Colles

semaine 20 : 7 février - 12 février

Notations et définitions utiles

Notion d'adhérence

- On appelle adhérence de l'intervalle I, et on note $\overline{I}$, l'intervalle I auquel on a rajouté ses bornes finies. Plus précisément, on a :
  1) si I à bornes finies $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (avec $a < b$) : alors $\overline{I} = I \cup \{a, b\} = [a, b]$.
  ($\hookrightarrow$ *vrai pour* $I =]a, b[$, $I =]a, b]$, $I = [a, b[$, $I = [a, b]$)
  2) si I à borne(s) infinie(s) :
  × si $I =]-\infty, b[$ ou $I =]-\infty, b]$, alors $\overline{I} =]-\infty, b]$,
  × si $I =]a, +\infty[$ ou $I = [a, +\infty[$, alors $\overline{I} = [a, +\infty[$,
  × si $I =]-\infty, +\infty[$, alors $\overline{I} =]-\infty, +\infty[$.

Voisinage d'un point

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{I}$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ (f est une fonction définie sur I).

- On appelle **voisinage** (fermé) de x_0 tout segment de la forme :
  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ où α est un réel tel que $\alpha > 0$.
- On appelle **voisinage épointé** (fermé) de x_0 tout ensemble de la forme $V \setminus \{x_0\}$ où V est un voissinage de x_0.
  Autrement dit, un voisinage épointé de x_0 est un ensemble de la forme :
  $[x_0 - \alpha, x_0[\cup]x_0 + \alpha]$ où α est un réel tel que $\alpha > 0$.
- On dit qu'une propriété relative à f est vraie **au voisinage** de x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que la propriété est vraie sur $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

Voisinage de $+\infty$

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémité $+\infty$ et $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur I.

- On appelle **voisinage** (fermé) de $+\infty$ tout intervalle de la forme :
  $[A, +\infty[$ où A est un réel (tel que $A > 0$).
- On dit qu'une propriété est vraie **au voisinage** de $+\infty$ s'il existe A (> 0) tel que la propriété est vraie sur $I \cap [A, +\infty[$.

Voisinage de $-\infty$

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémité $-\infty$ et $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur I.

- On appelle **voisinage** (fermé) de $-\infty$ tout intervalle de la forme :
  $]-\infty, -B]$ où B est un réel (tel que $B > 0$).
- On dit qu'une propriété est vraie **au voisinage** de $-\infty$ s'il existe B (> 0) tel que la propriété est vraie sur $I \cap]-\infty, -B]$.

I. Relations de comparaisons et théorème des croissances comparées

I.1. Négligeabilité

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un intervalle I.

Soit $x_0 \in \overline{I}$ ou $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Supposons que g ne s'annule pas dans un voisinage épointé de x_0.

- On dit que f **est négligeable devant** g **en** x_0 si :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$$

- Si c'est le cas, on dit que « f est un petit o de g en x_0 » (o = 15ème lettre de l'alphabet) et on note : $f(x) \underset{x \to x_0}{=} o\, g(x)$.

- On utilise aussi parfois la notation : $f(x) \underset{x_0}{<<} g(x)$.

  Cette notation trompeuse (à ne surtout pas confondre avec $f(x) \leqslant g(x)$!) est réservée à l'écriture d'échelles de comparaison asymptotiques.

I.2. Croissances comparées

- $\boxed{\forall a > 0, \forall b > 0,\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^b}{x^a} = 0}$ et $\boxed{\forall a > 0, \forall q > 1,\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^a}{q^x} = 0}$

- On peut écrire le résultat de ce théorème sous la forme d'une échelle de comparaison asymptotique : $\boxed{\forall a > 0, \forall b > 0, \forall q > 1,\ (\ln x)^b \underset{+\infty}{<<} x^a \underset{+\infty}{<<} q^x}$

- Il faut savoir lire ce théorème dans l'autre sens :

  $\boxed{\forall a > 0, \forall b > 0, q > 1,\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^a}{(\ln x)^b} = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{q^x}{x^a} = +\infty}$

- On en déduit aussi : $\boxed{\forall a > 0, \forall r \in]0, 1[,\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^a\, r^x = 0}$

  et : $\boxed{\forall a > 0, \forall b > 0,\ \lim\limits_{x \to 0^+} x^a\, (\ln x)^b = 0}$

I.3. Équivalence

I.3.a) Définition

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un intervalle I.

