Colles

semaine 22 : 07 mars - 12 mars

I. Le plan $\mathbb{R}^2$

I.1. Distance euclidienne

Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points du plan $\mathbb{R}^2$.

On appelle **distance euclidienne** entre A et B, la quantité notée $\mathrm{d}(A, B)$ définie par :

$$\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{d}\big((x_A, y_A), (x_B, y_B)\big) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Propriétés caractéristiques de l'opérateur de distance (euclidienne)

0) $\boxed{\forall (A, B) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,\ \mathrm{d}(A, B) \geqslant 0}$

1) $\boxed{\forall (A, B) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,\ \mathrm{d}(A, B) = \mathrm{d}(B, A)}$ *(symétrie)*

2) $\boxed{\forall (A, B) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,\ \mathrm{d}(A, B) = 0 \ \Leftrightarrow\ A = B}$ *(séparation)*

3) $\boxed{\forall (A, B) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,\ \mathrm{d}(A, B) \leqslant \mathrm{d}(A, C) + \mathrm{d}(C, A)}$
(inégalité triangulaire)

Il existe d'autres opérateurs de distance :

$$\boxed{\mathrm{d}_1(A, B) \ = \ |x_A - x_B| + |y_A - y_B|}$$

$$\boxed{\mathrm{d}_\infty(A, B) \ = \ \max\big(|x_A - x_B|, |y_A - y_B|\big)}$$

Remarque
Si $O = (0, 0)$ est l'origine du plan, et $M = (x, y)$ est un point du plan, alors la distance de M à l'origine est donnée par $\mathrm{d}(O, M) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

I.2. Boules

Soit A un point du plan $\mathbb{R}^2$ et r un réel strictement positif.

- On appelle **boule ouverte** de centre A et de rayon r, l'ensemble noté $B(A, r)$ et défini par :

$$\boxed{B(A, r) = \big\{M \in \mathbb{R}^2 \,|\, \mathrm{d}(A, M) < r\big\}}$$

- On appelle **boule fermée** de centre A et de rayon r, l'ensemble noté $B_f(A, r)$ et défini par :

$$\boxed{B_f(A, r) = \big\{M \in \mathbb{R}^2 \,|\, \mathrm{d}(A, M) \leqslant r\big\}}$$

- Une boule n'est rien d'autre que l'ensemble des points qui se situent à une distance au plus r (le rayon de la boule) d'un point A (le centre de la boule).

Remarque

- La géométrie des boules dépend de l'ensemble sur lequel on travaille. Plus précisément :
  - × sur la droite réelle $\mathbb{R}$, une boule de centre x_0 n'est autre qu'un intervalle centré en x_0.
  - × dans le plan $\mathbb{R}^2$, une boule de centre $A(x_0, y_0)$ n'est autre qu'un disque de centre A.
  - × dans le plan $\mathbb{R}^3$, une boule de centre $A(x_0, y_0, z_0)$ n'est autre qu'une boule de centre A.
- La géométrie des boules dépend aussi de la distance considérée. Dans le plan $\mathbb{R}^2$:
  - × pour la distance euclidienne d, les boules sont des disques.
  - × pour la distance d_1, les boules sont des losanges.
  - × pour la distance euclidienne d_∞, les boules sont des carrés.

I.3. Parties bornées

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

- La partie D est dite **bornée** s'il existe $r \geqslant 0$ tel que $D \subset B(O, r)$.
- Autrement dit, D est bornée si : $\forall M \in D,\ \mathrm{d}(O, M) \leqslant r$.
  Ce qui peut encore s'écrire : $\forall (x, y) \in D,\ \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant r$.
- On peut aussi trouver la définition équivalente :

$$\boxed{D \text{ est une partie bornée } \Leftrightarrow\ \exists A \in \mathbb{R}^2, \exists r > 0, D \subset B(A, r)}$$

Propriétés

- Toute boule (ouverte ou fermée) est bornée.
- Toute partie incluse dans une boule est une partie bornée.

I.4. Parties ouvertes, parties fermées

Parties ouvertes

- **Définition**
  On dit qu'une partie D de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert si :
  - × $D = \varnothing$,
  - × ou si pour tout point M de D, il existe $r > 0$ tel que $B(M, r) \subset D$.
- **Propriétés**
  - × Une boule ouverte est un ouvert.
  - × Le complémentaire d'une boule fermée est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Parties fermées

- **Définition**
  Une partie D de $\mathbb{R}^2$ est dite **fermée** si son complémentaire dans $\mathbb{R}^2$ est ouvert.
- **Propriétés**
  - × Une boule fermée est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.
  - × Le plan $\mathbb{R}^2$ est à la fois ouvert et fermé.

Aux concours, on ne demandera pas de démontrer qu'une partie est ouverte / fermée. On retiendra l'idée qu'un ouvert est une partie D qui ne contient pas son bord (si c'était le cas, toute boule centrée sur un point du bord déborderait en dehors de D). Les parties ouvertes sont généralement les ensembles définis à l'aide d'inégalités strictes.

II. Fonctions réelles de deux variables réelles

II.1. Définition

- On appelle **fonction réelle de deux variables à valeurs réelles** toute fonction f définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array} \right.$$

- L'ensemble des éléments $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ en lesquels la fonction est f est définie est appelé **ensemble de définition** de f et est noté $\mathcal{D}_f$.
- On appelle **image de** f et on note $\text{Im}(f)$ l'ensemble des éléments $z \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe $(x,y) \in \mathcal{D}_f$ et $z = f(x,y)$.

$$\text{Im}(f) = \{z \in \mathbb{R} \mid \exists (x,y) \in \mathcal{D}_f, z = f(x,y)\}$$

Exemple

a) On considère la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \ln(3x+2y+1) \end{array} \right.$

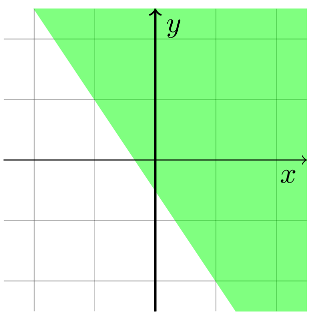
Son ensemble de définition est $\mathscr{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x+2y+1 > 0\}$.
C'est le demi-plan situé sur le côté droit de la droite $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.

b) On considère la fonction $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sqrt{x^2+y^2-1} \end{array} \right.$

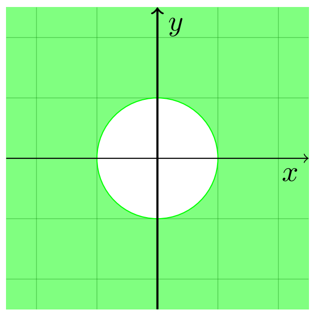
Son ensemble de définition est $\mathscr{D}_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-1 \geqslant 0\}$.
Afin de caractériser cet ensemble, on remarque tout d'abord que l'ensemble $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ est le disque ouvert de centre $(0,0)$ est de rayon 1. L'ensemble E_2 est le complémentaire, dans $\mathbb{R}^2$, de D. Autrement dit, $E_2 = \mathbb{R}^2 \setminus D$.

c) On considère la fonction $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x \, \exp(-x^2-y^2) \end{array} \right.$

Son ensemble de définition est $\mathscr{D}_h = \mathbb{R}^2$.



