Colles

semaine 23 : 14 mars - 19 mars

I. Loi faible des grands nombres

I.1. L'inégalité de Markov

Soit X une v.a.r.

On suppose que :

× X admet une espérance.

× X est à valeurs positives ($X(\Omega) \subset [0, +\infty[$).

$$\boxed{\forall a > 0,\ \mathbb{P}\big([X \geqslant a]\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}}$$

Démonstration.
Soit $a > 0$. Considérons la v.a.r. Y définie par :

$$\begin{array}{rccl} Y & : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & & \omega & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} a & \text{si } X(\omega) \geqslant a \\ 0 & \text{si } X(\omega) < a \end{array} \right. \end{array}$$

Listons quelques propriétés de Y :

- $Y(\Omega) = \{0, a\}$ (Y est donc une v.a.r. finie).
- $[Y = a] = [X \geqslant a]$ (puisque : $\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = a \Leftrightarrow X(\omega) \geqslant a$).
- $[Y = 0] = [X < a]$ (puisque : $\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = 0 \Leftrightarrow X(\omega) < a$).

1) Comme Y est finie, Y admet une espérance. De plus :

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \times \underset{\mathbb{P}([X<a])}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}([Y=0])}} + a \times \underset{\mathbb{P}([X \geqslant a])}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}([Y=a])}} = a \times \mathbb{P}([X \geqslant a])$$

2) On remarque aussi : $Y \leqslant X$ (*i.e.* : $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) \leqslant X(\omega)$). Démontrons-le.
Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.
× si $X(\omega) \geqslant a$ alors $Y(\omega) = a \leqslant X(\omega)$.
× si $X(\omega) < a$ alors $Y(\omega) = 0 \leqslant X(\omega)$.

3) Par croissance de l'espérance, on déduit des deux points précédents :

$$\underset{a\,\mathbb{P}([X \geqslant a])}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{E}(Y)}} \leqslant \mathbb{E}(X)$$

On conclut en divisant de part et d'autre par $a > 0$.

□

Remarque
Il est fréquent de trouver, dans les énoncés des sujets de `TOP3`, la notion de variable indicatrice d'un événement. Plus précisément, si A est un événement :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A & : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & & \omega & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{array} \right. \end{array}$$

Avec cette notation, on peut écrire : $Y = a \cdot \mathbb{1}_{[X \geqslant a]}$.

I.2. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une v.a.r. qui admet une variance.

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\big(\, [\, |X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon \,]\,\big) \ \leqslant\ \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}}$$

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$. Considérons la v.a.r. $Y = \big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2$.
On est dans le cadre d'application de l'inégalité de Markov :
× $Y = \big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2$ est à valeurs positives.
× la v.a.r. Y admet une espérance car X admet une variance.
En appliquant l'inégalité de Markov à la v.a.r. Y, avec $a = \varepsilon^2$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}\big(\,[\, Y \geqslant \varepsilon^2 \,]\,\big) & = & \mathbb{P}\Big(\Big[\, \big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2 \geqslant \varepsilon^2 \,\Big]\Big) & \leqslant & \dfrac{\mathbb{E}(Y)}{\varepsilon^2} \\ & & \shortparallel & & \shortparallel \\ & & \mathbb{P}\big(\,[\, \big|X - \mathbb{E}(X)\big| \geqslant \varepsilon \,]\,\big) & & \dfrac{\mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}(X))^2\big)}{\varepsilon^2} = \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2} \end{array}$$

L'inégalité de gauche est obtenue par stricte croissance de la fonction racine sur $[0, +\infty[$. □

I.3. La loi faible des grands nombres

I.3.a) Convergence en probabilité

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. .
Soit X une v.a.r.

- On dit que la suite de v.a.r. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ **converge en probabilté** vers X si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big(\,[\, \big|X_n - X\big| \geqslant \varepsilon \,]\,\big) = 0$$

Dans ce cas, on note : $X_n \underset{n \to +\infty}{\xrightarrow{\mathbb{P}}} X$.

