Colles

semaine 4 : 20 septembre - 25 septembre

I. Notion de convergence, divergence

I.1. Suites réelles convergentes (COURS)

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ un nombre réel (fini).

- La suite (u_n) **converge vers** ℓ (ou admet la limite ℓ / ou tend vers ℓ) quand n tend vers $+\infty$ si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon)}$$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| < \varepsilon}$$

(avec l'abus de notation « $\forall n \geqslant n_0$ »)

- La suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite (u_n) sauf un nombre fini d'entre eux.
(c'est la définition donnée par le programme officiel)
- Lorsque c'est le cas, on note : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell}$ ou $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell}$
- Une suite réelle (u_n) sera dite **divergente** si elle n'est pas convergente.
Autrement dit, (u_n) est divergente s'il n'existe pas d'éléments $\ell \in \mathbb{R}$ tel que (u_n) converge vers ℓ.

I.2. Suites divergeant vers l'infini (COURS)

- On dit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ si :

$$\boxed{\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n > A)}$$

$$\boxed{\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n > A}$$

(avec l'abus de notation « $\forall n \geqslant n_0$ »)

Ceci signifie que les termes de la suite deviennent, à partir d'un certain rang, aussi grands que souhaités.
- Lorsque c'est le cas, on note : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell}$ ou $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell}$
- On dit que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$ si :

$$\boxed{\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n < -A)}$$

$$\boxed{\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n < -A}$$

I.3. Propriétés des suites (COURS)

Propriétés générales.

a) $\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}} \\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}} \end{array}\right\} \Rightarrow \ell_1 = \ell_2}$ *(démonstration non exigible)*

(unicité de la limite (éventuellement infinie))

b) Convergence des suites extraites. Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, on a :

$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \ \Rightarrow \ u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell}$ *(démonstration non exigible)*

$\hookrightarrow$ savoir montrer de la divergence à l'aide de cette propriété.

Propriétés des suites convergentes.

a) $\boxed{(u_n) \text{ converge vers la limite } \ell \ \Leftrightarrow \ (u_n - \ell) \text{ converge vers } 0}$

(démonstration non exigible)

b) $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0 \ \Leftrightarrow \ (|u_n|) \text{ converge vers } 0}$

(démonstration non exigible)

c) $\boxed{(u_n) \text{ convergente } \ \Rightarrow \ (u_n) \text{ bornée}}$

(démonstration non exigible)

Propriétés des suites divergeant vers l'infini.

a) $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \Leftrightarrow -u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$ *(démonstration non exigible)*

b) $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \Rightarrow (u_n) \text{ non majorée}}$ *(démonstration non exigible)*

(réciproque fausse ! Considérer $((-1)^n n)$)

c) $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant 0}$

$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant 0}$

Propriété de recouvrement

Soit (u_n) une suite telle que :

× $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite $\ell \in \mathbb{R}$,

× $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite $\ell \in \mathbb{R}$.

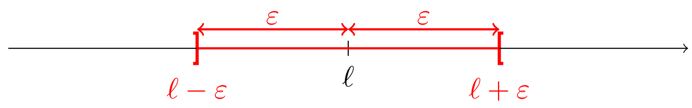
Alors (u_n) est convergente, de limite ℓ.

(démonstration exigible)

Démonstration.
On choisira, au choix, l'une des deux démonstrations.

Démonstration formelle « avec les ε »
Soit $\varepsilon > 0$.

- On sait : $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
  Ainsi, il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_1,\ |u_{2n} - \ell| \ < \ \varepsilon$.
  (ceci signifie qu'à partir du rang n_1, tous les éléments de (u_{2n}) sont dans l'intervalle rouge)



- On sait : $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
  Ainsi, il existe un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_2,\ |u_{2n+1} - \ell| \ < \ \varepsilon$.
  (ceci signifie qu'à partir du rang n_2, tous les éléments de (u_{2n+1}) sont dans l'intervalle rouge)

Noton $N = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$. Ces deux inégalités permettent d'affirmer que :

$$\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \ \leqslant \ \varepsilon$$

(ceci signifie qu'à partir du rang N, tous les éléments de (u_n) sont dans l'intervalle rouge)

Ainsi (u_n) est convergente de limite ℓ.

