

## Colles

semaine 4 : 20 septembre - 25 septembre

## I. Notion de séries à termes réels (COURS)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels.

- On appelle **série de terme général**  $u_n$  et on note  $\sum u_n$  la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dont le terme général  $S_n$  est défini par :  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .
- La suite  $(S_n)$  est appelée **suite des sommes partielles** associée à  $\sum u_n$ . Son terme général  $S_n$  est appelé **somme partielle d'ordre  $n$**  associée à  $\sum u_n$ .
- On dit que la série  $\sum u_n$  est **convergente** si  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.
- On dit que la série  $\sum u_n$  est **divergente** si  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est divergente.
- Lorsque  $\sum u_n$  converge, la limite de la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est appelée **somme de la série** et est (souvent) notée  $S$ . On a alors :

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^n u_k \right)$$

- Déterminer la **nature** d'une série, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.

## II. Méthode pour déterminer la nature d'une série (EXO)

II.1. Une condition NÉCESSAIRE de convergence (*démonstration exigible*)

Soit  $(u_n)$  une suite de réels.

- Pour qu'une série converge, il **faut** que son terme général tende vers 0 :

$$\sum u_n \text{ converge} \Rightarrow u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

- Cette condition est nécessaire mais pas suffisante. Autrement dit, on peut trouver une suite  $(u_n)$  telle que :
  - ×  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ ,
  - ×  $\sum u_n$  divergente.
- ☞ Par exemple,  $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  mais la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est divergente.
- On dit que la série  $\sum u_n$  est **grossièrement divergente** si son terme général  $u_n$  est tel que :  $u_n \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . Une série grossièrement divergente est divergente :

$$u_n \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \Rightarrow \sum u_n \text{ diverge}$$

*Démonstration.*

Supposons que la série  $\sum u_n$  converge.

Ainsi, la suite  $(S_n)$  est convergente vers un réel  $S \in \mathbb{R}$ . Or, pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

Comme  $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} S$  et  $S_{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} S$ , on obtient :  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . □

## II.2. Technique de télescope

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels.

$$(u_n) \text{ converge} \Leftrightarrow \sum (u_{n+1} - u_n) \text{ converge}$$

$\hookrightarrow$  Application du télescope : savoir montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$  est divergente.

*Démonstration.*

Notons  $v_n$  le terme général de cette série. Pour tout  $n \geq 1$  :

$$v_n = \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \ln \left( \frac{n+1}{n} \right) = \ln(n+1) - \ln n$$

Ainsi, la somme partielle d'ordre  $n$  de  $\sum v_n$  est :

$$S_n = \sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \cancel{\ln(1)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

et donc la série  $\sum_{n \geq 1} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$  est divergente. □

## II.3. Calcul direct des sommes partielles

### a) Somme des puissances d'entiers

- Somme des  $n$  premiers entiers

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n k = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \leq n, S_n - S_{m-1} = \sum_{k=m}^n k = \frac{(n-m+1)(m+n)}{2}$$

- Somme des  $n$  premiers carrés d'entiers

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \sum_{k=0}^n k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- Somme des  $n$  premiers cubes d'entiers

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \sum_{k=0}^n k^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = S_n^2$$

## b) Séries géométriques et séries géométriques dérivées (première et deuxième)

Soit  $q \in \mathbb{R}$ .

$$1) \quad \sum q^n \text{ converge} \Leftrightarrow |q| < 1$$

$$2) \quad \sum_{n \geq 1} n q^{n-1} \text{ converge} \Leftrightarrow |q| < 1$$

$$3) \quad \sum_{n \geq 2} n(n-1) q^{n-2} \text{ converge} \Leftrightarrow |q| < 1$$

De plus, si  $|q| < 1$ , on obtient les sommes suivantes.

$$a. \quad \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

$$b. \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

$$c. \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

## c) Série exponentielle

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la série  $\sum \frac{x^n}{n!}$  converge et :  $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :  $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$

## II.4. Les séries de Riemann

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On a alors :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

## II.5. Comparaison séries / intégrales (démonstration exigible)

On considère une fonction  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[0, +\infty[$ .