Soit $x_0 \in \overline{I}$ ou $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Supposons que g ne s'annule pas dans un voisinage épointé de x_0.

- On dit que f **est équivalente à** g **en** x_0 et on note $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ si : $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1}$

I.3.b) Propriétés générales

Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$, des fonctions.

Soit $x_0 \in \overline{I}$ ou $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).

(lorsque nécessaire, on ajoutera l'hypothèse que ces fonctions ne s'annulent pas dans un voisinage épointé de x_0)

1) Réflexivité :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} f(x)}$$

2) Symétrie :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \Rightarrow g(x) \underset{x \to x_0}{\sim} f(x)}$$

3) Transitivité :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x \to x_0}{\sim} h(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} h(x)}$$

I.3.c) Équivalents et limites

Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$, des fonctions.

Soit $x_0 \in \overline{I}$ ou $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).

(lorsque nécessaire, on ajoutera l'hypothèse que ces fonctions ne s'annulent pas dans un voisinage épointé de x_0)

1) Calcul de limites à l'aide d'un équivalent :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell}$$

(avec ℓ limite éventuellement infinie)

2) Calcul d'équivalents à l'aide d'une limite (avec ℓ limite finie) :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \\ \ell \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} \ell}$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \\ g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \\ \ell \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)}$$

I.3.d) Calculs d'équivalents en pratique : compatibilité avec le produit, le quotient, l'élévation à la puissance α

Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$, des fonctions.

Soit $x_0 \in \overline{I}$ ou $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).

(lorsque nécessaire, on ajoutera l'hypothèse que ces fonctions ne s'annulent pas dans un voisinage épointé de x_0)

1) Compatibilité avec le produit :

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \\ h(x) \underset{x \to x_0}{\sim} t(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \times h(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \times t(x)$$

2) Compatibilité avec le quotient :

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \\ h(x) \underset{x \to x_0}{\sim} t(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f(x)}{h(x)} \underset{x \to x_0}{\sim} \frac{g(x)}{t(x)}$$

3) Compatibilité avec l'élévation à la puissance $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \quad \Rightarrow \quad \big(f(x)\big)^n \underset{x \to x_0}{\sim} \big(g(x)\big)^n$$

4) Compatibilité avec l'élévation à la puissance $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \\ g > 0 \text{ dans un voisinage de } x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \big(f(x)\big)^\alpha \underset{x \to x_0}{\sim} \big(g(x)\big)^\alpha$$

5) Compatibilité avec la valeur absolue :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \quad \Rightarrow \quad |f(x)| \underset{x \to x_0}{\sim} |g(x)|$$

Remarque

- Précisons que l'on ne doit `JAMAIS` écrire : $f(x) \cancel{\underset{x \to x_0}{\sim}} 0$.
  - × car la définition établie dans ce cours ne nous permet tout simplement pas de définir correctement cette écriture.
  - × car c'est un cas qui a peu d'intérêt pratique puisqu'il signifie que f est nulle dans un voisinage de 0.
- Par ailleurs, il faut retenir :

On ne peut sommer des équivalents !

De manière générale, on en peut appliquer de fonction de part et d'autre d'une équivalence !

II. Notion de développement limité

II.1. Rappel : taux d'accroissement et dérivabilité

II.1.a) Taux d'accroissement

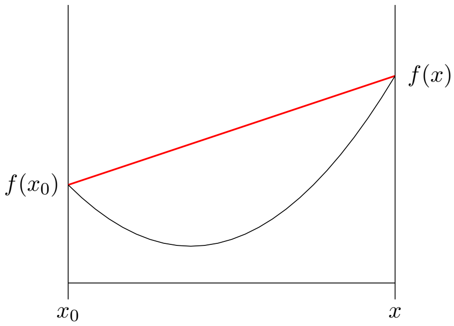
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On appelle **taux d'accroissement** de f en x_0 la fonction :

$$\tau_{x_0}(f) \quad : \left| \begin{array}{ccc} I \setminus \{x_0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{array} \right.$$

Interprétation graphique

Notons $M(x, f(x))$ et $M_0(x_0, f(x_0))$ points de la courbe représentative de f.
Alors $\tau_{x_0}(f)(x)$ est la pente de la corde M_0M.