> Le programme officiel précise « [qu'] aucune démonstration concernant les résultats [du chapitre convergence] n'est exigible ».
> - Ce type de démonstration, dite « avec les ε », est de ce fait considéré comme très technique.
> - Dans une copie de concours, on attend plutôt un raisonnement comme celui qui suit.

Démonstration formelle « sans les ε »
Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ.

- Comme $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (u_{2n}) (*i.e.* tous les termes d'indices pairs de la suite (u_n)) sauf un nombre fini d'entre eux.
- Comme $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (u_{2n+1}) (*i.e.* tous les termes d'indices impairs de la suite (u_n)) sauf un nombre fini d'entre eux.

On en déduit que l'intervalle I contient tous les termes de la suite (u_n) sauf un nombre fini d'entre eux. □

II. Compatibilité avec la relation d'ordre (COURS)

II.1. Démontrer des inégalités pour les suites convergentes

a) Passage à la limite dans les inégalités.

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \\ \forall n \geqslant n_0,\ a \leqslant u_n \leqslant b \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a \leqslant \ell \leqslant b$$

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \\ \forall n \geqslant n_0,\ a < u_n < b \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a \leqslant \ell \leqslant b$$

(démonstration non exigible)

b) Théorème de comparaison.

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2 \\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \ell_1 \leqslant \ell_2$$

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2 \\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n < v_n \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \ell_1 \leqslant \ell_2$$

(démonstration non exigible)

II.2. Démontrer de la convergence : théorème d'encadrement

Soient (u_n), (v_n), (w_n) trois suites réelles telles que :

- (u_n) est convergente, de limite ℓ.
- (w_n) est convergente, de même limite ℓ.
- il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Alors la suite (v_n) est convergente de limite ℓ.

On peut résumer ce théorème comme suit.

$$\begin{array}{ccccc} u_n & \leqslant & v_n & \leqslant & w_n \\ {\scriptstyle n\to+\infty}\big\downarrow & & {\scriptstyle n\to+\infty}\big\downarrow & & {\scriptstyle n\to+\infty}\big\downarrow \\ \ell & \leqslant & \ell & \leqslant & \ell \end{array}$$

(démonstration non exigible)

II.3. Démontrer de la divergence vers l'infini

- Théorème de comparaison.

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

(démonstration non exigible)

III. Les théorèmes de monotonie (EXO)

III.1. Théorème de convergence monotone (EXO) *(démonstration non exigible)*

***a)* Démontrer de la convergence.**

$$\left.\begin{array}{l}(u_n) \text{ croissante}\\ (u_n) \text{ majorée}\end{array}\right\} \Rightarrow (u_n) \text{ convergente}$$

$$\left.\begin{array}{l}(u_n) \text{ décroissante}\\ (u_n) \text{ minorée}\end{array}\right\} \Rightarrow (u_n) \text{ convergente}$$

Il faut savoir démontrer (en procédant par l'absurde) :

$$\left.\begin{array}{l}(u_n) \text{ croissante}\\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell$$

(démonstration exigible)

Démonstration.

- On procède par l'absurde. On suppose :
  - × la suite (u_n) croissante,
  - × la suite (u_n) convergente vers ℓ,
  - × la propriété NON($\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell$) est vérifiée.
    Autrement dit, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > \ell$.
- La suite (u_n) étant croissante, on a :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant u_{n_0}$$

  Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $\ell \geqslant u_{n_0}$.
- En combinant avec l'inégalité de l'hypothèse, on a alors : $\ell \geqslant u_{n_0} > \ell$.