Ensemble de définition de f



Ensemble de définition de g

II.2. Les fonctions polynomiales en deux indéterminées

- Une fonction de deux variables est dite **polynomiale en deux indéterminées** si elle s'écrit comme une combinaison linéaire de fonctions de la forme :

$$(x, y) \mapsto x^m y^n, \quad \text{avec } m \text{ et } n \text{ deux entiers naturels.}$$

(monôme en deux indéterminées)

- Les fonctions $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont appelées **fonctions coordonnées** ou **projections**. En particulier, ce sont des fonctions polynomiales en deux indéterminées.

Exemple

- La fonction $(x, y) \mapsto 3x^2y^2 + 2xy^3$ est polynomiale.
- La fonction $(x, y) \mapsto 4 + 2y^2 - 5xy^3$ est polynomiale.
- La fonction $(x, y) \mapsto 2x - 1$ est polynomiale.
- La fonction $g_1 : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est polynomiale.
- La fonction $g_2 : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ est polynomiale.
- La fonction $g_3 : (x, y) \mapsto 1 - x^2$ est polynomiale.
- La fonction $g_4 : (x, y) \mapsto xy$ est polynomiale.

II.3. Représentation graphique d'une fonction de deux variables

- Une fonction de deux variables f définie sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2$ fait correspondre à tout point (x, y) de $\mathcal{D}_f$ un nombre réel $z = f(x, y)$.
- Représenter f dans l'espace c'est tracer la **surface** S_f définie par les points (x, y, z) où $(x, y) \in \mathcal{D}_f$ et $z = f(x, y)$.

$$\boxed{S_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathscr{D}_f \ \text{ et } \ z = f(x, y)\}}$$

- Si $a \in \mathbb{R}$, on appelle **ligne de niveau** a de f l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $f(x, y) = a$. Autrement dit, une ligne de niveau est l'intersection de S_f et du plan d'équation $z = a$.
- On pourra noter L_f^a la ligne de niveau a de f.
- La surface S_f peut être obtenue par réunion de toutes les lignes de niveau de f.

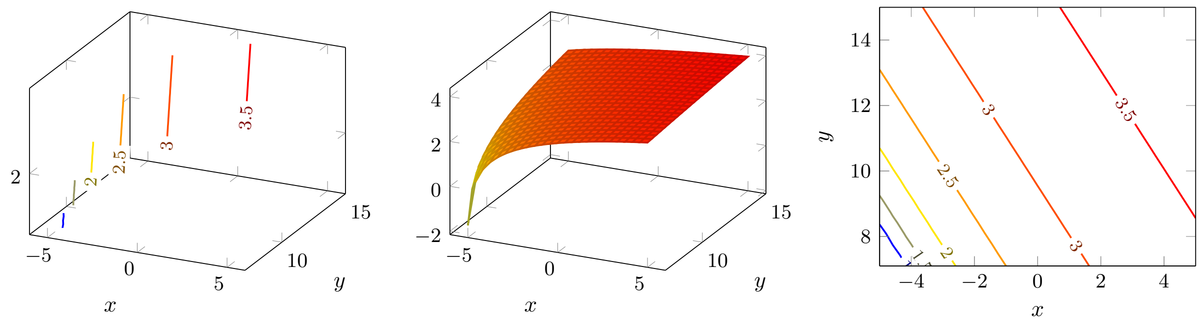
$$\boxed{S_f \ = \ \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists a \in \mathrm{Im}(f), (x, y) \in L_f^a\}}$$

Remarque

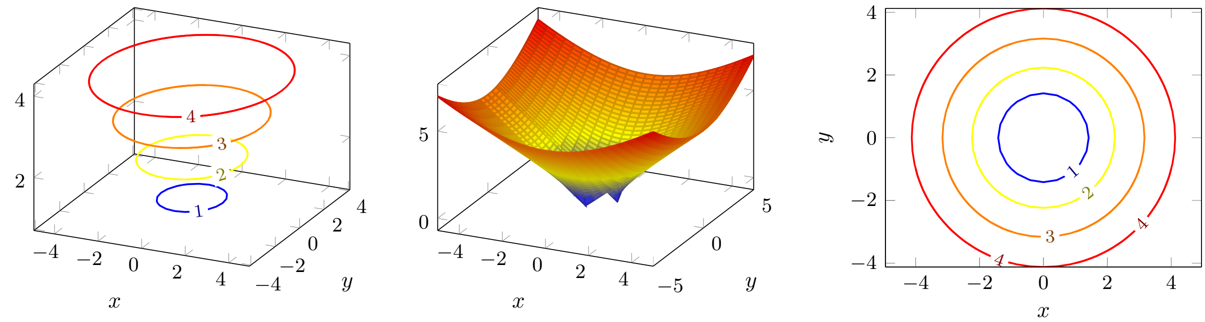
- Une ligne de niveau est généralement une courbe *(ligne ne signifie pas droite ...)*.
- Deux lignes de niveau différentes ne se coupent jamais.
- Sur une carte du relief, on représente les isoplèthes, c'est-à-dire les lignes joignant des points d'égale altitude.
- Sur une carte météo, on représente souvent les isobares, c'est-à-dire les lignes joignant des points d'égale pression atmosphérique.
- Lors du tracé, on pourra aussi songer à étudier l'intersection de S_f avec les plans définis par les autres axes : intersection avec les plans d'équation $y = b$ ou $x = c$.

Quelques tracés sur les exemples précédents

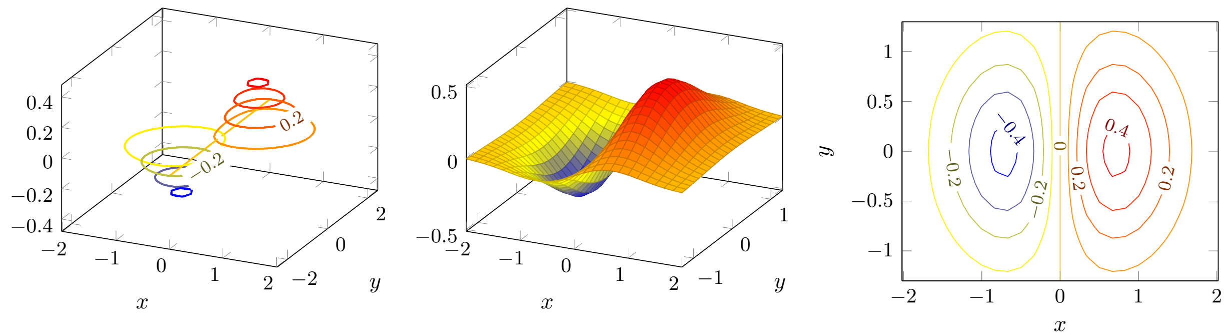
a) Tracé et lignes de niveau de la fonction $f : (x, y) \mapsto \ln(3x + 2y + 1)$.