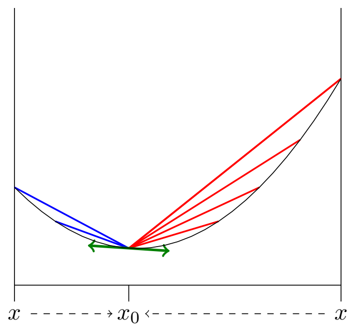
II.1.b) Dérivée d'une fonction en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

- On dit que f **est dérivable en** x_0 lorsque la fonction $\tau_{x_0}(f)$ admet une limite finie en x_0.
- Lorsque cette limite existe, elle est appelée **nombre dérivé de** f **en** x_0 et est noté $f'(x_0)$. Autrement dit :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

Interprétation graphique



II.2. Développement limité à l'ordre 1 au voisinage d'un point

II.2.a) $\mathrm{DL}_1(x_0)$ et approximation affine de f en x_0

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On suppose que f est définie dans un voisinage de x_0.

- On dit que f possède **un développement limité d'ordre 1 en x_0** s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (définie au voisinage de x_0) tels que, au voisinage de x_0 :

$$\boxed{f(x) = a + b\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0}$$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On suppose que f est définie dans un voisinage de x_0.

f est dérivable en x_0	$\Leftrightarrow$	f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0

Lorsque ce développement limité existe, ses coefficients sont : $\left\{\begin{array}{l} a = f(x_0) \\ b = f'(x_0) \end{array}\right.$

Ainsi, si f est dérivable en x_0, il existe $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq au voisinage de x_0 :

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0}$$

II.2.b) Tangente de f en x_0

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

- Si f est dérivable en x_0, on appelle **tangente de f en x_0** la droite passant par $(x_0, f(x_0))$ de coefficient directeur $f'(x_0)$.
- Autrement dit, c'est la droite d'équation : $\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0)}$

Remarque

Il arrive parfois que la fonction f possède une dérivée à gauche et à droite en x_0 sans pour autant être dérivable en x_0. Plus précisément, c'est le cas lorsque $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$. On introduit alors les notions suivantes.

- La demi-tangente à gauche de f en x_0 est la droite d'équation :
  $y = f(x_0) + f'_g(x_0)\,(x - x_0)$.
- La demi-tangente à gauche de f en x_0 est la droite d'équation :
  $y = f(x_0) + f'_d(x_0)\,(x - x_0)$.

Tangente de la forme $x = x_0$)

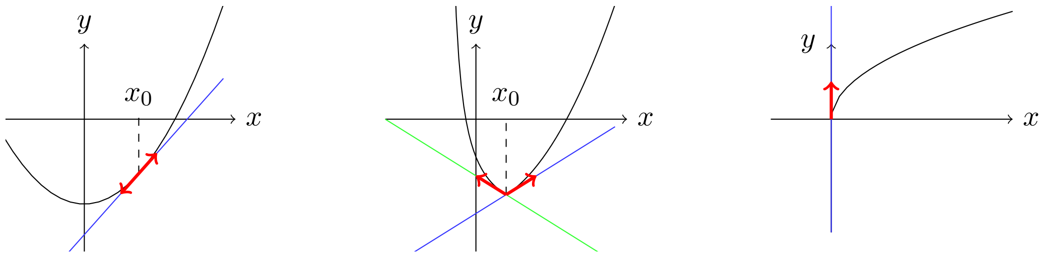
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

Supposons que :

- × f est continue en x_0
- × $\lim\limits_{x \to x_0} \tau_{x_0}(f)(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) *(f est donc non dérivable en x_0)*

- On appelle **tangente verticale de f en x_0** la droite verticale passant par le point $(x_0, f(x_0))$.
- Autrement dit, c'est la droite d'équation $x = x_0$.

