Colles

semaine 21 : 14 février - 19 février

Notations et définitions utiles

Notion d'adhérence

- On appelle adhérence de l'intervalle I, et on note $\overline{I}$, l'intervalle I auquel on a rajouté ses bornes finies. Plus précisément, on a :
  1) si I à bornes finies $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (avec $a < b$) : alors $\overline{I} = I \cup \{a, b\} = [a, b]$.
  ($\hookrightarrow$ vrai pour $I =]a, b[$, $I =]a, b]$, $I = [a, b[$, $I = [a, b]$)
  2) si I à borne(s) infinie(s) :
  - $\times$ si $I =]-\infty, b[$ ou $I =]-\infty, b]$, alors $\overline{I} =]-\infty, b]$,
  - $\times$ si $I =]a, +\infty[$ ou $I = [a, +\infty[$, alors $\overline{I} = [a, +\infty[$,
  - $\times$ si $I =]-\infty, +\infty[$, alors $\overline{I} =]-\infty, +\infty[$.

Voisinage d'un point

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{I}$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ (f est une fonction définie sur I).

- On appelle **voisinage** (fermé) de x_0 tout segment de la forme :
  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ où α est un réel tel que $\alpha > 0$.
- On appelle **voisinage épointé** (fermé) de x_0 tout ensemble de la forme $V \setminus \{x_0\}$ où V est un voissinage de x_0.
  Autrement dit, un voisinage épointé de x_0 est un ensemble de la forme :
  $[x_0 - \alpha, x_0[\cup]x_0 + \alpha]$ où α est un réel tel que $\alpha > 0$.
- On dit qu'une propriété relative à f est vraie **au voisinage** de x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que la propriété est vraie sur $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

Voisinage de $+\infty$

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémité $+\infty$ et $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur I.

- On appelle **voisinage** (fermé) de $+\infty$ tout intervalle de la forme :
  $[A, +\infty[$ où A est un réel (tel que $A > 0$).
- On dit qu'une propriété est vraie **au voisinage** de $+\infty$ s'il existe A (> 0) tel que la propriété est vraie sur $I \cap [A, +\infty[$.

Voisinage de $-\infty$

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémité $-\infty$ et $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur I.

- On appelle **voisinage** (fermé) de $-\infty$ tout intervalle de la forme :
  $]-\infty, -B]$ où B est un réel (tel que $B > 0$).
- On dit qu'une propriété est vraie **au voisinage** de $-\infty$ s'il existe B (> 0) tel que la propriété est vraie sur $I \cap]-\infty, -B]$.

I. Relations de comparaisons et théorème des croissances comparées

I.1. Négligeabilité

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un intervalle I.

Soit $x_0 \in \overline{I}$ ou $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Supposons que g ne s'annule pas dans un voisinage épointé de x_0.

- On dit que f **est négligeable devant** g **en** x_0 si :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \ = \ 0}$$

- Si c'est le cas, on dit que « f est un petit o de g en x_0 » (o = 15ème lettre de l'alphabet) et on note : $f(x) = \underset{x \to x_0}{o}\ g(x)$.

- On utilise aussi parfois la notation : $f(x) \underset{x_0}{<<} g(x)$.

  Cette notation trompeuse (à ne surtout pas confondre avec $f(x) \leqslant g(x)$!) est réservée à l'écriture d'échelles de comparaison asymptotiques.

I.2. Croissances comparées

- $\boxed{\forall a > 0, \forall b > 0, \ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^b}{x^a} = 0}$ et $\boxed{\forall a > 0, \forall q > 1, \ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^a}{q^x} = 0}$
- On peut écrire le résultat de ce théorème sous la forme d'une échelle de comparaison asymptotique : $\boxed{\forall a > 0, \forall b > 0, \forall q > 1, \ (\ln x)^b \underset{+\infty}{<<} x^a \underset{+\infty}{<<} q^x}$
- Il faut savoir lire ce théorème dans l'autre sens :

$$\boxed{\forall a > 0, \forall b > 0, q > 1, \ \lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{(\ln x)^b} = +\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{q^x}{x^a} = +\infty}$$

- On en déduit aussi : $\boxed{\forall a > 0, \forall r \in]0,1[, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^a \ r^x = 0}$

  et : $\boxed{\forall a > 0, \forall b > 0, \quad \lim\limits_{x \to 0^+} x^a \ (\ln x)^b \ = \ 0}$

I.3. Équivalence

I.3.a) Définition

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un intervalle I.

