Colles

semaine 6 : 04 octobre - 09 octobre

I. Notion de séries à termes réels (COURS)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

- On appelle **série de terme général** u_n et on note $\sum u_n$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général S_n est défini par : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
- La suite (S_n) est appelée **suite des sommes partielles** associée à $\sum u_n$.
  Son terme général S_n est appelé **somme partielle d'ordre** n associée à $\sum u_n$.
- On dit que la série $\sum u_n$ est **convergente** si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
- On dit que la série $\sum u_n$ est **divergente** si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.
- Lorsque $\sum u_n$ converge, la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **somme de la série** et est (souvent) notée S. On a alors :

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$$

- Déterminer la **nature** d'une série, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.

II. Méthode pour déterminer la nature d'une série (EXO)

II.1. Une condition $\boxed{\text{NÉCESSAIRE}}$ de convergence *(démonstration exigible)*

Soit (u_n) une suite de réels.

- Pour qu'une série converge, il **faut** que son terme général tende vers 0 :

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

- Cette condition est nécessaire mais pas suffisante.
  Autrement dit, on peut trouver une suite (u_n) telle que :
  × $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
  × $\sum u_n$ divergente.
  ☞ Par exemple, $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est divergente.
- On dit que la série $\sum u_n$ est **grossièrement divergente** si son terme général u_n est tel que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$. Une série grossièrement divergente est divergente :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad \sum u_n \text{ diverge}}$$

Démonstration.
Supposons que la série $\sum u_n$ converge.
Ainsi, la suite (S_n) est convergente vers un réel $S \in \mathbb{R}$. Or, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

Comme $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$ et $S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$, on obtient : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

II.2. Technique de télescopage

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

$$\boxed{(u_n) \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \sum (u_{n+1} - u_n) \text{ converge}}$$

↪ Application du télescopage : savoir montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ est divergente.

Démonstration.
Notons v_n le terme général de cette série. Pour tout $n \geqslant 1$:

$$v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$$

Ainsi, la somme partielle d'ordre n de $\sum v_n$ est :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \cancel{\ln(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ est divergente. □

II.3. Calcul direct des sommes partielles

a) Somme des puissances d'entiers

- Somme des n premiers entiers

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \leqslant n,\ S_n - S_{m-1} = \boxed{\sum_{k=m}^{n} k = \frac{(n-m+1)(m+n)}{2}}$$

- Somme des n premiers carrés d'entiers

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

- Somme des n premiers cubes d'entiers

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = \sum_{k=0}^{n} k^3 = \boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}} = {S_n}^2$$

***b)* Séries géométriques et séries géométriques dérivées (première et deuxième)**

Soit $q \in \mathbb{R}$.

1) $\boxed{\sum q^n \text{ converge } \Leftrightarrow |q| < 1}$

2) $\boxed{\sum\limits_{n \geqslant 1} n\, q^{n-1} \text{ converge } \Leftrightarrow |q| < 1}$

3) $\boxed{\sum\limits_{n \geqslant 2} n(n-1)\, q^{n-2} \text{ converge } \Leftrightarrow |q| < 1}$

De plus, si $|q| < 1$, on obtient les sommes suivantes.

a. $\boxed{\sum\limits_{k=0}^{+\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q}}$

b. $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\, q^{k-1} = \dfrac{1}{(1-q)^2}}$

c. $\boxed{\sum\limits_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\, q^{k-2} = \dfrac{2}{(1-q)^3}}$

***c)* Série exponentielle**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge et : $\boxed{\mathrm{e}^x = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k!}}$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^x$

II.4. Les séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 1}$$

II.5. Comparaison séries / intégrales *(démonstration exigible)*

On considère une fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue sur $[0, +\infty[$.
On suppose de plus que f est décroissante sur $[0, +\infty[$. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \boxed{f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt \leqslant f(k-1)}$$

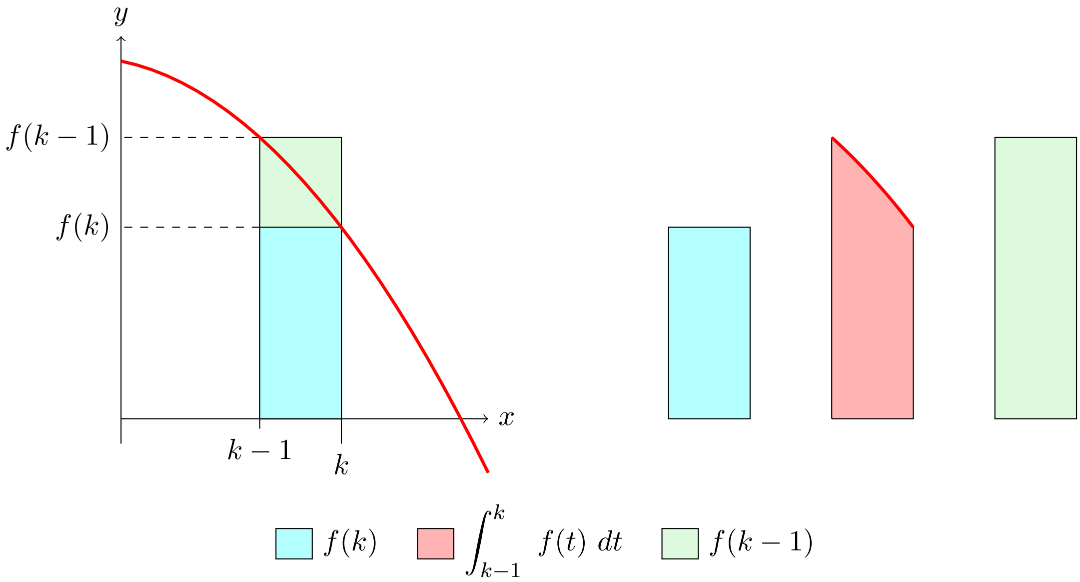
On en déduit, par sommation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \boxed{\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_{0}^{n} f(t)\, dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k-1)}$$