Ce qui est absurde ! □

Le cas des suites décroissantes donne lieu à un énoncé similaire.

$$\left.\begin{array}{l}(u_n) \text{ décroissante}\\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \ell$$

***b)* Démontrer de la divergence vers l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$).**

$$\left.\begin{array}{l}(u_n) \text{ croissante}\\ (u_n) \text{ non majorée}\end{array}\right\} \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

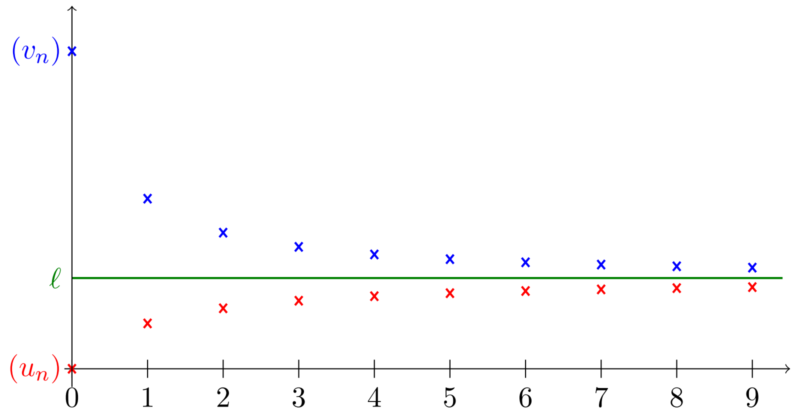
$$\left.\begin{array}{l}(u_n) \text{ décroissante}\\ (u_n) \text{ non minorée}\end{array}\right\} \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

III.2. Suites adjacentes (EXO) *(démonstration non exigible)*

$$\left.\begin{array}{rl} \textit{(i)} & (u_n) \text{ est croissante,} \\ \textit{(ii)} & (v_n) \text{ est décroissante,} \\ \textit{(iii)} & \lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont convergentes} \\ \text{et admettent la même limite} \end{array}$$

Le membre de gauche de l'implication signifie (définition) que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Représentation graphique



Démonstration.
(la démonstration n'est pas à connaître, elle est donnée ici car il reste de la place)
Il s'agit essentiellement de démontrer que la représentation graphique précédente est correcte.

a) La suite $(v_n - u_n)$ est décroissante

Soit $n \in \mathbb{N}$. $(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = \underbrace{v_{n+1} - v_n}_{\leqslant 0} + \underbrace{u_n - u_{n+1}}_{\leqslant 0} \leqslant 0$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant u_n$

Par hypothèse, $(v_n - u_n)$ est convergente.
Par théorème, elle est donc bornée.
Cette suite étant décroissante et minorée, le théorème de convergence monotone permet d'affirmer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \ \geqslant\ \inf_{n\in\mathbb{N}} (v_n - u_n) = 0$$

(il faudrait faire cette démonstration par l'absurde ...)

c) La suite (u_n) est majorée et la suite (v_n) est minorée

On peut maintenant démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_0$.

- En effet, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant v_0$ puisque (v_n) est décroissante.
- Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$.

De manière analogue, on démontre : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 \leqslant v_n$.

d) Les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite

- (u_n) est croissante et majorée (par v_0) donc convergente vers $\ell_1 \in \mathbb{R}$.
- (v_n) est décroissante et minorée (par u_0) donc convergente vers $\ell_2 \in \mathbb{R}$.

Ainsi, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell_1 - \ell_2$.
(la première égalité est seulement vérifiée pour des suites convergentes)
Or par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.
On en conclut : $\ell_1 = \ell_2$. □

IV. Étude des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$ (EXO)

- L'étude de telles suites se fait généralement en commençant par l'étude des propriétés de la fonction f puis en en déduisant des propriétés de la suite (u_n). On dresse ici un catalogue des propriétés de la suite (u_n) obtenues à l'aide des propriétés de f.
- Ce qui importe ici n'est pas de connaître les résultats listés ci-dessous mais de connaître la méthode permettant de démontrer ces résultats.