Soit $x_0 \in \overline{I}$ ou $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Supposons que g ne s'annule pas dans un voisinage épointé de x_0.

- On dit que f **est équivalente à** g **en** x_0 et on note $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ si : $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1}$

I.3.b) Propriétés générales

Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$, des fonctions.

Soit $x_0 \in \overline{I}$ ou $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).
(lorsque nécessaire, on ajoutera l'hypothèse que ces fonctions ne s'annulent pas dans un voisinage épointé de x_0)

1) Réflexivité :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} f(x)}$$

2) Symétrie :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \ \Rightarrow \ g(x) \underset{x \to x_0}{\sim} f(x)}$$

3) Transitivité :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x \to x_0}{\sim} h(x) \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} h(x)}$$

I.3.c) Équivalents et limites

Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$, des fonctions.

Soit $x_0 \in \overline{I}$ ou $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).
(lorsque nécessaire, on ajoutera l'hypothèse que ces fonctions ne s'annulent pas dans un voisinage épointé de x_0)

1) Calcul de limites à l'aide d'un équivalent :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell}$$

(avec ℓ limite éventuellement infinie)

2) Calcul d'équivalents à l'aide d'une limite (avec ℓ limite finie) :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \\ \ell \neq 0 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} \ell}$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \\ g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \\ \ell \neq 0 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)}$$

I.3.d) Calculs d'équivalents en pratique : compatibilité avec le produit, le quotient, l'élévation à la puissance α

Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$, des fonctions.

Soit $x_0 \in \overline{I}$ ou $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).
(lorsque nécessaire, on ajoutera l'hypothèse que ces fonctions ne s'annulent pas dans un voisinage épointé de x_0)

1) Compatibilité avec le produit :

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ h(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \times h(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \times t(x)$$

2) Compatibilité avec le quotient :

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ h(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f(x)}{h(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} \frac{g(x)}{t(x)}$$

3) Compatibilité avec l'élévation à la puissance $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \quad \Rightarrow \quad \big(f(x)\big)^n \underset{x\to x_0}{\sim} \big(g(x)\big)^n$$

4) Compatibilité avec l'élévation à la puissance $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ g > 0 \text{ dans un voisinage de } x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \big(f(x)\big)^\alpha \underset{x\to x_0}{\sim} \big(g(x)\big)^\alpha$$

5) Compatibilité avec la valeur absolue :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \quad \Rightarrow \quad |f(x)| \underset{x\to x_0}{\sim} |g(x)|$$

Remarque

- Précisons que l'on ne doit `JAMAIS` écrire : $f(x) \cancel{\underset{x\to x_0}{\sim}} 0$.
  - × car la définition établie dans ce cours ne nous permet tout simplement pas de définir correctement cette écriture.
  - × car c'est un cas qui a peu d'intérêt pratique puisqu'il signifie que f est nulle dans un voisinage de 0.
- Par ailleurs, il faut retenir :

On ne peut sommer des équivalents !

De manière générale, on en peut appliquer de fonction de part et d'autre d'une équivalence !

II. Notion de développement limité

II.1. Rappel : taux d'accroissement et dérivabilité

II.1.a) Taux d'accroissement

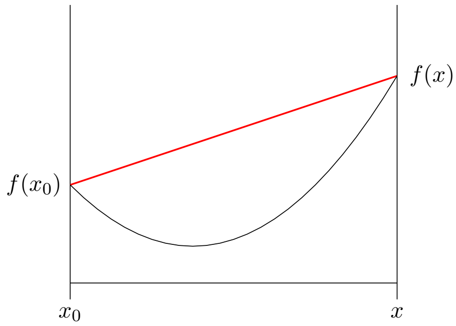
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On appelle **taux d'accroissement** de f en x_0 la fonction :

$$\tau_{x_0}(f) \;:\; \left| \begin{array}{ccc} I \setminus \{x_0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \end{array} \right.$$

Interprétation graphique

Notons $M(x, f(x))$ et $M_0(x_0, f(x_0))$ points de la courbe représentative de f.
Alors $\tau_{x_0}(f)(x)$ est la pente de la corde M_0M.



