

Colles

semaine 6 : 04 octobre - 09 octobre

I. Structure vectorielle (COURS)

I.1. Notion de loi de composition / d'espace vectoriel

1) Loi de composition interne, loi de composition externe

Soit E un ensemble non vide.

- Une **loi de composition interne** \top sur l'ensemble E est une application $\top : E \times E \rightarrow E$. Ainsi : $\forall (x, y) \in E^2, x \top y \in E$.
- Une **loi de composition externe** $*$ sur l'ensemble E est une application $*$: $\mathbb{R} \times E \rightarrow E$. Ainsi : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \lambda * x \in E$.

2) Espace vectoriel

Un ensemble non vide E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} (ou \mathbb{R} -espace vectoriel) si :

1) E est muni d'une loi de composition interne notée $+$: $E \times E \rightarrow E$ qui vérifie les propriétés suivantes.

- a) $\forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x$ (commutativité)
- b) $\forall (x, y, z) \in E^3, x + (y + z) = (x + y) + z$ (associativité)
- c) $\exists 0_E \in E, \forall x \in E, x + 0_E = 0_E + x = x$ (élément neutre)
- d) $\forall x \in E, \exists y \in E, x + y = y + x = 0_E$ (y opposé de x)

2) E est muni d'une loi de composition externe notée \cdot : $\mathbb{R} \times E \rightarrow E$ qui vérifie les propriétés suivantes.

- a) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
(la loi \cdot est distributive à gauche par rapport à la loi $+$ de E)
- b) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in E^2, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
(la loi \cdot est distributive à droite par rapport à « la » loi $+$)
- c) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E, (\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$
(associativité mixte)
- d) $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$

Vocabulaire :

- × les éléments de E sont appelés **vecteurs**.
- × on pourra noter les vecteurs à l'aide d'une flèche x .
- × on parle parfois de **multiplication par un scalaire** pour désigner la loi \cdot
(les réels λ participant à la multiplication externe sont appelés des **scalaires**)

Espaces vectoriels de référence :

$\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \mathcal{F}(D, \mathbb{R}), \mathbb{R}[X], \mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont des espaces vectoriels.

On retiendra que les lois $+$ et \cdot vérifient les propriétés qui permettent les manipulations algébriques raisonnables des vecteurs.

I.2. Combinaison linéaire

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $m \in \mathbb{N}^*$.

Soit (u_1, \dots, u_m) une **famille** de vecteurs de E .

- Un vecteur $v \in E$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs u_1, \dots, u_m s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$v = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \dots + \lambda_m \cdot u_m$$

II. Sous-espaces vectoriels (COURS)

II.1. Définition

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni des lois $+$ et \cdot .

- Une partie non vide F de E est un **sous-espace vectoriel** de E si :

$$\mathbf{a)} \quad \forall (x, y) \in F^2, \quad x + y \in F \quad (F \text{ est stable pour la loi } +)$$

$$\mathbf{b)} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in F, \quad \lambda \cdot x \in F \quad (F \text{ est stable pour la loi } \cdot)$$

(F est stable par combinaison linéaire d'éléments de F)

- On pourra éventuellement utiliser l'une des deux caractérisations suivantes.

F est un sous-espace vectoriel de E

$$\Leftrightarrow \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$$

$$\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda \cdot x + y \in F$$

(on évitera d'utiliser la 2^{ème} caractérisation : elle introduit une dissymétrie des rôles de x et y qui n'a pas lieu d'être)

Propriété

- Un sev F de E est non vide. En particulier, il contient toujours 0_E .
- La contraposée de cet énoncé peut permettre de démontrer que F n'est pas un sev de E .

$$0_E \notin F \Rightarrow F \text{ n'est pas un sev de } E$$

II.2. Démontrer qu'un ensemble F est un ev (EXO)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel.

$$F \text{ sous-espace vectoriel de } E \Rightarrow F \text{ est un espace vectoriel}$$

MÉTHODO

Démontrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel

Afin de montrer que F est un ev, il existe plusieurs possibilités.

1) Vérifier tous les axiomes d'espace vectoriel.

(en pratique, on ne le fait jamais - on estime que cela a été fait pour les ev de référence)

2) Démontrer que F est un sev d'un ev E de référence.

Démontrons que F est un sev d'un ev E .

(i) $F \subseteq E$

(ii) $F \neq \emptyset$. En effet, $0_E \in F$ car ...

(si ce n'est pas le cas, F n'est pas un sev de E !)

(iii) Démontrons que F est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Soit $(u, v) \in F^2$.

• Comme $u \in F$, u s'écrit ... et vérifie ...

(l'appartenance de u à E lui confère une écriture particulière

l'appartenance de u à F fait que u vérifie la propriété définissant F)

• Comme $v \in F$, v s'écrit ... et vérifie ...

On a alors : $\lambda \cdot u + \mu \cdot v = \dots$

(on réalise la somme des vecteurs $\lambda \cdot u$ et $\mu \cdot v$ à l'aide de la loi $+$ définie sur E)

Or : ...

(on vérifie que $\lambda \cdot u + \mu \cdot v$ vérifie la propriété définissant F)

Et ainsi $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.

Le point (iii) peut être démontré en deux temps : (iii) stabilité de F par la loi $+$ et (iv) stabilité de F par la loi \cdot .

(iii) Démontrons que F est stable par la loi $+$.

Soit $(u, v) \in F^2$.

• Comme $u \in F$, u s'écrit ... et vérifie ...