On suppose de plus que  $f$  est décroissante sur  $[0, +\infty[$ . Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq f(k-1)$$

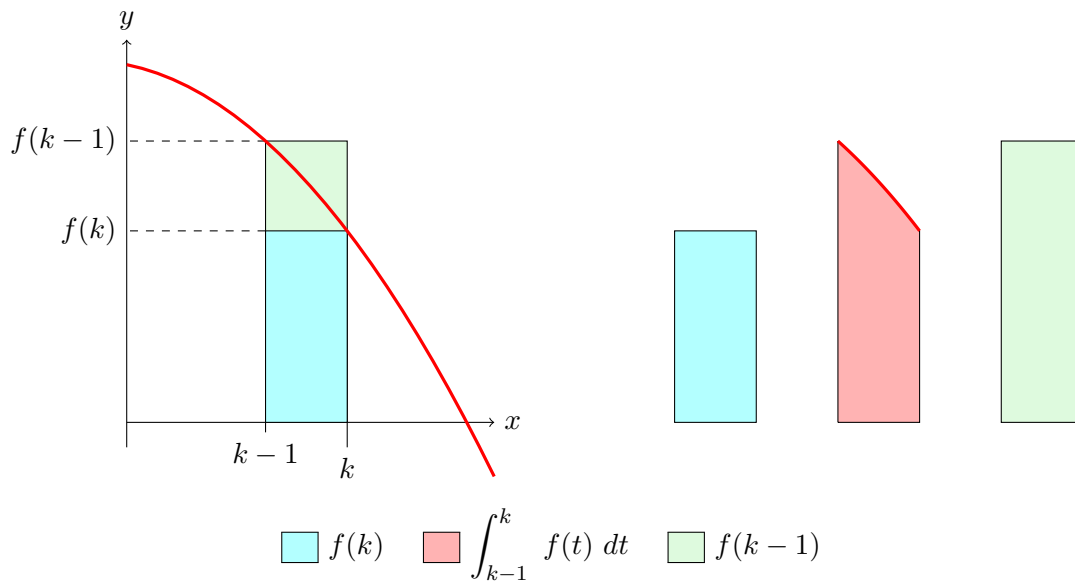
On en déduit, par sommation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k-1)$$

$$\text{Enfin : } \sum_{k=1}^n f(k) = S_n - f(0) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n f(k-1) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) = S_{n-1}.$$

(il faut être prudent lors de la sommation : pour quels entiers  $k$  peut-on sommer ?)

## Représentation graphique



*Démonstration.*

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

- Soit  $t \in [k-1, k]$ .

$$\text{Comme } k-1 \leq t \leq k$$

$$\text{alors } f(k-1) \geq f(t) \geq f(k) \quad (\text{par décroissance de la fonction } f \text{ sur } [0, +\infty[)$$

- La fonction  $f$  est continue sur le **segment**  $[k-1, k]$ .

On en déduit que l'intégrale  $\int_{k-1}^k f(t) dt$  est bien définie.

De plus, par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ( $k-1 \leq k$ ) :

$$\int_{k-1}^k f(k-1) dt \geq \int_{k-1}^k f(t) dt \geq \int_{k-1}^k f(k) dt$$

||
||

$$(k - (k-1)) f(k-1) \qquad \qquad \qquad (k - (k-1)) f(k)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq f(k-1)$$

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On obtient, par sommation des inégalités précédentes :

$$\sum_{k=1}^n f(k) \leq \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k-1)$$

||

$$\int_0^n f(t) dt \quad (\text{d'après la relation de Chasles})$$

$$\text{Enfin : } \sum_{k=1}^n f(k) = S_n - f(0) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n f(k-1) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) = S_{n-1}.$$

□

## II.6. Séries à termes positifs

### a) Les résultats fondamentaux

Soit  $\sum u_n$  une série et  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des sommes partielles associée.

$$(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0) \Rightarrow (S_n) \text{ est croissante}$$

Ainsi, si  $\sum u_n$  est une série à termes positifs ( $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ ), on a :

1)  $(S_n) \text{ est majorée} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}$

2)  $(S_n) \text{ non majorée} \Rightarrow S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$

### b) Critère de comparaison des séries à termes positifs

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs.