I.3.b) Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. :
× indépendantes,
× ~~de même loi~~,
× admettent toutes la même espérance m,
× admettent toutes la même variance σ^2 $\cancel{\neq 0}$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ *(moyenne empirique).*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\big[\, \big|\overline{X_n} - m\big| \geqslant \varepsilon \,\big]\right) = 0}$$

Autrement dit : $\overline{X_n} \underset{n \to +\infty}{\xrightarrow{\mathbb{P}}} m$.
(la suite de v.a.r. $\big(\overline{X_n}\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ **converge en probabilité** *vers la v.a.r. certaine égale à m)*

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
  Pour toute v.a.r. Y admettant une variance $\mathbb{V}(Y)$, on a :
$$\forall \lambda > 0, \ \mathbb{P}\big([|Y - \mathbb{E}(Y)| \geqslant \lambda] \big) \ \leqslant \ \frac{\mathbb{V}(Y)}{\lambda^2}$$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons la v.a.r. $Y = \overline{X_n} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.
  - × La v.a.r. $\overline{X_n}$ admet une espérance (resp. variance) car elle est la CL de v.a.r. qui admettent une espérance (resp. variance).
  - × De plus :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(\overline{X_n}) & = & \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) \ = \ \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} m \ = \ \dfrac{1}{\cancel{n}} \cancel{n} \times m \ = \ m & \end{array}$$
  - × Et :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(\overline{X_n}) & = & \mathbb{V}\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) & \\ & = & \dfrac{1}{n^2} \, \mathbb{V}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) & \\ & = & \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) & \textit{(car les v.a.r. de la suite } (X_n) \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma^2 \ = \ \dfrac{1}{n^{\cancel{2}}} \cancel{n} \times \sigma^2 \ = \ \dfrac{1}{n} \, \sigma^2 & \end{array}$$
- Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :
$$0 \ \leqslant \ \mathbb{P}\big(\, [|\overline{X_n} - m| \geqslant \varepsilon] \, \big) \ \leqslant \ \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \, \frac{1}{n}$$
  Or :
  - × $0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
  - × $\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \, \dfrac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

  Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big(\, [|\overline{X_n} - m| \geqslant \varepsilon] \, \big) = 0$. □

II. Convergence en loi

II.1. Définition

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
(pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_{X_n} les fonctions de répartition correspondantes)
Soit X une v.a.r. définie sur ce même espace probabilisé.
(on note F_X la fonction de répartition de la v.a.r. X)

- On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable X, lorsque :
$$\lim_{n \to +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$
  en tout point de continuité x de la fonction F_X.
- Lorsque c'est le cas, on note $X_n \overset{\mathscr{L}}{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow}} X$.

II.2. Convergence en loi : cas particuliers

1) Cas où la v.a.r. limite est une v.a.r. à densité

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r.

Soit X une v.a.r. **à densité**.

Comme X est à densité, sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$. On peut alors reformuler la définition de convergence en loi :

$$\boxed{X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} X \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)}$$

Dans ce cas (X v.a.r. **à densité**), on peut même démontrer (technique) :

$$\boxed{X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} X \quad \Leftrightarrow \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([a \leqslant X_n \leqslant b]) = \mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b])}$$

2) Cas où `TOUTES` les v.a.r. discrètes sont à valeurs dans un même ensemble

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. **discrètes**.

Soit X une v.a.r. **discrète**.

On suppose de plus que les v.a.r. X_n et la v.a.r. X sont à valeurs dans le même ensemble. Plus précisément, on considère ici le cas où :

× $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{Z}$).

× X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{Z}$).

On a alors :

$$\boxed{X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} X \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ (resp. } \mathbb{Z}),\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) = \mathbb{P}([X = k])}$$

II.3. Illustration sur des exemples

II.3.a) Cas d'une suite de v.a.r. discrètes convergeant en loi vers une v.a.r. discrète

Soit $\lambda > 0$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r.

On suppose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

Alors : $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Démonstration.

- On est dans le cas où :

  × $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. **discrètes** à valeurs dans $\mathbb{N}$.

  × X est une v.a.r. **discrète** à valeurs dans $\mathbb{N}$.

  Il s'agit alors de démontrer :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = \mathbb{P}\big([X = k]\big)$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in \mathbb{N}$.
  Comme on s'intéresse à un résultat lorsque $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on peut considérer n aussi grand que souhaité. En particulier : $k \in [\![0, n]\!]$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_n = k]) &= \binom{n}{k} \times \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \, \frac{\lambda^k}{n^k} \, \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \, \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \, \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} \, \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \, \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}
\end{aligned}$$

- Intéressons-nous aux termes de ce produit.
  1) Tout d'abord :

$$\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{n^k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{n^k} = 1$$

  En effet, le numérateur apparaît comme produit de k éléments qui sont tous équivalents, lorsque n tend vers $+\infty$, à n.