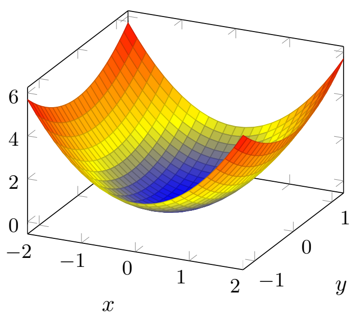
b) Tracé et lignes de niveau de la fonction $g : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.



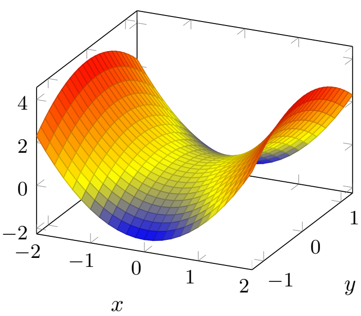
c) Tracé et lignes de niveau de la fonction $h : (x, y) \mapsto x \exp(-x^2 - y^2)$.



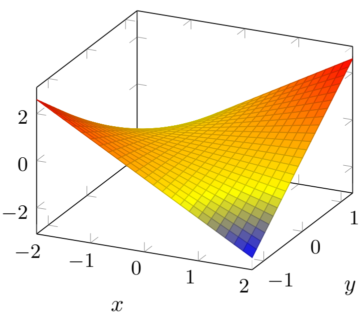
d) Tracé de quelques fonctions polynomiales.



Graphe de la fonction g_1



Graphe de la fonction g_2



Graphe de la fonction g_4

III. Continuité d'une fonction de deux variables

III.1. Notion de limite d'une fonction de deux variables

Rappel *(pour les fonctions réelles d'une variable réelle)*

- On rappelle qu'une fonction réelle d'une variable réelle est continue en x_0 si elle admet une limite finie en x_0. Définir $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$ c'est formaliser l'idée que $f(x)$ se rapproche de ℓ lorsque x se rapproche de x_0. Pour formaliser l'idée de proximité, on utilise généralement la notion de voisinage. On dira que $f(x)$ est proche de ℓ (resp. x est proche de x_0) si $f(x)$ est dans un voisinage de ℓ (x est dans un voisinage de x_0).
- Formellement, on dit que la fonction f admet la limite ℓ en x_0 si :

$$\boxed{\forall V \in \mathcal{V}(\ell),\ \exists U \in \mathcal{V}(x_0), \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x \in U \ \Rightarrow\ f(x) \in V}$$

Généralisation *(pour les fonctions réelles d'1, 2 ou même n variables réelles)*

- L'intérêt de cette définition est qu'elle est très générale et peut donc s'adapter à des cas d'étude différents (pour les fonctions à 1, 2 ou même n variables). Plus précisément, la notion de voisinage choisie est celle de boule ouverte. On rappelle alors que :
  - × dans $\mathbb{R}$, x est dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ si x est dans un intervalle centré en x_0 :

$$\exists \alpha > 0, x \in \,]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$$

  - × dans $\mathbb{R}^2$, M est dans un voisinage de $M_0 \in \mathbb{R}$ si M est dans un disque centré en M_0

$$\exists r > 0, \mathrm{d}(M_0, M) < r$$

> Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.
>
> Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur D.
>
> Soit $M_0 \in D$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$.
>
> - On dit que f admet pour **limite** $\ell \in \mathbb{R}$ en M_0 si :
>
> $$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall M \in D,\ \mathrm{d}(M_0, M) < \eta \ \Rightarrow\ |f(M) - \ell| < \varepsilon}$$

III.2. Continuité d'une fonction de deux variables

> Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.
>
> Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur D.
>
> Soit $M_0 \in D$.
>
> - On dit que f est **continue en** M_0 si f admet pour limite $f(M_0)$ en M_0, autrement dit si :
>
> $$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall M \in D,\ \mathrm{d}(M_0, M) < \alpha \Rightarrow |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon}$$
>
> On peut écrire cette propriété à l'aide des coordonnées de M et M_0. Plus précisément, on dit que f est **continue en** (x_0, y_0) si f admet pour limite $f(x_0, y_0)$ en (x_0, y_0) :
>
> $$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in D,\ \mathrm{d}\big((x_0, y_0), (x, y)\big) < \alpha \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon}$$
>
> - On dit que f est **continue sur** D si f est continue en tout point de D.

III.3. Démontrer qu'une fonction à deux variables est continue

- **Brique de base**

  Toute fonction polynomiale en deux indéterminées est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- **Stabilité de l'ensemble des fonctions continues**

  Par opérations algébriques

  Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

  Soit $f_1, f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies sur D.

  1) La somme, la différence, ou plus généralement la combinaison de deux fonctions continues sur D est une fonction continue sur D.

Les fonctions f_1 et f_2 sont continues sur D	$\Rightarrow$	Pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2$ est continue sur D

  2) Le produit de deux fonctions continues sur D est une fonction continue sur D.

Les fonctions f_1 et f_2 sont continues sur D	$\Rightarrow$	La fonction $f_1 \times f_2$ est continue sur D

  3) L'inverse d'une fonction continue sur D et qui `NE S'ANNULE PAS` sur D est une fonction continue sur D.

La fonction f_1 est continue sur D La fonction f_1 `NE S'ANNULE PAS` sur D	$\Rightarrow$	La fonction $\dfrac{1}{f_1}$ est continue sur D

  4) Le quotient de deux fonctions continues sur D et dont le dénominateur `NE S'ANNULE PAS` sur D est une fonction continue sur D.

Les fonctions f_1 et f_2 sont continues sur D La fonction f_2 `NE S'ANNULE PAS` sur D	$\Rightarrow$	La fonction $\dfrac{f_1}{f_2}$ est continue sur D

  Par composition

  Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$ et soit I un intervalle réel.

  Soit $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur D.

  Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur I.

  Notons $f = \psi \circ g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

  La fonction f est continue sur D en tant que composée $f = \psi \circ g$ où :

  × g est :
    - continue sur D,
    - telle que $g(D) \subset I$

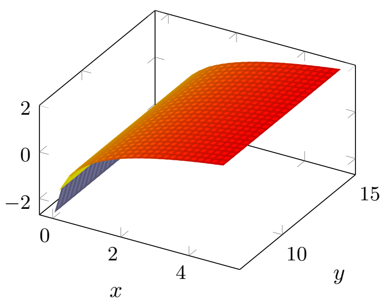
  × ψ est continue sur I.

Exemple

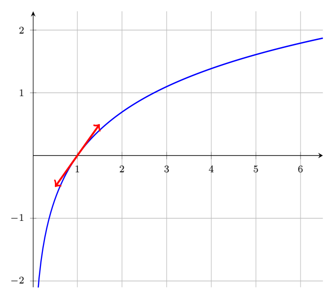
- La fonction $(x, y) \mapsto (x^2 - 2\,xy + 5)\,(y^5 + 2)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ car polynomiale.