IV.1. Savoir démontrer que tous les termes de la suite (u_n) sont dans un intervalle I donné

Notons $I = [a, b]$ où a et b sont deux réels (les cas $]a, b]$, $[a, b[$, $]a, b[$ avec a et b éventuellement infinis) se traitent de manière similaire). Deux cas se présentent.

– si la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ tout en entier, on rédige comme suit.

> Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)\ :\ a \leqslant u_n \leqslant b$.
>
> ▶ Initialisation :
> On a : $u_0 = \ldots \in [a, b]$.
> D'où $\mathcal{P}(0)$.
>
> ▶ Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$.
> Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $a \leqslant u_{n+1} \leqslant b$).
>
> On a $\quad a \leqslant u_n \leqslant b \quad$ *(par hypothèse de récurrence)*
>
> donc $\quad f(a) \leqslant f(u_n) \leqslant f(b) \quad$ *(par croissance de la fonction f sur $[a, b]$)*
>
> Or : ...
> D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
>
> Ainsi, par principe de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.

– si la fonction f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout en entier, on rédige comme suit.

> Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)\ :\ \left\{\begin{array}{l} u_n \text{ est défini} \\ \text{et } a \leqslant u_n \leqslant b \end{array}\right.$.
>
> ▶ Initialisation :
> On a : $u_0 = \ldots \in [a, b]$.
> D'où $\mathcal{P}(0)$.
>
> ▶ Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$.
> Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(\textit{i.e.}\ \left\{\begin{array}{l} u_{n+1} \text{ est défini} \\ \text{et } a \leqslant u_{n+1} \leqslant b \end{array}\right.\right)$.
>
> - Par hypothèse de récurrence, u_n est bien défini et $u_n \in [a, b]$. On en déduit : ... Ainsi, $f(u_n)$ est bien défini.
> - Par ailleurs $\quad a \leqslant u_n \leqslant b \quad$ *(par hypothèse de récurrence)*
>
>   donc $\quad f(a) \leqslant f(u_n) \leqslant f(b) \quad$ *(par croissance de la fonction f sur $[a, b]$)*
>
>   Or : ...
>
> D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
>
> Ainsi, par principe de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.

(le cas f décroissante sur $[a, b]$ se traite de manière similaire)

Ces démonstrations reposent sur le fait que l'intervalle I est stable par la fonction f. Plus précisément, on a le résultat suivant.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_0 \in I \\ f(I) \subset I \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I}$$

Dans toute la suite, on considère que la suite (u_n) est bien définie et qu'elle est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 \in I \quad \text{où } I \text{ est un intervalle stable par } f \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$$

IV.2. Savoir déterminer la monotonie de (u_n)

***a)* De manière directe si l'on sait : $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant x$**

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'inégalité en $x = u_n \in I$, on obtient :

$$f(u_n) \geqslant u_n$$

On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

(dans le cas où : $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant x$, on démontre que la suite (u_n) est décroissante)

***b)* Par récurrence si l'on sait que la fonction f est croissante sur I.**

On suppose que la fonction f est **croissante** sur I. Deux cas se présentent.

- si $u_1 \geqslant u_0$, on démontre que la suite (u_n) est croissante.
- si $u_1 \leqslant u_0$, on démontre que la suite (u_n) est décroissante.

On traite ici le cas $u_1 \geqslant u_0$.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_{n+1} \geqslant u_n$.

▶ <u>Initialisation</u> :
$u_1 \geqslant u_0$
D'où $\mathcal{P}(0)$.

▶ <u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \geqslant u_n$).

On a	$u_{n+1} \geqslant u_n$	*(par hypothèse de récurrence)*
donc	$f(u_{n+1}) \geqslant f(u_n)$	*(par croissance de la fonction f sur I)*

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
Ainsi, par principe de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.