  2) Notons $u_n = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$. Alors : $u_n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right)$.
  Or :

$$\ln(u_n) = n \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \cancel{n} \, \frac{-\lambda}{\cancel{n}} = -\lambda$$

  On en déduit : $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\lambda$ et $u_n = \mathrm{e}^{\ln(u_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}$.

  3) Enfin, comme : $1 - \frac{\lambda}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on a :

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1} = 1$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}([X_n = k]) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathbb{P}([X = k])}$$

où X est une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
La loi de Poisson apparaît comme la limite de lois binomiales $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.
Ainsi, si n grand (et donc $\frac{\lambda}{n}$ proche de 0) la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ est une bonne approximation de la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$. $\square$

II.3.b) Cas d'une suite de v.a.r. à densité convergeant en loi vers une v.a.r. discrète

Exercice *(d'après* `ESCP 1987`*)*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. à densité.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de X_n est définie par :

$$F_{X_n} : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^n} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a.r. X dont on précisera la loi.

Exercice

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. à densité.

Plus précisément, on considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}])$.

Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a.r. X dont on précisera la loi.

II.3.c) Cas d'une suite de v.a.r. discrètes convergeant en loi vers une v.a.r. à densité

Exercice

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r.

Plus précisément, on suppose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$X_n \hookrightarrow \mathcal{U}\left(\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}\right)$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout réel x :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{n} \\ \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

2. Montrer l'équivalent : $\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.

3. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a.r. X telle que : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

II.3.d) Cas d'une suite de v.a.r. à densité convergeant en loi vers une v.a.r. à densité

Exercice

Soit X une v.a.r. à densité.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} X$.

Montrer que (X_n) converge en loi vers X.

MÉTHODO : convergence en loi d'une suite de v.a.r.

On retiendra la méthodologie suivante.

A. Cas où TOUTES les v.a.r. en jeu sont discrètes et à valeurs dans $\mathbb{N}$

Il s'agit alors de démontrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = \mathbb{P}\big([X = k]\big)$$

B. Cas général

On détermine tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_{X_n}.

1) Si la fonction F_{X_n} n'est pas définie par cas.

Dans ce cas, on considère $x \in \mathbb{R}$ et on détermine $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{X_n}(x)$.

2) Si la fonction F_{X_n} est définie par cas.

Deux nouveaux cas se présentent.

a) Si les cas définissant F_{X_n} ne font pas apparaître n.

On introduit alors $x \in \mathbb{R}$ et on raisonne alors par disjonction de cas.
Plus précisément, pour x dans chaque intervalle définissant les cas de F_{X_n} on cherche la limite de $F_{X_n}(x)$.

b) Si au moins un cas définissant F_{X_n} fait apparaître n.

On commence par déterminer les « intervalles limites ».
Si $I_n = [a_n, b_n]$ (ou $[a_n, b_n[$, ou $]a_n, b_n]$, ou $]a_n, b_n[$) est l'un des intervalles définissant les cas de F_{X_n}, on détermine « l'intervalle limite » $I = \big(\lim\limits_{n \to +\infty} a_n, \lim\limits_{n \to +\infty} b_n \big)$.

Pour savoir si on doit inclure ou exclure la borne $a = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ d'un intervalle limite, on vérifie si : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a \in I_n$. Puis :

× si c'est le cas, on considère $I = \big[a, b \big)$

× sinon, on considère $I = \big] a, b \big)$

On agit de même pour savoir s'il faut inclure ou non $b = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$.

On introduit alors $x \in \mathbb{R}$ et on raisonne alors par disjonction de cas.
Plus précisément, pour x dans chaque intervalle définissant les cas de F_{X_n} on cherche la limite de $F_{X_n}(x)$. On n'oubliera pas de préciser, lors de l'étude du cas

III. Approximation de v.a.r. par le TCL

III.1. Théorème central limite

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. :
- $\times$ indépendantes,
- $\times$ de même loi,
- $\times$ de même espérance m,
- $\times$ et de même variance σ^2 **non nulle**.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{et} \quad \overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \frac{S_n}{n}$$

$$S_n^* = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\overline{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \overline{X}_n^*$$

Alors : $\boxed{\overline{X_n}^* \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Z \quad \text{où} \quad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)}$

Autrement dit, la suite $(\overline{X}_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a.r. de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. En particulier, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leqslant b$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[a \leqslant \overline{X}_n^* \leqslant b\right]\right) = \mathbb{P}([a \leqslant Z \leqslant b])}$$