  > × L'ensemble des fonctions polynomiales est stable par somme, différence, combinaison linéaire et produit.
  >
  > × De ce fait, on `N'ÉCRIT JAMAIS` qu'une fonction s'écrit comme somme, différence, combinaison linéaire ou produit de fonctions polynomiales. Une telle fonction est directement polynomiale !

- La fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{y}{1 + x^2 + y^2}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ car elle est le quotient $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ où :
  - × $f_1 : (x, y) \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ car polynomiale.
  - × $f_2 : (x, y) \mapsto 1 + x^2 + y^2$ est :
    - – continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ car polynomiale.
    - – `NE S'ANNULE PAS` sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- La fonction $h : (x, y) \mapsto x \exp(-x^2 - y^2)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ car elle est le produit $h = h_1 \times h_2$ où :
  - × $h_1 : (x, y) \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ car polynomiale.
  - × $h_2 : (x, y) \mapsto \exp(-x^2 - y^2)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ car elle est la composée $h_2 = \psi \circ g$ où :
    - – $g : (x, y) \mapsto -x^2 - y^2$ est :
      - ▸ continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
      - ▸ telle que : $g(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
    - – $\psi : x \mapsto \exp(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $f : (x, y) \mapsto \ln\left(x^2 + y^2\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ car elle est la composée $f = \psi \circ g$ où :
  - × $g : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est :
    - – continue sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.
    - – telle que : $g\big(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*\big) \subset \,]0, +\infty[$.
  - × $\psi : x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- La fonction $f : (x, y) \mapsto \ln(x)$ est continue sur $]0, +\infty[\, \times \mathbb{R}$ car elle est la composée $f = \psi \circ g$ où :
  - × $g : (x, y) \mapsto x$ est :
    - – continue sur $]0, +\infty[\, \times \mathbb{R}$.
    - – telle que : $g\big(]0, +\infty[\, \times \mathbb{R}\big) \subset \,]0, +\infty[$.
  - × $\psi : x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$.



La fonction $(x, y) \mapsto \ln(x)$



La fonction $x \mapsto \ln(x)$

IV. Calcul différentiel d'ordre 1 pour les fonctions de deux variables

IV.1. Applications partielles

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur D.

- On appelle **applications partielles** de f en le point (x_0, y_0) les deux fonctions obtenues à partir de f en fixant l'une ou l'autre des variables.
  Plus précisément, f admet deux applications partielles en (x_0, y_0).

$$\boxed{f(., y_0) : x \mapsto f(x, y_0)} \quad \text{et} \quad \boxed{f(x_0, .) : y \mapsto f(x_0, y)}$$

- Ainsi, les applications partielles $f(., y_0)$ et $f(x_0, .)$ sont des fonctions réelles d'une variable réelle : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

IV.2. Notion de dérivée partielle d'ordre 1

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur D.

Soit $(x_0, y_0) \in D$.

- Lorsque, l'application partielle $f(., y_0)$ est dérivable en x_0, on dit que f admet **une dérivée partielle d'ordre** 1 **par rapport à la première variable (**x**) en** (x_0, y_0).
  On note alors $\partial_1(f)(x_0, y_0)$ cette dérivée.

$$\boxed{\partial_1(f)(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}}$$

- Lorsque l'application partielle $f(x_0, .)$ est dérivable en y_0, on dit que f admet **une dérivée partielle d'ordre** 1 **par rapport à la deuxième variable (**y**) en** (x_0, y_0).
  On note alors $\partial_2(f)(x_0, y_0)$ cette dérivée.

$$\boxed{\partial_2(f)(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}}$$

Remarque

- Dans des ouvrages plus anciens, on trouvera la notation : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.
  Son inconvénient est la confusion possible entre le x du ∂x (on dérive par rapport à la variable x) et l'abscisse x du point (x, y).
- La notion de dérivée partielle est définie à l'aide de la dérivée d'une fonction réelle à 1 variable réelle. Les résultats du chapitre dérivation peuvent donc être utilisés sur les applications partielles. On en déduit par exemple que si deux fonctions $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettent une dérivée partielle en un point selon la $1^{\text{ère}}$ variable alors $f + g$ et $f \times g$ aussi.

IV.3. Gradient de f en un point

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur D.

- On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable sur D si f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable en tout point de D.

  La dérivée partielle de la fonction f par rapport à la première variable est une fonction réelle de deux variables réelles, notée $\partial_1(f)$.

$$\boxed{\partial_1(f) : (x, y) \mapsto \partial_1(f)(x, y)}$$

- On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la deuxième variable sur D si f admet une dérivée partielle par rapport à la deuxième variable en tout point de D.

  La dérivée partielle de la fonction f par rapport à la deuxième variable est une fonction réelle de deux variables réelles, notée $\partial_2(f)$.

$$\boxed{\partial_2(f) : (x, y) \mapsto \partial_2(f)(x, y)}$$

- On appelle gradient de f et on note $\nabla(f)$ la fonction suivante.

$$\nabla(f) \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & \begin{pmatrix} \partial_1(f)(x, y) \\ \partial_2(f)(x, y) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

IV.4. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur une partie D de $\mathbb{R}^2$

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur D.

On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^1$** sur D si :

× elle admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur D,

× et que ces deux dérivées partielles sont continues sur D.

Remarque

- Si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D alors f est aussi continue sur D.
- Aux concours, lorsqu'il est demandé de déterminer les dérivées partielles d'une fonction f, il faut `TOUJOURS` commencer par démontrer que f admet des dérivées partielles. Pour ce faire, on démontre que f est de classe $\mathcal{C}^1$ (qui peut le plus peut le moins).
- Afin de démontrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur une partie D de $\mathbb{R}^2$, on se sert rarement de la définition. Généralement, la régularité d'une fonction est démontrée à l'aide des propriétés de stabilité de l'ensemble des fonctions régulières.

IV.5. Démontrer qu'une fonction à deux variables est de classe $\mathcal{C}^1$

- **Brique de base**

  Toute fonction polynomiale en deux indéterminées est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

- **Stabilité de l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$**

  Par opérations algébriques

  Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

  Soit $f_1, f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies sur D.

  1) La somme, la différence, ou plus généralement la combinaison de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur D est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

Les fonctions f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur D	$\Rightarrow$	Pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D

  2) Le produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur D est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

Les fonctions f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur D	$\Rightarrow$	La fonction $f_1 \times f_2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D

  3) L'inverse d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et qui `NE S'ANNULE PAS` sur D est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

La fonction f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D La fonction f_1 `NE S'ANNULE PAS` sur D	$\Rightarrow$	La fonction $\dfrac{1}{f_1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D

  4) Le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et dont le dénominateur `NE S'ANNULE PAS` sur D est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

Les fonctions f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur D La fonction f_2 `NE S'ANNULE PAS` sur D	$\Rightarrow$	La fonction $\dfrac{f_1}{f_2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D

  Par composition

  Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$ et soit I un intervalle réel.

  Soit $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

  Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

  Notons $f = \psi \circ g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

  La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D en tant que composée $f = \psi \circ g$ où :

  × g est :
    - de classe $\mathcal{C}^1$ sur D,
    - telle que $g(D) \subset I$

  × ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

IV.6. Développement limité à l'ordre 1

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.