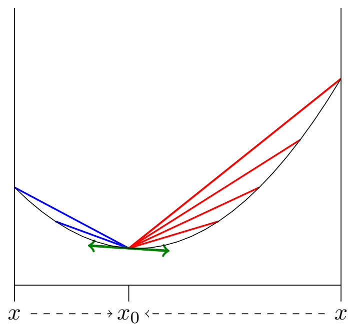
II.1.b) Dérivée d'une fonction en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

- On dit que f **est dérivable en** x_0 lorsque la fonction $\tau_{x_0}(f)$ admet une limite finie en x_0.
- Lorsque cette limite existe, elle est appelée **nombre dérivé de f en x_0** et est noté $f'(x_0)$. Autrement dit :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

Interprétation graphique



II.2. Développement limité à l'ordre 1 au voisinage d'un point

II.2.a) $\mathrm{DL}_1(x_0)$ et approximation affine de f en x_0

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On suppose que f est définie dans un voisinage de x_0.

- On dit que f possède **un développement limité d'ordre 1 en x_0** s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (définie au voisinage de x_0) tels que, au voisinage de x_0 :

$$\boxed{f(x) = a + b\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0}$$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On suppose que f est définie dans un voisinage de x_0.

$$\boxed{\begin{array}{c} f \text{ est dérivable} \\ \text{en } x_0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} f \text{ admet un développement limité} \\ \text{d'ordre 1 en } x_0 \end{array}}$$

Lorsque ce développement limité existe, ses coefficients sont : $\left\{ \begin{array}{l} a = f(x_0) \\ b = f'(x_0) \end{array} \right.$

Ainsi, si f est dérivable en x_0, il existe $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq au voisinage de x_0 :

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0}$$

II.2.b) Tangente de f en x_0

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

- Si f est dérivable en x_0, on appelle **tangente de f en x_0** la droite passant par $(x_0, f(x_0))$ de coefficient directeur $f'(x_0)$.
- Autrement dit, c'est la droite d'équation : $\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0)}$

Remarque

Il arrive parfois que la fonction f possède une dérivée à gauche et à droite en x_0 sans pour autant être dérivable en x_0. Plus précisément, c'est le cas lorsque $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$. On introduit alors les notions suivantes.

- La demi-tangente à gauche de f en x_0 est la droite d'équation : $y = f(x_0) + f'_g(x_0)\,(x - x_0)$.
- La demi-tangente à gauche de f en x_0 est la droite d'équation : $y = f(x_0) + f'_d(x_0)\,(x - x_0)$.

Tangente de la forme $x = x_0$)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

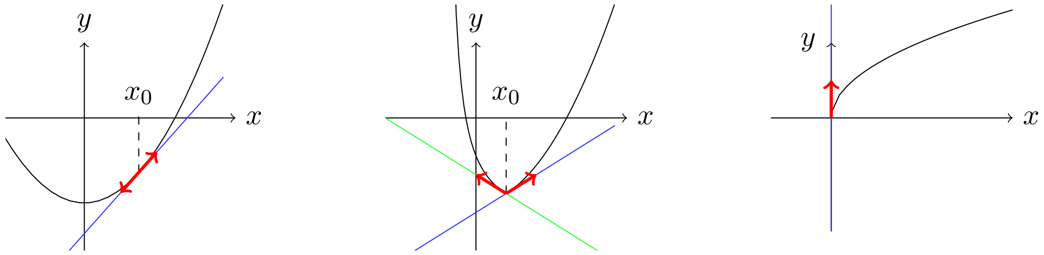
Supposons que :

× f est continue en x_0

× $\lim\limits_{x \to x_0} \tau_{x_0}(f)(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) *(f est donc non dérivable en x_0)*

- On appelle **tangente verticale de f en x_0** la droite verticale passant par le point $(x_0, f(x_0))$.
- Autrement dit, c'est la droite d'équation $x = x_0$.

