularité de F_X.
  La continuité (de F_X) se démontre sur les intervalles ouverts et on complète par une étude des limites aux points restants.
- savoir obtenir **une** densité de probabilité f_X d'une v.a.r. X admettant une densité.
  Pour ce faire, on dérive F_X sur les intervalles ouverts et on choisit une valeur positive pour f_X sur les points restants.
- savoir démontrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fournie par l'énoncé est une densité de probabilité (le programme officiel n'exige par contre pas de savoir démontrer qu'une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de répartition).
- savoir déterminer la fonction de répartition F_X d'une v.a.r. X à partir d'une densité de probabilité f_X.
- savoir exprimer les calculs de probabilités d'une v.a.r. à densité à l'aide d'intégrales.
- savoir déterminer la loi (c'est-à-dire la fonction de répartition) d'une transformée Y (pas forcément affine) d'une v.a.r. X.
  (on commence généralement par déterminer une sur-approximation de l'ensemble image : $Y(\Omega) \subset \dots$, afin de pouvoir mettre en place aisément la disjonction de cas)
- en particulier, savoir déterminer la loi d'une transformée affine, du carré, de la valeur absolue, de la partie entière, d'une v.a.r. à densité.
- savoir déterminer la loi du min (resp. du max) de deux (ou plus) v.a.r. à densité indépendantes.
  *(cela n'a rien à avoir avec la loi de la transformée d'***une** *v.a.r. !)*
- savoir déterminer la loi de la somme de deux v.a.r. à densité indépendantes (le produit de convolution devra être rappelé dans l'énoncé).
- savoir démontrer qu'une v.a.r. admet une espérance (resp. une variance).
- savoir calculer le moment d'ordre 2 des v.a.r. qui suivent une loi usuelle.
- savoir calculer l'espérance (resp. la variance) d'une v.a.r. à densité.
- savoir déterminer l'espérance d'un produit de deux v.a.r. (à densité ou non) **indépendantes** / savoir déterminer la variance de la somme de deux v.a.r. (à densité ou non) **indépendantes**
- savoir démontrer que la transformée $g(X)$ d'une v.a.r. X à densité admet une espérance à l'aide du **théorème de transfert** *(certainement l'un des théorèmes les plus importants en* `TOP3` *!).*
- connaître les propriétés de l'espérance (linéarité) et de la variance (variance de la somme dans le cas où les v.a.r. considérées sont indépendantes).