Supposons :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$

Alors 1)  $\sum v_n \text{ converge} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}$

2)  $\sum u_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum v_n \text{ diverge}$

↔ Application (deux types d'utilisation différents) :

1) savoir montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est divergente (*sans utiliser le critère de Riemann!*).

$$\times \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}.$$

× La série  $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  est divergente.

(on peut le montrer à l'aide de la technique de télescopage)

Ainsi, par le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est divergente.

2) savoir montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$  est convergente.

$$\times \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \leq \frac{1}{n^2}.$$

× La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann d'exposant 2 ( $> 1$ ).

Elle est donc convergente.

Ainsi, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série  $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$  est convergente.

On a utilisé l'inégalité :  $\forall x > 0, 0 \leq \ln(1+x) \leq x$  (*concavité de la fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$* )

en  $x = \frac{1}{n} > 0$  et en  $x = \frac{1}{n^2} > 0$ .

## c) Critère de négligeabilité des séries à termes positifs

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0, \text{ et } v_n \geq 0 \\ \bullet u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ \bullet \sum v_n \text{ converge} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

↪ Application : démontrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^3}$  est convergente.

×  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\ln(n)}{n^3} \geq 0$  et  $\frac{1}{n^2} \geq 0$ .

×  $\frac{\ln(n)}{n^3} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$  (on le démontre en formant le quotient !).

× La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann d'exposant 2 ( $> 1$ ).

Elle est donc convergente.

Ainsi, par le critère de négligeabilité des séries à termes positifs, la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^3}$  est convergente.

## d) Critère d'équivalence des séries à termes positifs

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs.

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n (\geq 0) \Rightarrow \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature}$$

↪ Application : démontrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  est divergente.

×  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \geq 0$ .

×  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ .

× La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est une série de Riemann d'exposant 1 ( $\not> 1$ ).

Elle est donc divergente.

Ainsi, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série  $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  est divergente.

## II.7. Notion de convergence absolue

• La série  $\sum u_n$  est dite **absolument convergente** si la série  $\sum |u_n|$  est convergente.

1)  $\sum u_n$  est absolument convergente  $\Rightarrow \sum u_n$  est convergente

2) Dans le cas de la convergence, on a de plus :

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

(extension de l'inégalité triangulaire)

### III. Résumé : comment réaliser l'étude d'une série (EXO)

MÉTHODO
---------

#### Étude de séries

Afin de déterminer la nature d'une série  $\sum u_n$ , on pourra penser à utiliser l'une des techniques listées ci-dessous.

#### 1) Étude de la suite $(u_n)$

- a) Si  $u_n \not\rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ , la série  $\sum u_n$  diverge grossièrement donc diverge.
- b) Si  $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ , la série  $\sum u_n$  ne diverge pas grossièrement.

La série  $\sum u_n$  peut être divergente ou convergente.  
(une étude plus précise doit être réalisée)

C'est une première étude de la « taille » du terme général  $u_n$  de la série  $\sum u_n$  étudiée.

#### 2) Si $\sum u_n$ est à termes positifs (i.e. si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ )

On dispose des trois outils suivants.

- a) Théorème de comparaison des séries à termes positifs.
- b) Théorème d'équivalence des séries à termes positifs.
- c) Théorème de négligeabilité des séries à termes positifs.

On estime ici plus précisément la « taille » du terme général  $u_n$  de la série  $\sum u_n$  étudiée. Pour ce faire, on compare  $u_n$  au terme général  $v_n$  d'une série de référence.

(on pensera notamment à des séries de terme général  $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$  dont la nature est donnée par le critère de Riemann)

**Note** : si  $\sum u_n$  est à termes négatifs, on étudie  $\sum -u_n$  qui est de même nature que  $\sum u_n$ .

#### 3) Si $\sum u_n$ « quelconque » ( $\sum u_n$ à termes de signe non constant)

On pourra penser à l'une de ces méthodes.