III.2. Idée générale de l'approximation de lois par TCL

- On se place dans le cadre d'utilisation du théorème précédent. On a alors :

  $$S_n^* \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Z \quad \text{où} \quad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

  On se pose alors la question de savoir ce que résultat permet de conclure quant à la loi de S_n. Pour ce faire, déterminons F_{S_n}.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
F_{S_n}(x) &= \mathbb{P}\big([S_n \leqslant x]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([S_n - nm \leqslant x - nm]\big) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant \frac{x - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[S_n^* \leqslant \frac{x - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right]\right) \\
&\simeq \mathbb{P}\left(\left[Z \leqslant \frac{x - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right]\right) \qquad \textit{(pour une valeur de } n \textit{ suffisamment grande)} \\
&= \mathbb{P}\Big([\sigma\sqrt{n}\, Z + nm \leqslant x]\Big) = F_{\sigma\sqrt{n}\, Z+nm}(x)
\end{aligned}$$

On peut donc considérer que, pour n suffisamment grand, les v.a.r. S_n et $Z_n = \sigma\sqrt{n}\, Z + nm$ ont même loi.

- Mais quelle est la loi de $Z_n = \sigma\sqrt{n}\ Z + nm$?
  Comme Z_n est une transformée affine de la v.a.r. Z qui suit une loi normale, Z_n suit une loi normale.
  On détermine les caractéristiques de cette loi normale en déterminant espérance et variance de Z_n :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_n) &= \mathbb{E}(\sigma\sqrt{n}\ Z + nm) = \sigma\sqrt{n}\ \cancel{\mathbb{E}(Z)} + nm = nm \\ \mathbb{V}(Z_n) &= \mathbb{V}(\sigma\sqrt{n}\ Z + nm) = (\sigma\sqrt{n})^2\ \mathbb{V}(Z) = n\sigma^2 \end{aligned}$$

> Ainsi, pour n suffisamment grand, la v.a.r. S_n suit approximativement la loi $\mathcal{N}\left(nm, n\sigma^2\right)$.

III.3. Illustration sur des exemples

III.3.a) Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

> Soit $p \in \,]0,1[$.
> Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes.
> On suppose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
> Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.
>
> *1)* Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
>
> *2)* $\boxed{S_n^* = \dfrac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} Z, \quad \text{où } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)}$
>
> *3)* Pour n suffisamment grand, la v.a.r. S_n suit approximativement la loi $\mathcal{N}(np, np(1-p))$.

Remarque
Considérons n et p définis de telle sorte qu'on peut approcher la v.a.r. S_n (où $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$) par la v.a.r. Z_n (avec $Z_n \hookrightarrow \mathcal{N}(np, np(1-p))$).
On devrait alors écrire : $\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}([S_n = k]) \simeq \mathbb{P}([Z_n = k])$.
Or, comme Z_n est une v.a.r. à densité, on a : $\mathbb{P}([Z_n = k]) = 0$.
Ainsi, l'approximation ci-dessus n'est pas bonne.
On écrira plutôt (on parle de **correction de continuité**) :
$$\mathbb{P}([S_n = k]) \simeq \mathbb{P}([k - 0,5 < Z_n < k + 0,5])$$

III.3.b) Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale

> Soit $\alpha > 0$.
> Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes.
> On suppose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha)$.
> Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.
>
> *1)* Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\,\alpha)$.
>
> *2)* $\boxed{S_n^* = \dfrac{S_n - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} Z, \quad \text{où } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)}$
>
> *3)* Pour n suffisamment grand, la v.a.r. S_n suit approximativement la loi $\mathcal{N}(n\alpha, n\alpha)$.

Informations concernant cette semaine de colles

- Inégalité de Markov. Énoncé et démonstration.
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Énoncé et démonstration.
- Loi faible des grands nombres. Énoncé et démonstration.
- Loi de Poisson comme loi limite d'une loi binomiale. Énoncé et démonstration.

Exercices types

Les compétences attendues sur le chapitre convergence et approximations sont les suivantes :
- savoir citer l'inégalité de Markov.
- savoir citer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- savoir citer la Loi faible des Grands Nombres.
- connaître la notion de convergence en probabilités.
- connaître la notion de convergence en loi :
  - × cas où la v.a.r. limite est une v.a.r. à densité.
  - × cas où `TOUTES` les v.a.r. en jeu sont discrètes et à valeurs dans le même ensemble.
- savoir démontrer qu'une suite de v.a.r. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a.r. X.