Soit $(x_0, y_0) \in D$.

- On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en un point (x_0, y_0) s'il existe

  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est $\left\{\begin{array}{l} \times \text{ définie au voisinage de } (0,0), \\ \times \text{ de limite nulle en } (0,0), \end{array}\right.$

  tels que, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ $\left\{\begin{array}{l} \times \text{ dans un voisinage de } (0,0), \\ \times \text{ tels que } (x_0+h, y_0+k) \in D, \end{array}\right.$ on a :

$$f(x_0+h, y_0+k) \ = \ a + b \times h + c \times k + \sqrt{h^2+k^2} \times \varepsilon(h,k)$$

- En réalité, si f admet un développement limité à l'ordre 1 alors celui-ci est unique.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D	$\Rightarrow$	La fonction f admet un développement limité à l'ordre 1 en tout point $(x_0, y_0) \in D$

Si c'est le cas, il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\left\{\begin{array}{l} \times \text{ définie au voisinage de } (0,0), \\ \times \text{ de limite nulle en } (0,0), \end{array}\right.$

tels que, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ $\left\{\begin{array}{l} \times \text{ dans un voisinage de } (0,0), \\ \times \text{ tels que } (x_0+h, y_0+k) \in D, \end{array}\right.$ on a :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f(x_0+h, y_0+k) & = & f(x_0,y_0) + \partial_1(f)(x_0,y_0) \times h + \partial_2(f)(x_0,y_0) \times k \\ & & + \sqrt{h^2+k^2} \times \varepsilon(h,k) \end{array}}$$

ce que l'on peut écrire :

$$\boxed{f(x_0+h, y_0+k) \ = \ f(x_0,y_0) + {}^t\Big(\nabla(f)(x_0,y_0)\Big) \times \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \sqrt{h^2+k^2} \times \varepsilon(h,k)}$$

Remarque

Cette formule est l'analogue de la formule pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \times h + h \times \varepsilon(h)$$

où ε est une fonction définie dans un voisinage de 0 telle que $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

V. Calcul différentiel d'ordre 2 pour les fonctions de deux variables

V.1. Dérivées partielles d'ordre 2

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.

On suppose que f admet des dérivées partielles d'ordre 1.

- On dit que f possède une **dérivée partielle d'ordre** 2 **par rapport à la première variable** si la fonction $\partial_1(f)$ admet elle-même une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable sur D.
  Dans ce cas, on note $\partial^2_{11}(f) = \partial_1(\partial_1(f))$.
- On dit que f possède une **dérivée partielle d'ordre** 2 **par rapport à la première variable puis par rapport à la seconde variable** si la fonction $\partial_1(f)$ admet elle-même une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la seconde variable sur D.
  Dans ce cas, on note $\partial^2_{21}(f) = \partial_2(\partial_1(f))$.
- On dit que f possède une **dérivée partielle d'ordre** 2 **par rapport à la seconde variable puis par rapport à la première variable** si la fonction $\partial_2(f)$ admet elle-même une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable sur D.
  Dans ce cas, on note $\partial^2_{12}(f) = \partial_1(\partial_2(f))$.
- On dit que f possède une **dérivée partielle d'ordre** 2 **par rapport à la seconde variable** si la fonction $\partial_2(f)$ admet elle-même une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la seconde variable sur D.
  Dans ce cas, on note $\partial^2_{22}(f) = \partial_2(\partial_2(f))$.

V.2. Fonctions de deux variables de classe $\mathcal{C}^2$ sur une partie D

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.

On dit que f est **de classe** $\mathcal{C}^2$ si :

× elle admet des dérivées partielles d'ordre 2,

× et que ces quatre dérivées partielles d'ordre 2 sont continues sur D.

Remarque

- Si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D alors f est aussi continue sur D.
- Aux concours, lorsqu'il est demandé de déterminer les dérivées partielles d'une fonction f, il faut `TOUJOURS` commencer par démontrer que f admet des dérivées partielles. Pour ce faire, on démontre que f est de classe $\mathcal{C}^2$ (qui peut le plus peut le moins).
- Afin de démontrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur une partie D de $\mathbb{R}^2$, on se sert rarement de la définition. Généralement, la régularité d'une fonction est démontrée à l'aide des propriétés de stabilité de l'ensemble des fonctions régulières.

V.3. Démontrer qu'une fonction à deux variables est de classe $\mathcal{C}^2$

- **Brique de base**

  Toute fonction polynomiale en deux indéterminées est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

- **Stabilité de l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$**

  Par opérations algébriques

  Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

  Soit $f_1, f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies sur D.

  1) La somme, la différence, ou plus généralement la combinaison de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur D est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

Les fonctions f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur D	$\Rightarrow$	Pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D

  2) Le produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur D est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

Les fonctions f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur D	$\Rightarrow$	La fonction $f_1 \times f_2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D

  3) L'inverse d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur D et qui `NE S'ANNULE PAS` sur D est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

La fonction f_1 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D La fonction f_1 `NE S'ANNULE PAS` sur D	$\Rightarrow$	La fonction $\dfrac{1}{f_1}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D

  4) Le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur D et dont le dénominateur `NE S'ANNULE PAS` sur D est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

Les fonctions f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur D La fonction f_2 `NE S'ANNULE PAS` sur D	$\Rightarrow$	La fonction $\dfrac{f_1}{f_2}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D

  Par composition

  Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$ et soit I un intervalle réel.

  Soit $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

  Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.

  Notons $f = \psi \circ g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

  La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D en tant que composée $f = \psi \circ g$ où :

  × g est :
    - de classe $\mathcal{C}^2$ sur D,
    - telle que $g(D) \subset I$

  × ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.

V.4. Matrice hessienne

V.4.a) Définition

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.

On suppose que f admet des dérivées partielles d'ordre 2.

On appelle matrice **hessienne** de f en (x, y) la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ notée $\nabla^2(f)(x, y)$ et définie par :

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{11}(f)(x,y) & \partial^2_{12}(f)(x,y) \\ \partial^2_{21}(f)(x,y) & \partial^2_{22}(f)(x,y) \end{pmatrix}$$

V.4.b) Théorème de Schwarz et conséquence

Soit D un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

- $\boxed{\forall (x,y) \in D,\ \partial^2_{12}(f)(x,y) = \partial^2_{21}(f)(x,y)}$
- Ainsi, la matrice hessienne de f en tout point $(x, y) \in D$ est symétrique réelle.
  En particulier, $\nabla^2(f)(x, y)$ est donc diagonalisable.