Représentation graphique



Tangente Demi-tangentes Tangente verticale

II.2.c) $\mathrm{DL}_1(x_0)$ et négligeabilité / équivalence

Dans l'écriture du $\mathrm{DL}_1(x_0)$ de f, on a introduit l'écriture $(x - x_0)\,\varepsilon(x)$ où la fonction ε est telle que $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

- La fonction $x \mapsto (x - x_0)\ \varepsilon(x)$ est négligeable devant $x \mapsto (x - x_0)$ en x_0. En effet :

$$\frac{\cancel{(x - x_0)}\,\varepsilon(x)}{\cancel{x - x_0}} = \varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$$

- C'est une écriture générique d'une fonction négligeable devant $x \mapsto (x - x_0)$ en x_0. Cette écriture étant un peu lourde, on utilisera généralement la notation $\underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)$.

Formule de Taylor-Young (à l'ordre 1)
Si f est dérivable en x_0, son $\mathrm{DL}_1(x_0)$ s'écrit sous la forme :

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)}$$

Exemple
Avec cette notation, au voisinage de 0, on a :

$$\boxed{\ln(1 + x) = x + \underset{x \to 0}{o}(x)} \qquad \boxed{\mathrm{e}^x = 1 + x + \underset{x \to 0}{o}(x)}$$

$$\boxed{\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{1}{2}\,x + \underset{x \to 0}{o}(x)} \qquad \boxed{\frac{1}{1 + x} = 1 - x + \underset{x \to 0}{o}(x)}$$

II.3. Développement limité à l'ordre 2 au voisinage d'un point

II.3.a) Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On suppose que f est définie dans un voisinage de x_0.

- On dit que f possède **un développement limité d'ordre 2 en x_0** s'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$ une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (définie au voisinage de x_0) tels que, au voisinage de x_0 :

$$\boxed{f(x) = a + b\,(x - x_0) + c\,(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2\,\varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0}$$

- Ce que l'on peut encore écrire :

$$\boxed{f(x) = a + b\,(x - x_0) + c\,(x - x_0)^2 + \underset{x \to x_0}{o}\big((x - x_0)^2\big)}$$

II.3.b) Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On suppose que f est définie dans un voisinage de x_0.

f est deux fois dérivable en x_0	$\Rightarrow$	f admet un développement limité d'ordre 2 en x_0

- Lorsque la fonction f est deux f dérivables, elle admet un $\mathrm{DL}_2(x_0)$ dont les coefficients sont :

$$\left\{\begin{array}{l} a = f(x_0) \\ b = f'(x_0) \\ c = \dfrac{f''(x_0)}{2} \end{array}\right.$$

- Ainsi, si f est deux fois dérivable en x_0, il existe $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (définie au voisinage de x_0) telle que, au voisinage de x_0 :

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2\,\varepsilon(x)}$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

- Ce que l'on peut encore écrire :

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + \underset{x \to x_0}{o}\big((x - x_0)^2\big)}$$

II.3.c) Développements limités usuels en 0

Rappelons que si f est deux fois dérivable en 0 alors son $\mathrm{DL}_2(0)$ s'écrit :

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\big(x^2\big)$$

- $\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}\big(x^2\big)}$
- $\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\big(x^2\big)}$ et $\boxed{\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\big(x^2\big)}$
- $\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}\big(x^2\big)}$ et $\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}\big(x^2\big)}$
- $\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\big(x^2\big)}$

  On en déduit notamment : $\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}\big(x^2\big)}$

II.3.d) Calcul pratique des développements limités

Somme et produit de développement limités

On l'a déjà dit : un développement limité établit une égalité vérifiée au voisinage de x_0. Ainsi, toutes les opérations raisonnables sur les égalités sont envisageables sur les développements limités. On pourra notamment réaliser des **sommes** (ce qui n'autorise toujours pas à sommer des équivalents !) et des **produits** de développements limités.

Manipulation pratique des $\underset{x\to 0}{o}(.)$

Afin de déterminer de matnière mécanique le $\mathrm{DL}_2(0)$ d'une somme ou d'un produit de fonctions, on pourra utiliser les propriétés suivantes.

Pour tout $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

1) $\boxed{\underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big) + \underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big) = \underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big)}$ *2)* $\boxed{\underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big) - \underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big) = \underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big)}$

3) Si on suppose de plus $m < n$: $\boxed{\underset{x\to 0}{o}\big(x^m\big) + \underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big) = \underset{x\to 0}{o}\big(x^m\big)}$

4) $\boxed{x^m \times \underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big) = \underset{x\to 0}{o}\big(x^{m+n}\big)}$

5) $\boxed{\underset{x\to 0}{o}\big(x^m\big) \times \underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big) = \underset{x\to 0}{o}\big(x^{m+n}\big)}$

6) Pour tout $c \in \mathbb{R}$: $\boxed{\underset{x\to 0}{o}\big(c\,x^n\big) = \underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big)}$

Développement limités et composition
On peut aussi, sous certaines hypothèses, agir par composition. Considérons une fonction f définie dans un voisinage de 0 et deux fois dérivable en 0.