Représentation graphique



Tangente Demi-tangentes Tangente verticale

II.2.c) $\mathrm{DL}_1(x_0)$ et négligeabilité / équivalence

Dans l'écriture du $\mathrm{DL}_1(x_0)$ de f, on a introduit l'écriture $(x - x_0)\,\varepsilon(x)$ où la fonction ε est telle que $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

- La fonction $x \mapsto (x - x_0)\ \varepsilon(x)$ est négligeable devant $x \mapsto (x - x_0)$ en x_0. En effet :

$$\frac{\cancel{(x - x_0)}\,\varepsilon(x)}{\cancel{x - x_0}} = \varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$$

- C'est une écriture générique d'une fonction négligeable devant $x \mapsto (x - x_0)$ en x_0. Cette écriture étant un peu lourde, on utilisera généralement la notation $\underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)$.

Formule de Taylor-Young (à l'ordre 1)

Si f est dérivable en x_0, son $\mathrm{DL}_1(x_0)$ s'écrit sous la forme :

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)}$$

Exemple

Avec cette notation, au voisinage de 0, on a :

$$\boxed{\ln(1 + x) = x + \underset{x \to 0}{o}(x)} \qquad \boxed{\mathrm{e}^x = 1 + x + \underset{x \to 0}{o}(x)}$$

$$\boxed{\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{1}{2}\,x + \underset{x \to 0}{o}(x)} \qquad \boxed{\frac{1}{1 + x} = 1 - x + \underset{x \to 0}{o}(x)}$$

II.3. Développement limité à l'ordre 2 au voisinage d'un point

II.3.a) Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On suppose que f est définie dans un voisinage de x_0.

- On dit que f possède **un développement limité d'ordre 2 en x_0** s'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$ une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (définie au voisinage de x_0) tels que, au voisinage de x_0 :

$$\boxed{f(x) = a + b\,(x - x_0) + c\,(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2\,\varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0}$$

- Ce que l'on peut encore écrire :

$$\boxed{f(x) = a + b\,(x - x_0) + c\,(x - x_0)^2 + \underset{x \to x_0}{o}\big((x - x_0)^2\big)}$$

II.3.b) Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On suppose que f est définie dans un voisinage de x_0.

f est deux fois dérivable en x_0	$\Rightarrow$	f admet un développement limité d'ordre 2 en x_0

- Lorsque la fonction f est deux f dérivables, elle admet un $\mathrm{DL}_2(x_0)$ dont les coefficients sont :

$$\left\{\begin{array}{l} a = f(x_0) \\ b = f'(x_0) \\ c = \dfrac{f''(x_0)}{2} \end{array}\right.$$

- Ainsi, si f est deux fois dérivable en x_0, il existe $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (définie au voisinage de x_0) telle que, au voisinage de x_0 :

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2\,\varepsilon(x)}$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

- Ce que l'on peut encore écrire :

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + \underset{x \to x_0}{o}\big((x - x_0)^2\big)}$$

II.3.c) Développements limités usuels en 0

Rappelons que si f est deux fois dérivable en 0 alors son $\text{DL}_2(0)$ s'écrit :

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\big(x^2\big)$$

- $\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}$
- $\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}$ et $\boxed{\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}$
- $\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}$ et $\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}$
- $\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}$

On en déduit notamment : $\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}$

II.3.d) Calcul pratique des développements limités

Somme et produit de développement limités

On l'a déjà dit : un développement limité établit une égalité vérifiée au voisinage de x_0. Ainsi, toutes les opérations raisonnables sur les égalités sont envisageables sur les développements limités. On pourra notamment réaliser des **sommes** (ce qui n'autorise toujours pas à sommer des équivalents !) et des **produits** de développements limités.