Enfin : $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) = S_n - f(0)$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k-1) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(k) = S_{n-1}$.

(il faut être prudent lors de la sommation : pour quels entiers k peut-on sommer ?)

Représentation graphique



Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $t \in [k-1, k]$.

$$\begin{array}{lcccccl} \text{Comme} & k-1 & \leqslant & t & \leqslant & k & \\ \text{alors} & f(k-1) & \geqslant & f(t) & \geqslant & f(k) & \textit{(par décroissance de la fonction } f \textit{ sur } [0,+\infty[) \end{array}$$

- La fonction f est continue sur le **segment** $[k-1, k]$.
  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\, dt$ est bien définie.
  De plus, par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant $(k-1 \leqslant k)$:

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(k-1)\, dt & \geqslant & \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\, dt & \geqslant & \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(k)\, dt \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ \big(k-(k-1)\big)\ f(k-1) & & & & \big(k-(k-1)\big)\ f(k) \end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(k) \ \leqslant\ \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt \ \leqslant\ f(k-1)}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient, par sommation des inégalités précédentes :

$$\begin{array}{ccccl} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k-1) \\ & & \shortparallel & & \\ & & \displaystyle\int_{0}^{n} f(t)\, dt & & \textit{(d'après la relation de Chasles)} \end{array}$$

  Enfin : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) = S_n - f(0)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k-1) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) = S_{n-1}$.

□

II.6. Séries à termes positifs

a) Les résultats fondamentaux

Soit $\sum u_n$ une série et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associée.

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0) \quad \Rightarrow \quad (S_n) \text{ est croissante}}$$

Ainsi, si $\sum u_n$ est une série <u>à termes positifs</u> ($\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$), on a :

1) $\boxed{(S_n) \text{ est majorée } \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}}$

2) $\boxed{(S_n) \text{ non majorée } \Rightarrow S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$

b) Critère de comparaison des séries à termes positifs

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries <u>à termes positifs</u>.

Supposons : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$

Alors *1)* $\sum v_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum u_n$ converge

2) $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum v_n$ diverge

$\hookrightarrow$ Application (deux types d'utilisation différents) :

1) savoir montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est divergente *(sans utiliser le critère de Riemann !)*.

× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \ \leqslant \ \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \ \leqslant \ \dfrac{1}{n}$.

× La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ est divergente.
(on peut le montrer à l'aide de la technique de télescopage)

Ainsi, par le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est divergente.

2) savoir montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$ est convergente.

× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \ \leqslant \ \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) \ \leqslant \ \dfrac{1}{n^2}$.

× La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est est une série de Riemann d'exposant 2 (> 1).
Elle est donc convergente.

Ainsi, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$ est convergente.

On a utilisé l'inégalité : $\boxed{\forall x > 0,\ 0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x}$ *(concavité de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$)* en $x = \frac{1}{n} > 0$ et en $x = \frac{1}{n^2} > 0$.

c) Critère de négligeabilité des séries à termes positifs

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0, \text{ et } v_n \geqslant 0 \\ \bullet\ u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \\ \bullet\ \sum v_n \text{ converge} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

$\hookrightarrow$ Application : démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{n^3}$ est convergente.

× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\ln(n)}{n^3} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$.

× $\dfrac{\ln(n)}{n^3} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ *(on le démontre en formant le quotient !).*

× La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est est une série de Riemann d'exposant 2 (> 1).
Elle est donc convergente.

Ainsi, par le critère de négligeabilité des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{n^3}$ est convergente.

d) Critère d'équivalence des séries à termes positifs

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n\ (\geqslant 0) \quad \Rightarrow \quad \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature}$$

$\hookrightarrow$ Application : démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ est divergente.

× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} \geqslant 0$.

× $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

× La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est est une série de Riemann d'exposant 1 ($\not> 1$).
Elle est donc divergente.

Ainsi, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ est divergente.