- a) Démontrer de la convergence absolue (comme  $|u_n| \geq 0$ , les techniques du 2) utilisables)
- Si  $\sum |u_n|$  est convergente (i.e.  $\sum u_n$  absolument convergente) alors  $\sum u_n$  est convergente.
  - Si  $\sum |u_n|$  est divergente alors  $\sum u_n$  peut être divergente ou convergente.  
(une étude plus précise doit être réalisée)
- b) On revient à la définition : la série  $\sum u_n$  est convergente si la suite  $(S_n)$  est convergente.
- On peut calculer  $S_n$  :
    - × en reconnaissant des séries usuelles (notamment les séries géométriques et géométriques dérivées premières / deuxième, la série exponentielle).
    - × en reconnaissant une somme télescopique.
  - On peut estimer  $S_n$  à l'aide d'une inégalité telle que celle fournie par une comparaison séries / intégrales.

Évidemment, les techniques du 3)b) restent utilisables pour une série à termes positifs.

**Résumé des séries rencontrées***(avoir une idée de comment on détermine la nature de ces séries)*

$\sum u_n$	Nature de $\sum u_n$
$\sum n^3$	$\sum n^3$ diverge (grossièrement)
$\sum n^2$	$\sum n^2$ diverge (grossièrement)
$\sum n$	$\sum n$ diverge (grossièrement)
$\sum 1$	$\sum 1$ diverge (grossièrement)
$\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$	$\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge
$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$	$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge
$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$	$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge
$\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$	$\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ converge
$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$	$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$
$\sum q^n$	$\sum_{n \geq 0} q^n$ converge $\Leftrightarrow  q  < 1$
$\sum_{n \geq 1} n q^{n-1}$	$\sum_{n \geq 1} n q^{n-1}$ converge $\Leftrightarrow  q  < 1$
$\sum_{n \geq 2} n(n-1) q^{n-2}$	$\sum_{n \geq 2} n(n-1) q^{n-2}$ converge $\Leftrightarrow  q  < 1$
$\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$	$\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge
$\sum \frac{\ln(n)}{2^n}$	$\sum_{n \geq 0} \frac{\ln(n)}{2^n}$ converge
$\sum e^{-n}$	$\sum_{n \geq 0} e^{-n}$ converge
$\sum \frac{x^n}{n!}$	$\sum \frac{x^n}{n!}$ converge (pour tout $x \in \mathbb{R}$ )
$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$	$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais n'est pas absolument convergente
$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$	$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est (absolument) convergente



## Informations concernant cette semaine de colles

### Questions de cours

Les questions de cours pour cette semaine sont les suivantes :

- propriété de recouvrement. Énoncé et démonstration.
- une suite croissante et convergente vers une limite  $\ell \in \mathbb{R}$  est majorée par  $\ell$ . Énoncé et démonstration.
- propriétés de la relation  $\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim}$ . Énoncé et démonstration.

### Exercices types

Les compétences attendues cette semaine sont les suivantes :

- savoir démontrer qu'une série est (grossièrement) divergente.
- savoir faire l'étude d'une série en revenant à la définition et donc à l'étude de la suite des sommes partielles associées.
- savoir effectuer le calcul des sommes partielles dans le cas des séries usuelles.
- savoir démontrer la nature d'une série dont le terme général se présente (éventuellement de manière cachée) sous la forme  $u_{n+1} - u_n$  (technique de télescopage).
- savoir déterminer la nature d'une série à termes positifs à l'aide des critères de comparaison, d'équivalence, de négligeabilité. La comparaison s'effectue à l'aide des séries de référence, notamment les séries de Riemann.
- savoir démontrer qu'une série est (absolument) convergente.

Les exercices sur les séries peuvent donner lieu à des questions **Scilab**.

Toutes les questions sur les suites peuvent être demandées puisqu'une série  $\sum u_n$  n'est rien d'autre que la suite des sommes partielles  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Il faut en particulier savoir calculer une somme à l'aide d'une structure itérative (boucle **for**).