On retiendra les propriétés suivantes.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_1 \geqslant u_0 \\ f \text{ croissante sur } I \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (u_n) \text{ est croissante}}$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_1 \leqslant u_0 \\ f \text{ croissante sur } I \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (u_n) \text{ est décroissante}}$$

(où I est un intervalle stable par f)

Remarque

- Si la fonction f est décroissante sur I, alors la fonction $f \circ f : I \to I$, est croissante. On peut alors étudier les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) en utilisant le résultat de ce paragraphe puisqu'elles sont définies par :
$$\left\{\begin{array}{l} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n}) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} u_1 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1}) \end{array}\right.$$
- On pensera à l'utilisation de la propriété de recouvrement ou le théorème des suites extraites pour obtenir de l'information sur la suite (u_n) à partir des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

IV.3. Savoir déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n)

a) **Si on sait que la suite (u_n) est croissante.**

Deux cas se présentent alors.

- si (u_n) est majorée : alors dans ce cas (u_n) est convergente.
La limite ℓ de cette suite est dans l'adhérence $\overline{I}$ de l'intervalle I.
- si (u_n) n'est pas majorée : alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Pour démontrer que (u_n) n'est pas majorée, on procède généralement par l'absurde. On suppose alors (u_n) majorée. On en déduit qu'elle est convergente de limite $\ell \in \overline{I}$ et on tente d'obtenir une contradiction.

b) **Si on sait que la suite (u_n) est convergente.**

La limite ℓ de (u_n) est parmi les points fixes de la fonction f.
On rappelle que la limite ℓ de (u_n) appartient à l'intervalle $\overline{I}$. Ainsi, même si tout point fixe est la limite **possible** de (u_n), les points fixes en dehors de $\overline{I}$ ne peuvent être ℓ.

On retiendra la propriété suivante.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \\ f \text{ continue en } \ell \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \ell = f(\ell)}$$

Ce résultat provient du théorème de composition des limites.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}} \\ f(x) \underset{x\to\ell}{\longrightarrow} a \in \overline{\mathbb{R}} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim_{x\to\ell} f(x) = a}$$

IV.4. Utilisation de l'inégalité des accroissements finis

Théorème 1.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $(x, y) \in I^2$ où I est un intervalle réel.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ dérivable sur l'intervalle } I \\ \bullet\ \text{il existe } M \geqslant 0, \forall u \in I,\ |f'(u)| \leqslant M \end{array}\right\} \Rightarrow \forall (x,y) \in I^2,\ |f(y) - f(x)| \leqslant M\ |y - x|$$

Les exercices d'étude de suites (u_n) à l'aide de l'IAF suivent la trame suivante.

1. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
2. Démontrer : $\forall x \in I,\ |\, f'(x)\,| \leqslant M$ *(où M est un réel donné dans $[0, 1[$).*
3. Démontrer : $\forall x \in I,\ f(x) \in I$ *(l'intervalle I est stable par f).*
4. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \in I$.
5. Déterminer l'unique point fixe α de la fonction f sur I.
6. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant M\ |u_n - \alpha|$.
7. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant M^n\ |u_0 - \alpha|$.
8. La suite (u_n) est-elle convergente ? Quelle est sa limite ?
9. Écrire un programme **Scilab** permettant de trouver une valeur approchée à 10^{-4} près de α.

La question *2.* attend la rédaction suivante.

D'après ce qui précède :
– la fonction f est dérivable sur l'intervalle I,
– $\forall u \in I,\ \ |f'(u)| \leqslant M$.
On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall x \in I, \forall y \in I,\ \ |f(y) - f(x)| \leqslant M\ \ |y - x|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant cette inégalité en $y = u_n \in I$ (d'après *4*) et $x = \alpha \in I$ (d'après *5*), on obtient :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant M\ \ |u_n - \alpha|$$

Or : $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$ (par définition de α).

V. Suites implicites (EXO)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Les énoncés sur les suites implicites sont essentiellement de deux types.

1) « Démontrer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution u_n dans l'intervalle I. »
(où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction indépendante de n)

Par définition, on a alors : $\boxed{f(u_n) = n}$ *(égalité souvent nécessaire dans l'exercice).*

2) « Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n dans l'intervalle I. »
(où $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction qui dépend de n)

Par définition, on a alors : $\boxed{f_n(u_n) = 0}$ *(égalité souvent nécessaire dans l'exercice).*

La définition de chaque terme de la suite (u_n) est obtenue à l'aide du théorème de la bijection dont on rappelle l'énoncé.

> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction :
> $\times$ continue sur I,
> $\times$ strictement monotone sur I.
>
> On a alors :
> - $f(I)$ est un intervalle,
> - f réalise une bijection de I sur $f(I)$,
> - $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue et strictement monotone sur $f(I)$.
>   Plus précisément, f^{-1} possède le même sens de monotonie que f.

Considérons que la suite (u_n) est définie à l'aide d'une fonction f (cas ***1)*** précédent). Il est classique d'avoir à démontrer une inégalité sur les termes de la suite (u_n). La difficulté de l'étude d'une suite implicite provient du fait que les termes de (u_n) ne sont pas connus. C'est donc sur l'égalité qu'il faut raisonner. Par exemple, si on a : $\boxed{f(u_n) = n}$ et qu'on souhaite démontrer que (u_n) est croissante, on rédigera comme suit.

> `Soit` $n \in \mathbb{N}$. `Remarquons :`
>
> $$n + 1 = f(u_{n+1}) \quad \geqslant \quad f(u_n) = n$$
>
> `En appliquant de part et d'autre l'inégalité la fonction` $f^{-1} : f(I) \to I$ `croissante sur` $f(I)$`, on obtient :`
>
> $$u_{n+1} \quad \geqslant \quad u_n$$
>
> `Ainsi, la suite` (u_n) `est croissante.`

VI. Comportement asymptotique des suites usuelles `(EXO)`

- Méthode d'étude des suites arithmético-géométriques `(EXO)`.
- Méthode d'étude des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 `(EXO)`.

VII. Croissances comparées `(EXO)`

VII.1. Suites négligeables, suites équivalentes `(COURS)`

> Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.
> - On dit que (u_n) est **négligeable** devant (v_n) et on notera $u_n = \underset{+\infty}{o}(v_n)$ si :
>
> $$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} \; = \; 0}$$
>
> - On dit que (u_n) est **équivalente** à (v_n) et on notera $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$ si :
>
> $$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} \; = \; 1}$$

VII.2. Échelle de comparaison asymptotique *(démo non exigible)*

Pour tout $a > 0$, $b > 0$, $q > 1$, on a :

$$\boxed{(\ln(n))^b \quad << \quad n^a \quad << \quad q^n \quad << \quad n! \quad << \quad n^n}$$

× Comprendre que cela signifie que pour tout $a > 0$, $b > 0$, $q > 1$, on a :

$$\boxed{(\ln(n))^b = \underset{+\infty}{o}(n^a) \quad \text{et} \quad n^a = \underset{+\infty}{o}(q^n) \quad \text{et} \quad q^n = \underset{+\infty}{o}(n!) \quad \text{et} \quad n! = \underset{+\infty}{o}(n^n)}$$

× Comprendre que cela signifie que pour tout $a > 0$, $b > 0$, $q > 1$, on a :

$$\boxed{\forall a > 0, \forall b > 0, \ \lim_{n \to +\infty} \frac{(\ln(n))^b}{n^a} = 0} \qquad \boxed{\forall a > 0, \forall q > 1, \ \lim_{n \to +\infty} \frac{n^a}{q^n} = 0}$$

× Il faut savoir lire ce théorème dans l'autre sens :

$$\boxed{\forall a > 0, \forall b > 0, q > 1, \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{n^a}{(\ln(n))^b} = +\infty} \qquad \boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{q^n}{n^a} = +\infty}$$

× On en déduit aussi : $\boxed{\forall a > 0, \forall |q| < 1, \quad \lim_{n \to +\infty} n^a \ q^n = 0}$

VII.3. Propriétés de la relation d'équivalence *(démo exigible)*

a) Propriétés générales

1) Réflexivité :

$$\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n}$$

2) Symétrie :

$$\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n \ \Rightarrow \ v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n}$$

3) Transitivité :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} w_n \end{array}\right\} \Rightarrow \ u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} w_n}$$

Démonstration.