Exemple

- On a vu précédemment que la fonction $h : (x, y) \mapsto x \exp(-x^2 - y^2)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
  Par des arguments analogues (on remplace le terme « continue » par « de classe $\mathcal{C}^2$ »), on démontre de même que h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
  Comme h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, elle admet des dérivées partielles à l'ordre 1 en (x, y).

$$\begin{aligned} \partial_1(f)(x,y) &= \mathrm{e}^{-x^2-y^2} + x\ (-2x)\ \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \\ &= \left(1-2x^2\right)\ \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \partial_2(f)(x,y) &= x\ (-2y)\ \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \\ &= -2\,xy\ \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \end{aligned}$$

Comme h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, elle admet des dérivées partielles à l'ordre 2 en (x, y).

$$\begin{aligned} \partial^2_{11}(f)(x,y) &= -4x\ \mathrm{e}^{-x^2-y^2} + \left(1-2x^2\right)\ (-2x)\ \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \\ &= (-2x)\ \left(2+(1-2x^2)\right)\ \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \ = \ (-2x)\ \left(3-2x^2\right)\ \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial^2_{22}(f)(x,y) &= -2x\ \mathrm{e}^{-x^2-y^2} - 2xy\ (-2y)\ \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \\ &= (-2x)\ \left(1-2y^2\right)\ \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \end{aligned}$$

Enfin :

$$\partial^2_{21}(f)(x,y) \ = \ \left(1-2x^2\right)\ (-2y)\ \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$$

et comme h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'**ouvert** $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, alors, d'après le théorème de Schwarz :

$$\partial^2_{12}(f)(x,y) \ = \ \partial^2_{21}(f)(x,y) \ = \ -2y\ \left(1-2x^2\right)\ \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$$

V.5. Développement limité à l'ordre 2

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.

Soit $(x_0, y_0) \in D$.

- On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en un point (x_0, y_0) s'il existe

$(a_1, \dots, a_6) \in \mathbb{R}^6$ et une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\left\{ \begin{array}{l} \times \text{ définie au voisinage de } (0,0), \\ \times \text{ de limite nulle en } (0,0), \end{array} \right.$

tels que, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ $\left\{ \begin{array}{l} \times \text{ dans un voisinage de } (0,0), \\ \times \text{ tels que } (x_0+h, y_0+k) \in D, \end{array} \right.$ on a :

$$f(x_0+h, y_0+k) = a_1 + a_2 \times h + a_3 \times k + a_4 \times h^2 + a_5 \times hk + a_6 \times k^2 + (h^2+k^2) \times \varepsilon(h,k)$$

- En réalité, si f admet un développement limité à l'ordre 2 alors celui-ci est unique.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D	$\Rightarrow$	La fonction f admet un développement limité à l'ordre 2 en tout point $(x_0, y_0) \in D$

Si c'est le cas, il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\left\{ \begin{array}{l} \times \text{ définie au voisinage de } (0,0), \\ \times \text{ de limite nulle en } (0,0), \end{array} \right.$

tels que, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ $\left\{ \begin{array}{l} \times \text{ dans un voisinage de } (0,0), \\ \times \text{ tels que } (x_0+h, y_0+k) \in D, \end{array} \right.$ on a :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f(x_0+h, y_0+k) & = & f(x_0,y_0) \\ & + & \partial_1(f)(x_0,y_0) \times h + \partial_2(f)(x_0,y_0) \times k \\ & + & \dfrac{1}{2} \Big(\quad \partial^2_{11}(f)(x_0,y_0) \times h^2 \\ & & \quad + \ \partial^2_{21}(f)(x_0,y_0) \times kh \\ & & \quad + \ \partial^2_{12}(f)(x_0,y_0) \times hk \\ & & \quad + \ \partial^2_{22}(f)(x_0,y_0) \times k^2 \Big) \\ & + & (h^2+k^2) \times \varepsilon(h,k) \end{array}}$$

ce que l'on peut écrire :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f(x_0+h, y_0+k) & = & f(x_0,y_0) \\ & + & {}^t\Big(\nabla(f)(x_0,y_0)\Big) \times \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ & + & \dfrac{1}{2} \ {}^t\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \times \nabla^2(f)(x_0,y_0) \times \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ & + & (h^2+k^2) \times \varepsilon(h,k) \end{array}}$$

Remarque
Cette formule est l'analogue de la formule pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \times h + f''(x_0) \times h^2 + h^2 \times \varepsilon(h)$$

où ε est une fonction définie dans un voisinage de 0 telle que $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

VI. Extrema d'une fonction de deux variables réelles

VI.1. Extremum local d'une fonction de deux variables

Soit D un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$.
Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.
Soit $M_0\,(x_0, y_0) \in D$.

- On dit que f admet un **maximum local** en M_0 s'il existe un réel $r > 0$ tel que :

$$\boxed{\forall M \in B(M_0, r),\ f(M) \leqslant f(M_0)}$$

ou, autrement dit, s'il existe un réel $r > 0$ tel que :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ \mathrm{d}\Big((x,y), (x_0, y_0)\Big) < r \ \Rightarrow\ f(x,y) \leqslant f(x_0, y_0)}$$

Le maximum est **global** si l'inégalité est vraie pour tout $M \in D$.

- On dit que f admet un **minimum local** en M_0 si il existe un réel $r > 0$ tel que :

$$\boxed{\forall M \in B(M_0, r),\ f(M) \geqslant f(M_0)}$$

ou, autrement dit, s'il existe un réel $r > 0$ tel que :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ \mathrm{d}\Big((x,y), (x_0, y_0)\Big) < r \ \Rightarrow\ f(x,y) \geqslant f(x_0, y_0)}$$

Le minimum est **global** si l'inégalité est vraie pour tout $M \in D$.

VI.2. Notion de point critique

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.
Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.
On suppose que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur D.
Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in D$.

On dit que $M_0 = (x_0, y_0) \in D$ est un **point critique** de f si $\boxed{\nabla(f)(x_0, y_0) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}}$.

Autrement dit, $(x_0, y_0) \in D$ est un **point critique** de f si $\left\{\begin{array}{rcl} \partial_1(f)(x_0, y_0) & = & 0 \\ \partial_2(f)(x_0, y_0) & = & 0 \end{array}\right.$.

VI.3. Condition nécessaire d'extremum local

Soit D un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$. Soit $M_0 \in D$.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.

On suppose que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur D.

$$\boxed{f \text{ admet un extremum local en } M_0 \quad \Rightarrow \quad M_0 \text{ est un point critique de } f}$$

Comme pour les fonctions d'une variable réelle, ce théorème stipule une condition **nécessaire** mais **pas suffisante**.