Manipulation pratique des $\underset{x\to 0}{o}(.)$

Afin de déterminer de matnière mécanique le $\text{DL}_2(0)$ d'une somme ou d'un produit de fonctions, on pourra utiliser les propriétés suivantes.
Pour tout $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

1) $\boxed{\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right) = \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)}$ *2)* $\boxed{\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right) - \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right) = \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)}$

3) Si on suppose de plus $m < n$: $\boxed{\underset{x\to 0}{o}\left(x^m\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right) = \underset{x\to 0}{o}\left(x^m\right)}$

4) $\boxed{x^m \times \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right) = \underset{x\to 0}{o}\left(x^{m+n}\right)}$

5) $\boxed{\underset{x\to 0}{o}\left(x^m\right) \times \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right) = \underset{x\to 0}{o}\left(x^{m+n}\right)}$

6) Pour tout $c \in \mathbb{R}$: $\boxed{\underset{x\to 0}{o}\left(c\,x^n\right) = \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)}$

Développement limités et composition
On peut aussi, sous certaines hypothèses, agir par composition. Considérons une fonction f définie dans un voisinage de 0 et deux fois dérivable en 0.

- D'après la formule de Taylor-Young, pour tout u au voisinage de 0, on a :

$$f(u) = f(0) + f'(0)\, u + \frac{f''(0)}{2}\, u^2 + u^2\, \varepsilon(u)$$

où ε est une fonction définie au voisinage de 0 et telle que : $\lim\limits_{u \to 0} \varepsilon(u) = 0$.
Soit x dans un voisinage de 0. Alors $u = 2x$ est lui aussi dans un voisinage de 0.
En appliquant l'égalité précédente, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} f(2x) & = & f(0) + f'(0)\,(2x) + \dfrac{f''(0)}{2}\,(2x)^2 + (2x)^2\,\varepsilon(2x) \\ & = & f(0) + 2\,f'(0)x + 2\,f''(0)\,x^2 + x^2\,\big(4\,\varepsilon(2x)\big) \end{array}$$

Et comme, par composition de limite : $\lim\limits_{x \to 0} 4\,\varepsilon(2x) = 4 \times 0 = 0$, l'égalité au-dessus est bien le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction $g : x \mapsto f(2x)$.

II.3.e) Position locale d'une courbe par rapport à sa tangente

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.
On suppose que f est définie dans un voisinage de x_0.
On supppose de plus que f est deux fois dérivable en x_0.
On a alors, dans un voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + \underset{x \to x_0}{o}\big((x - x_0)^2\big)$$

Et ainsi :

$$\begin{array}{rcl} f(x) - \big(f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\big) & = & \dfrac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + \underset{x \to x_0}{o}\big((x - x_0)^2\big) \\ & \underset{x \to x_0}{\sim} & \dfrac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 \end{array}$$

La position locale de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente en x_0 est donnée par le signe de $f''(x_0)$. Plus précisément :

× si $f''(x_0) > 0$, alors, au voisinage de x_0, $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de sa tangente.
× si $f''(x_0) < 0$, alors, au voisinage de x_0, $\mathcal{C}_f$ est située en-dessus de sa tangente.

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

Cette semaine, les questions de cours sont les suivantes :

- théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives : étude d'un exemple donné par le colleur.
  Pour déterminer l'équivalent de l'intégrande, il faudra passer par un calcul de développement limité.
- démonstration de la régularité d'une fonction de deux variables donnée par le colleur.

Exercices types

Les compétences attendues sur le chapitre DL sont les suivantes :

- savoir utiliser correctement le théorème des croissances comparées.
  (par exemple, la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^{x^2}}$ *n'est pas une instance de ce théorème)*
- savoir démontrer le caractère négligeable en formant le quotient.
- savoir démontrer que deux fonctions sont équivalentes en formant le quotient.
- savoir déterminer un équivalent simple d'une fonction à l'aide des propriétés des équivalents. En particulier :
  × l'équivalent d'un produit est le produit des équivalents.
  × l'équivalent d'un quotient est le quotient des équivalents.
  × l'équivalent d'une élévation à la puissance n (resp. α) est élévation à la puissance n (resp. α) de l'équivalent.
- savoir déterminer la limite à l'aide d'un équivalent.
- savoir tracer une tangente à l'aide d'un point et du coefficient directeur. La courbe représentative doit apparaître confondue avec sa tangente au voisinage du point considéré.
- savoir déterminer un développement limité à l'ordre 2 (formule de Taylor-Young et manipulation pratique).