- D'après la formule de Taylor-Young, pour tout u au voisinage de 0, on a :

$$f(u) = f(0) + f'(0)\,u + \frac{f''(0)}{2}\,u^2 + u^2\,\varepsilon(u)$$

où ε est une fonction définie au voisinage de 0 et telle que : $\lim\limits_{u \to 0} \varepsilon(u) = 0$.
Soit x dans un voisinage de 0. Alors $u = 2x$ est lui aussi dans un voisinage de 0.
En appliquant l'égalité précédente, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} f(2x) & = & f(0) + f'(0)\,(2x) + \dfrac{f''(0)}{2}\,(2x)^2 + (2x)^2\,\varepsilon(2x) \\ & = & f(0) + 2\,f'(0)x + 2\,f''(0)\,x^2 + x^2\,\big(4\,\varepsilon(2x)\big) \end{array}$$

Et comme, par composition de limite : $\lim\limits_{x \to 0} 4\,\varepsilon(2x) = 4 \times 0 = 0$, l'égalité au-dessus est bien le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction $g : x \mapsto f(2x)$.

II.3.e) Position locale d'une courbe par rapport à sa tangente

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.
On suppose que f est définie dans un voisinage de x_0.
On supppose de plus que f est deux fois dérivable en x_0.
On a alors, dans un voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + \underset{x \to x_0}{o}\big((x - x_0)^2\big)$$

Et ainsi :

$$\begin{array}{rcl} f(x) - \big(f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\big) & = & \dfrac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + \underset{x \to x_0}{o}\big((x - x_0)^2\big) \\ & \underset{x \to x_0}{\sim} & \dfrac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 \end{array}$$

La position locale de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente en x_0 est donnée par le signe de $f''(x_0)$. Plus précisément :

× si $f''(x_0) > 0$, alors, au voisinage de x_0, $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de sa tangente.
× si $f''(x_0) < 0$, alors, au voisinage de x_0, $\mathcal{C}_f$ est située en-dessus de sa tangente.

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

Cette semaine, les questions de cours sont les suivantes :

– propriétés de stabilité des lois usuelles (stabilité des lois uniformes par transformée affine, des lois exponentielles par produit par un scalaire, des lois normales par transformée affine et somme de v.a.r. indépendantes). Énoncés uniquement.

– propriétés de la fonction de répartition Φ. Énoncé et démonstration.

– caractéristiques des lois usuelles à densité (fonction de répartition, densité, espérance, variance).

– théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives : étude d'un exemple donné par le colleur.
Pour déterminer l'équivalent de l'intégrande, il faudra passer par un calcul de développement limité.

– loi de $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ \ln(1-U)$ où $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$. Démonstration attendue.

Exercices types

Les compétences attendues sur le chapitre DL sont les suivantes :

– savoir utiliser correctement le théorème des croissances comparées.
(par exemple, la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^{x^2}}$ *n'est pas une instance de ce théorème)*

– savoir démontrer le caractère négligeable en formant le quotient.

– savoir démontrer que deux fonctions sont équivalentes en formant le quotient.

– savoir déterminer un équivalent simple d'une fonction à l'aide des propriétés des équivalents. En particulier :

  × l'équivalent d'un produit est le produit des équivalents.

  × l'équivalent d'un quotient est le quotient des équivalents.

  × l'équivalent d'une élévation à la puissance n (resp. α) est élévation à la puissance n (resp. α) de l'équivalent.

– savoir déterminer la limite à l'aide d'un équivalent.

– savoir tracer une tangente à l'aide d'un point et du coefficient directeur. La courbe représentative doit apparaître confondue avec sa tangente au voisinage du point considéré.

– savoir déterminer un développement limité à l'ordre 2 (formule de Taylor-Young et manipulation pratique).