Exemple

Déterminons les points critiques de la fonction $h : (x, y) \mapsto x \ \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

$$\begin{array}{rcl}
(x,y) \text{ est un point critique de } h & \Longleftrightarrow & \nabla(h)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_1(h)(x,y) & = & 0 \\ \partial_2(h)(x,y) & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} \left(1-2x^2\right) \mathrm{e}^{-x^2-y^2} & = & 0 \\ -2\,xy\ \mathrm{e}^{-x^2-y^2} & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \left(1-2x^2\right) = 0 \quad \texttt{OU} \quad \mathrm{e}^{-x^2-y^2} = 0 \\ x = 0 \quad \texttt{OU} \quad y = 0 \quad \texttt{OU} \quad \mathrm{e}^{-x^2-y^2} = 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x^2 = \frac{1}{2} \\ x = 0 \quad \texttt{OU} \quad y = 0 \end{array} \right. \qquad \textit{(car } \mathrm{e}^{-x^2-y^2} > 0\textit{)} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \texttt{OU} \quad x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ x = 0 \quad \texttt{OU} \quad y = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) \in \left\{ \left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, 0\right), \ \left(-\sqrt{\tfrac{1}{2}}, 0\right) \right\}
\end{array}$$

Commentaire

- La difficulté de cette question réside dans le fait qu'il n'existe pas de méthode générale pour résoudre l'équation $\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.
  On est donc confronté à une question bien plus complexe qu'une résolution de système d'équations linéaires (que l'on résout aisément à l'aide de la méthode du pivot de Gauss).
- Lors de la recherche de points critiques, on doit faire appel à des méthodes ad hoc.
  - × Il est par exemple assez fréquent de chercher à obtenir, par manipulation des équations, une équation du type : $x = \psi(y)$.

    Une telle équation est particulièrement intéressante. En l'injectant dans l'autre égalité, on obtient une nouvelle équation qui ne dépend plus que de la variable y.
  - × De manière plus subtile, il est aussi assez fréquent faire apparaître une équation du type : $\varphi(x) = \varphi(y)$, où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction bijective. En réalité, c'est le caractère injectif qui importe ici (on l'obtient généralement par stricte monotonie de φ). En effet, cette propriété permet alors de conclure : $x = y$.

    En remplaçant x par y dans l'autre équation, on obtient alors une nouvelle équation qui ne dépend plus que de la variable y.
  - × Enfin, il est aussi relativement fréquent dans les sujets `EML` de tomber sur une équation du type : $\phi(x) = 0$. Cette équation admet généralement une unique solution α (voire deux solutions α et β), ce qui est démontré en début d'épreuve.

VI.4. Démontrer qu'une fonction admet un extremum local en un point critique

a) Idée derrière le résultat

Soit D un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in D$ un point critique de f.

- Il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $(0,0)$ et de limite nulle en $(0,0)$, telle que, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ $\left\{ \begin{array}{l} \times \text{ dans un voisinage de } (0,0), \\ \times \text{ tels que } (x_0+h, y_0+k) \in D, \end{array} \right.$ on a :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f(x_0+h, y_0+k) & = & f(x_0, y_0) \\ & + & \cancel{{}^t\nabla(f)(x_0,y_0) \times \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}} \\ & + & \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \times \nabla^2(f)(x_0,y_0) \times \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ & + & (h^2+k^2) \times \varepsilon(h,k) \end{array}}$$

- En nommant $q_{(x_0,y_0)}(h,k)$ le terme d'ordre 2, on obtient :

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) \ = \ \frac{1}{2}\, q_{(x_0,y_0)}(h,k) + (h^2+k^2) \times \varepsilon(h,k)$$

Le signe de la quantité $q_{(x_0,y_0)}(h,k)$ nous fournit la solution :

1) si pour tout (h,k), $q_{(x_0,y_0)}(h,k) > 0$, alors $f(x_0+h,y_0+k) > f(x_0,y_0)$.
Ainsi, f admet un minimum local en (x_0,y_0).

2) si pour tout (h,k), $q_{(x_0,y_0)}(h,k) < 0$, alors $f(x_0+h,y_0+k) > f(x_0,y_0)$.
Ainsi, f admet un maximum local en (x_0,y_0).

3) si le signe n'est pas constant, f n'admet pas d'extremum local en (x_0,y_0).

Il reste alors à déterminer le signe de $q_{(x_0,y_0)}(h,k)$.

Commentaire

- D'après le théorème de Schwarz, la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x_0,y_0)$ est symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable.
- Dans le cas le plus simple, cette matrice est même diagonale. Il esiste donc $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ telle que :

$$\nabla^2(f)(x_0,y_0) \ = \ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

et ainsi :

$$q_{(x_0,y_0)}(h,k) \ = \ \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \times \nabla^2(f)(x_0,y_0) \times \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \ = \ \lambda_1\, h^2 + \lambda_2\, k^2$$

Ce cas simple inspire le théorème suivant (le cas plus général sera détaillé plus tard).

***b)* Résultat théorique : le théorème à utiliser**

Soit D un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in D$ un point critique de f.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert D. Ainsi, la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ est symétrique réelle (d'après le théorème de Schwarz).
Elle est donc diagonalisable et il existe $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ inversible tels que :

$$\nabla^2(f)(x_0, y_0) \;=\; P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres - pas forcément distinctes - de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$)

1) Les valeurs propres λ_1 et λ_2 de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont strictement positives $\Rightarrow$ f admet un minimum local en (x_0, y_0)

2) Les valeurs propres λ_1 et λ_2 de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont strictement négatives $\Rightarrow$ f admet un maximum local en (x_0, y_0)

3) Les valeurs propres λ_1 et λ_2 de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont non nulles et de signes opposés $\Rightarrow$ f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0)

Dans ce cas, on dira que f admet un **point selle** ou **point col**.

4) Si au moins une valeur propre de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ est nulle, on ne peut rien conclure par cette méthode. Il faudra alors procéder à une étude plus précise.

***c)* Résultat théorique : le théorème hors programme**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un **ouvert** $D \subset \mathbb{R}^2$.

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point critique de f.

Notons : $\Delta = \partial^2_{1,1}(f)(x_0, y_0) \times \partial^2_{2,2}(f)(x_0, y_0) \;-\; \big(\partial^2_{1,2}(f)(x_0, y_0)\big)^2$.

1) Si $\Delta > 0$ alors f admet un extremum local au point (x_0, y_0).

a. Si $\partial^2_{11}(f)(x_0, y_0) > 0$, c'est un minimum.

b. Si $\partial^2_{11}(f)(x_0, y_0) < 0$, c'est un maximum.

2) Si $\Delta < 0$ alors f n'admet pas d'extremum local au point (x_0, y_0).

3) Si $\Delta = 0$, on ne peut pas conclure par cette méthode.

Il faudra alors procéder à une étude plus précise.

Ce résultat n'étant pas officiellement au programme, il faut savoir le redémontrer. Plus précisément :

× si la matrice hessienne considérée ne dépend pas d'un paramètre inconnu (ne contient que des valeurs numériques connues), on utilise le théorème au programme.

× si la matrice hessienne considérée dépend d'un paramètre inconnu, on écrit la démonstration suivante permettant d'obtenir les relations entre coefficients et racines.

Démonstration.

- Notons tout d'abord que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert D.
  Ainsi, $H = \nabla^2(f)(x_0, y_0)$ est symétrique réelle et donc diagonalisable.
  On en conclut qu'il existe $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ inversible tel que :

$$\nabla^2(f)(x_0, y_0) \ = \ P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

  (λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres - pas forcément distinctes - de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$)

  Dans la suite, on adopte les notations de Monge, à savoir : $H \ = \ \nabla^2(f)(x_0, y_0) \ = \ \begin{pmatrix} r & t \\ t & s \end{pmatrix}$.