1) Il suffit d'écrire : $\dfrac{u_n}{u_n} = 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

2) Il suffit d'écrire : $\dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{1}{\frac{u_n}{v_n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1} = 1$.

3) Il suffit d'écrire : $\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{v_n}{w_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \times 1 = 1$.

□

b) Équivalents et limites

1) Calcul de limites à l'aide d'un équivalent :

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ v_n \to \ell \ (\in \overline{\mathbb{R}}) \end{array}\right\} \Rightarrow \ u_n \to \ell$$

2) Calcul d'équivalents à l'aide d'une limite :

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \\ \ell \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$$

(avec ℓ limite finie)

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \\ \ell \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

(avec ℓ limite finie)

Démonstration.

1) Il suffit d'écrire : $u_n = \dfrac{u_n}{v_n} \times v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times \ell = \ell$.

2) Il suffit d'écrire : $\dfrac{u_n}{\ell} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{\ell} = 1$.

3) Il suffit d'écrire : $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{\ell} = 1$. □

Remarque

- L'hypothèse $\ell \neq 0$ est primordiale pour les propriétés du point *2*.
  Par exemple :
  $$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{mais} \quad \cancel{\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}}$$

- Au passage, précisons que l'on ne doit `JAMAIS` écrire : $\boxed{\cancel{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0}}$.
  - × car la définition établie dans ce cours ne nous permet tout simplement pas de définir correctement cette écriture.
  - × car c'est un cas qui a peu d'intérêt pratique puisqu'il signifie que u_n est nulle à partir d'un certain rang.

- La recherche d'équivalents (ou de termes dominants) ne se fait que lorque l'on considère une `SOMME` de termes. Cependant, on peut parfois aussi simplifier les produits lorsque l'un des termes admet une limite finie **non nulle** au voisinage du point considéré.
  Par exemple :

  × $\mathrm{e}^{1+\frac{1}{n}} \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^1 \times \ln(n)$ × $\dfrac{\ln(n)}{2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{2\,\mathrm{e}^0} = \dfrac{1}{2}\ln(n)$ × $\dfrac{\mathrm{e}^n}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^n}{\sqrt{1}} = \mathrm{e}^n$

  (on se sert ici de la compatibilité de $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ avec le produit : cf théorème suivant)

c) **Calculs d'équivalents en pratique : compatibilité avec le produit, le quotient, l'élévation à la puissance α**

1) Compatibilité avec le produit :

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} z_n \end{array}\right\} \Rightarrow \ u_n \times w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \times z_n$$

2) Compatibilité avec le quotient :

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} z_n \end{array}\right\} \Rightarrow \ \frac{u_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{v_n}{z_n}$$

3) Compatibilité avec l'élévation à la puissance $m \in \mathbb{N}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \Rightarrow \quad (u_n)^m \underset{n\to+\infty}{\sim} (v_n)^m$$

4) Compatibilité avec l'élévation à la puissance $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ (u_n) \text{ strictement positive à} \\ \text{partir d'un certain rang} \end{array}\right\} \Rightarrow \ (u_n)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} (v_n)^\alpha$$

5) Compatibilité avec la valeur absolue :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \Rightarrow \quad |u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$$

Démonstration.

1) Il suffit d'écrire : $\dfrac{u_n \times w_n}{v_n \times z_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{w_n}{z_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times 1 = 1$.

2) Il suffit d'écrire : $\dfrac{\frac{u_n}{w_n}}{\frac{v_n}{z_n}} = \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{z_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times 1 = 1$. □

VII.4. Propriétés non compatibles avec l'opérateur d'équivalence

On ne peut sommer des équivalents !

On ne peut appliquer de fonction de part et d'autre d'une relation d'équivalence !