II.7. Notion de convergence absolue

- La série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

1) $\sum u_n$ est absolument convergente $\Rightarrow$ $\sum u_n$ est convergente

2) Dans le cas de la convergence, on a de plus : $\left| \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{+\infty} |u_k|$

(extension de l'inégalité triangulaire)

III. Résumé : comment réaliser l'étude d'une série (EXO)

MÉTHODO **Étude de séries**

Afin de déterminer la nature d'une série $\sum u_n$, on pourra penser à utiliser l'une des techniques listées ci-dessous.

1) Étude de la suite (u_n)

a) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement donc diverge.

b) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, la série $\sum u_n$ ne diverge pas grossièrement.

La série $\sum u_n$ peut être divergente ou convergente.
(une étude plus précise doit être réalisée)

C'est une première étude de la « taille » du terme général u_n de la série $\sum u_n$ étudiée.

2) Si $\sum u_n$ est à termes positifs (*i.e.* si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$)

On dispose des trois outils suivants.

a) Théorème de comparaison des séries à termes positifs.

b) Théorème d'équivalence des séries à termes positifs.

c) Théorème de négligeabilité des séries à termes positifs.

On estime ici plus précisément la « taille » du terme général u_n de la série $\sum u_n$ étudiée.
Pour ce faire, on compare u_n au terme général v_n d'une série de référence.
(on pensera notamment à des séries de terme général $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ *dont la nature est donnée par le critère de Riemann)*

Note : si $\sum u_n$ est à termes négatifs, on étudie $\sum -u_n$ qui est de même nature que $\sum u_n$.

3) Si $\sum u_n$ « quelconque » ($\sum u_n$ à termes de signe non constant)

On pourra penser à l'une de ces méthodes.

a) Démontrer de la convergence absolue (comme $|u_n| \geqslant 0$, les techniques du ***2)*** utilisables)

- Si $\sum |u_n|$ est convergente (*i.e.* $\sum u_n$ absolument convergente) alors $\sum u_n$ est convergente.
- Si $\sum |u_n|$ est divergente alors $\sum u_n$ peut être divergente ou convergente.
  (une étude plus précise doit être réalisée)

b) On revient à la définition : la série $\sum u_n$ est convergente si la suite (S_n) est convergente.

- On peut calculer S_n :
  × en reconnaissant des séries usuelles (notamment les séries géométriques et géométriques dérivées premières / deuxième, la série exponentielle).
  × en reconnaissant une somme télescopique.
- On peut estimer S_n à l'aide d'une inégalité telle que celle fournie par une comparaison séries / intégrales.

Évidemment, les techniques du ***3)b)*** restent utilisables pour une série à termes positifs.

Résumé des séries rencontrées
(avoir une idée de comment on détermine la nature de ces séries)

$\sum u_n$	Nature de $\sum u_n$
$\sum n^3$	$\sum n^3$ diverge (grossièrement)
$\sum n^2$	$\sum n^2$ diverge (grossièrement)
$\sum n$	$\sum n$ diverge (grossièrement)
$\sum 1$	$\sum 1$ diverge (grossièrement)
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ converge
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$
$\sum q^n$	$\sum\limits_{n\geqslant 0} q^n$ converge $\Leftrightarrow$ $\lvert q\rvert < 1$
$\sum\limits_{n\geqslant 1} n\, q^{n-1}$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} n\, q^{n-1}$ converge $\Leftrightarrow$ $\lvert q\rvert < 1$
$\sum\limits_{n\geqslant 2} n(n-1)\, q^{n-2}$	$\sum\limits_{n\geqslant 2} n(n-1)\, q^{n-2}$ converge $\Leftrightarrow$ $\lvert q\rvert < 1$
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge
$\sum \frac{\ln(n)}{2^n}$	$\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{\ln(n)}{2^n}$ converge
$\sum \mathrm{e}^{-n}$	$\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-n}$ converge
$\sum \frac{x^n}{n!}$	$\sum \frac{x^n}{n!}$ converge (pour tout $x \in \mathbb{R}$)
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais n'est pas absolument convergente
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est (absolument) convergente

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

Les questions de cours pour cette semaine se trouvent dans le document « programme_6_B.pdf ».

Exercices types

Les compétences attendues cette semaine sont les suivantes :

- savoir démontrer qu'une série est (grossièrement) divergente.
- savoir faire l'étude d'une série en revenant à la définition et donc à l'étude de la suite des sommes partielles associées.
- savoir effectuer le calcul des sommes partielles dans le cas des séries usuelles.
- savoir démontrer la nature d'une série dont le terme général général se présente (éventuellement de manière cachée) sous la forme $u_{n+1} - u_n$ (technique de télescopage).
- savoir déterminer la nature d'une série à termes positifs à l'aide des critères de comparaison, d'équivalence, de négligeabilité. La comparaison s'effectue à l'aide des séries de référence, notamment les séries de Riemann.
- savoir démontrer qu'une série est (absolument) convergente.

Les exercices sur les séries peuvent donner lieu à des questions **Scilab**.
Toutes les questions sur les suites peuvent être demandées puisqu'une série $\sum u_n$ n'est rien d'autre que la suite des sommes partielles $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Il faut en particulier savoir calculer une somme à l'aide d'une structure itérative (boucle `for`).