- Remarquons alors :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ valeur propre de } H & \Leftrightarrow & H - \lambda\, I_2 \text{ non inversible} \\ & \Leftrightarrow & \det\big(H - \lambda\, I_2\big) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \det\left(\begin{pmatrix} r - \lambda & s \\ s & t - \lambda \end{pmatrix}\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow & (r - \lambda)\,(t - \lambda) - s^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda^2 - (r + t)\,\lambda + (rt - s^2) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda \text{ est racine du polynôme } Q(X) = X^2 - (r + t)\,X + (rt - s^2) \end{array}$$

- Comme λ_1 et λ_2 sont valeurs propres (pas forcément distinctes !), alors elles sont racines de Q. Précisons que Q ne peut admettre d'autre racine (sinon H aurait une valeur propre différente de λ_1 et λ_2). On en déduit que Q est facteur de $(X - \lambda_1)$ et $(X - \lambda_2)$. Enfin, comme Q est unitaire :

$$\begin{array}{rcl} Q(X) & = & (X - \lambda_1)\,(X - \lambda_2) \\ & = & X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\,X + \lambda_1\,\lambda_2 \end{array}$$

- On en déduit, par identification : $\left\{ \begin{array}{rcl} r + t & = & \lambda_1 + \lambda_2 \\ rt - s^2 & = & \lambda_1\,\lambda_2 \end{array} \right.$.
  Plusieurs cas se présentent alors.

  1) Si $rt - s^2 > 0$ alors $\lambda_1\,\lambda_2 > 0$.
  Ainsi, λ_1 et λ_2 sont non nulles et de même signe.
  On en déduit que f atteint un extremum local en (x_0, y_0).
  Il reste alors à déterminer le signe de ces valeurs propres pour conclure quant au type de cet extremum. Remarquons :

$$rt \ = \ \lambda_1\,\lambda_2 + s^2 \ > \ 0$$

  Ainsi, r et t sont aussi deux quantités non nulles et de même signe.

  a. Si $r > 0$ alors $r + t > 0$.
  Ainsi $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ et comme ces deux valeurs propres sont de même signe, on conclut $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$.

  b. Si $r > 0$ alors $r + t < 0$.
  Et par le même raisonnement, on conclut $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$.

  2) Si $rt - s^2 > 0$ alors $\lambda_1\,\lambda_2 < 0$.
  On en déduit que f admet un point selle en (x_0, y_0).

  3) Si $rt - s^2 = 0$ alors $\lambda_1\,\lambda_2 = 0$. L'une (au moins) des deux valeurs propres de H est nulle.
  On ne peut conclure par cette méthode. □

VI.5. Démontrer qu'une fonction n'admet pas d'extremum local en un point critique

- Rappelons tout d'abord que les extrema locaux d'une fonction de deux variables sont à chercher parmi ses points critiques.
- Pour démontrer que f n'admet pas de maximum local en un point critique (x_0, y_0), on s'intéresse au comportement local de cette fonction. Plus précisément, on procède généralement comme suit :
  × on se place en (x_0, y_0) et on calcule la valeur $f(x_0, y_0)$.
  × on se déplace alors autour de (x_0, y_0). Pour ce faire, on considère les points de la forme $(x_0 + h, y_0 + k)$ où h et k sont des réels dans un voisinage de 0.
  × on démontre alors :
  $$f(x_0 + h, y_0 + k) > f(x_0, y_0)$$
  ce qui permet de conclure que (x_0, y_0) n'est pas un maximum local.
- On agit évidemment de même pour démontrer que f n'admet pas de minimum local en (x_0, y_0). Plus précisément, on cherche à exhiber $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ dans un voisinage de $(0, 0)$ tel que :
  $$f(x_0 + h, y_0 + k) < f(x_0, y_0)$$
- Les choix de h et k sont souvent guidés par l'exercice. Il est très fréquent de regarder les valeurs que l'on obtient pour f en partant de (x_0, y_0) suivant une direction précise. On peut par exemple considérer la direction :
  × $(h, -h)$ et ainsi comparer $f(x_0 + h, y_0 - h)$ à $f(x_0, y_0)$.
  × (h, h) et ainsi comparer $f(x_0 + h, y_0 + h)$ à $f(x_0, y_0)$.
  × $(0, h)$ et ainsi comparer $f(x_0, y_0 + h)$ à $f(x_0, y_0)$.
  × $(h, 0)$ et ainsi comparer $f(x_0 + h, y_0)$ à $f(x_0, y_0)$.
- Notons que si l'on démontre que (x_0, y_0) n'est pas un extremum local, alors il n'est pas non plus un extremum global.

VI.6. Existence d'un extremum global : théorème de compacité

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble D.

1) f est continue sur D *2)* D est fermé borné	$\Rightarrow$	f est bornée et atteint ses bornes sur D

Informations concernant cette semaine de colles

Cette semaine, les questions de cours sont les suivantes :

– Inégalité de Markov. Énoncé et démonstration.

– Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Énoncé et démonstration.

– Loi faible des grands nombres. Énoncé et démonstration.

– Loi de Poisson comme loi limite d'une loi binomiale. Énoncé et démonstration.

Exercices types

Les compétences attendues sur le chapitre fonctions réelles de deux variables réelles sont les suivantes :

– savoir déterminer l'ensemble de définition d'une fonction de deux variables.

– savoir représenter graphiquement l'ensemble de définition d'une fonction de deux variables.
En particulier, les bords de l'ensemble seront représentés en lignes pleines (si incluses) ou pointillées (si exclues).

– savoir démontrer qu'une fonction de deux variables est continue (ou de classe $\mathcal{C}^1$ / $\mathcal{C}^2$) sur une partie D de $\mathbb{R}^2$.

– savoir déterminer les dérivées partielles à l'ordre 1 et 2 d'une fonction de deux variables.

– savoir écrire le gradient en un point (x_0, y_0) d'une fonction de deux variables.

– savoir déterminer les points critiques d'une fonction de deux variables.

– savoir que lorqsue l'on travaille sur un **ouvert** $D \subset \mathbb{R}^2$, les points critiques sur D sont les extrema locaux **possibles** d'une fonction de deux variables ((x_0, y_0) extremum local $\Rightarrow$ (x_0, y_0) point critique de f).

– savoir utiliser le théorème de Schwarz (sous l'hypothèse du caractère $\mathcal{C}^2$ sur un **ouvret**) pour conclure $\partial^2_{12}(f) = \partial^2_{21}(f)$.

– savoir écrire le développement limité à l'ordre 2 d'une fonction de 2 variables.

– savoir déterminer la matrice hessienne en un point (x, y) d'une fonction de deux variables (puis l'écrire en les points critiques).

– savoir démontrer qu'une fonction de deux variables admet un extremum local en un point critique.

– savoir démontrer qu'une fonction de deux variables admet un point selle en un point critique.

– savoir déterminer les relations entre coefficients et racines dans le cas où la hessienne admet un paramètre inconnu (*cf* démonstration du théorème hors programme).

– savoir qu'une fonction continue sur un compact (ensemble fermé borné) est bornée et atteint ses bornes.