VII.5. Quelques équivalents usuels (EXO)

Soit I un intervalle.
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0 \in I$ alors, **par définition**, on a :

a) $\boxed{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)}$

b) $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)}$ (formulation équivalente)

On a notamment :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1} \qquad \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1} \qquad \boxed{\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1}$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1} \qquad \boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1}$$

En particulier, on en tire :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}, \quad \ln\left(1 - \frac{2}{n^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{2}{n^2}, \quad \ln\left(1 + e^{-n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{-n}$$

Et de manière plus générale :

$$\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(1 + u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n}$$

De façon similaire :

$$e^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}, \quad e^{-\frac{2}{n^2}} - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{2}{n^2}, \quad e^{e^{-n}} - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{-n}$$

Et de manière plus générale :

$$\boxed{v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad e^{v_n} - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n}$$

VIII. Limites et opérations algébriques (EXO)

VIII.1. Somme de deux suites (EXO)

Somme			
v_n \ u_n	ℓ_1	$+\infty$	$-\infty$
ℓ_2	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

Le cas de la somme de deux suites apporte une F.I. : $\boxed{\infty - \infty}$

VIII.2. Produit de deux suites (EXO)

Produit					
v_n \ u_n	$\ell_1 > 0$	$\ell_1 < 0$	$\ell_1 = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 > 0$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 < 0$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 = 0$	0	0	0	F.I.	F.I.
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$

Le cas du produit de deux suites apporte une F.I. : $\boxed{0 \times \infty}$

VIII.3. Quotient de deux suites (EXO)

<table>
<tr><th colspan="7">Quotient</th></tr>
<tr><td colspan="2">v_n \ u_n</td><td>$\ell_1 > 0$</td><td>$\ell_1 < 0$</td><td>$\ell_1 = 0$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\ell_2 > 0$</td><td>$\frac{\ell_1}{\ell_2}$</td><td>$\frac{\ell_1}{\ell_2}$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\ell_2 < 0$</td><td>$\frac{\ell_1}{\ell_2}$</td><td>$\frac{\ell_1}{\ell_2}$</td><td>0</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\ell_2 = 0$</td><td>$v_n>0$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td rowspan="2">F.I.</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$v_n<0$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$+\infty$</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>F.I.</td><td>F.I.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$-\infty$</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>F.I.</td><td>F.I.</td></tr>
</table>

Le cas du quotient de deux suites apporte deux F.I. : $\boxed{\frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty}}$

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

Les questions de cours pour cette semaine se trouvent dans le document « programme_4_B.pdf ».

Exercices types

Les compétences attendues cette semaine sont les suivantes :

- savoir faire l'étude d'une fonction f et notamment savoir citer précisément le théorème de la bijection (on adoptera une présentation graphique).
- savoir comment étudier une suite géométrique / arithmético-géométrique / récurrente linéaire d'ordre 2.
- connaître les définitions de convergence.
- savoir faire l'étude d'une suite du type « $u_{n+1} = f(u_n)$ » (récurrente d'ordre 1).
  Il faut savoir comment exploiter les propriétés de la fonction f pour en déduire les propriétés de la suite (u_n).
- savoir faire l'étude d'une suite du type « $u_{n+1} = f(u_n)$ » dans le cadre d'application de l'IAF.
- savoir appliquer les théorèmes de passage à la limite (si tous les objets considérés admettent une limite !).
- savoir utiliser le théorème d'encadrement pour démontrer qu'une suite admet une limite **finie**.
- savoir utiliser le théorème de comparaison pour démontrer qu'une suite admet une limite infinie.
- savoir utiliser le théorème des suites adjacentes.
- savoir manipuler la relation d'équivalence $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ ou, à tout le moins, savoir mettre en facteur le terme dominant dans une somme.

Les exercices sur les suites peuvent donner lieu à des questions **Scilab** à savoir :

× calcul du $n^{\text{ème}}$ élément d'une suite,

× calcul des n premiers éléments d'une suite,

× calcul du premier élément d'une suite telle qu'une propriété est vérifiée.

× calcul de la valeur approchée de la limite $\ell \in \mathbb{R}$ d'une suite récurrente d'ordre 1 dans le cadre d'application de l'IAF.