(l'appartenance de u à E lui confère une écriture particulière

l'appartenance de u à F fait que u vérifie les propriétés définissant F)

• Comme $v \in F$, v s'écrit ... et vérifie ...

On a alors : $u + v = \dots$

(on réalise la somme des vecteurs u et v à l'aide de la loi $+$ définie sur E)

Or : ... *(on vérifie que $u + v$ vérifie la propriété définissant F)*

Et ainsi $u + v \in F$.

(iv) Démontrons que F est stable par la loi \cdot .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $u \in F$.

• Comme $u \in F$, u s'écrit ... et vérifie ...

(l'appartenance de u à E lui confère une écriture particulière

l'appartenance de u à F fait que u vérifie les propriétés définissant F)

On a alors : $\lambda \cdot u = \dots$

Or : ... *(on vérifie que $\lambda \cdot u$ vérifie la propriété définissant F)*

Et ainsi $\lambda \cdot u \in F$.

3) Montrer que F s'écrit sous la forme $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$ où \mathcal{F} est une famille finie d'éléments de E .

C'est la méthode à préconiser en pratique. Elle présente l'avantage d'exhiber une famille \mathcal{F} génératrice de F . Si de plus \mathcal{F} est une famille libre, alors \mathcal{F} une base de F .

Le colleur pourra demander que soit présentée la 2^{ème} ou 3^{ème} méthode.

Illustration sur des exemples (EX0)

Voici le type d'exercices qu'il faut savoir résoudre à l'aide des 2 méthodes précédentes.

1) Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0 \right\}$ est un ev.

2) Montrer que l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un ev.

3) Montrer que $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$ est un ev.

4) Montrer que $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)\}$ est un ev.

5) Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 2P(1)\}$ est un ev.

Pour les questions 1) et 2) on exhibera en priorité une famille génératrice de F ($F = \text{Vect}(\mathcal{F})$). Pour 3), 4) et 5) on privilégiera la méthode consistant à démontrer que F est un sous-ensemble non vide, stable par combinaisons linéaires, d'un ev de référence.

Exemple

Traitions les questions 1) et 3) afin de mettre en avant la rédaction attendue.

1) Démontrons que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0 \right\}$ est un sev de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(i) $F \subseteq \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(ii) $F \neq \emptyset$. En effet, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$ puisque : $3 \times 0 + 2 \times 0 - 0 = 0$.

(iii) Démontrons que F est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Soit $(X, Y) \in F^2$.

• Comme $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il existe $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$.

Comme $X \in F$, alors : $3x_1 + 2y_1 - z_1 = 0$.

• Comme $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il existe $(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que $Y = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

Comme $Y \in F$, alors : $3x_2 + 2y_2 - z_2 = 0$.

On a alors : $\lambda \cdot X + \mu \cdot Y = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix}$.

Or :

$$\begin{aligned} & 3(\lambda x_1 + \mu x_2) + 2(\lambda y_1 + \mu y_2) - (\lambda z_1 + \mu z_2) \\ &= 3\lambda x_1 + 2\lambda y_1 - \lambda z_1 + 3\mu x_2 + 2\mu y_2 - \mu z_2 \\ &= \lambda(3x_1 + 2y_1 - z_1) + \mu(3x_2 + 2y_2 - z_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Et ainsi, $\lambda \cdot X + \mu \cdot Y \in F$.

En réalité, pour ce type d'exemple, il est préférable d'utiliser la méthode 2) (la méthode 1) est donnée au-dessus à titre d'illustration.

1) Démontrons que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0 \right\}$ est un ev.

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z = 3x + 2y \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Ainsi F est un espace vectoriel et $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de F ($F = \text{Vect}(\mathcal{F})$).

3) Démontrons que $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$ est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(i) $F \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par définition.

(ii) $F \neq \emptyset$. En effet, la suite constante nulle est élément de F .

(iii) Démontrons que F est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(u, v) \in F^2$.

- Comme $u \in F$, u est une suite (u_n) qui vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.
En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N} : \lambda u_{n+2} = \lambda u_{n+1} + 2\lambda u_n$.
- Comme $v \in F$, v est une suite (v_n) qui vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n$.
En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N} : \mu v_{n+2} = \mu v_{n+1} + 2\mu v_n$.

On a alors : $\lambda \cdot u + \mu \cdot v = (\lambda u_n + \mu v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} &\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} \\ &= \lambda (u_{n+1} + 2u_n) + \mu (v_{n+1} + 2v_n) \\ &= (\lambda u_{n+1} + 2\lambda u_n) + (\mu v_{n+1} + 2\mu v_n) \\ &= (\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + 2(\lambda u_n + \mu v_n) \\ &= w_{n+1} + w_n \end{aligned}$$

Et ainsi $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.

II.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie (COURS)

1) Définition

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Soit A une partie non vide de E ($A \subseteq E$).

- On appelle **sous-espace vectoriel engendré par A** et on note $\text{Vect}(A)$ l'ensemble des vecteurs de E qui s'écrivent comme combinaison linéaire (finie) d'éléments de A . Autrement dit :

$$\text{Vect}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot a_i \mid p \in \mathbb{N}^*, (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, (a_1, \dots, a_p) \in A^p \right\}$$

- En particulier, si $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ (i.e. A fini), on a :

$$\text{Vect}(A) = \text{Vect}(a_1, \dots, a_m) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot a_i \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m \right\}$$

(on note $\text{Vect}(a_1, \dots, a_m)$ en lieu et place de $\text{Vect}(\{a_1, \dots, a_m\})$)

Illustration dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- 1) $E = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme :

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Ainsi $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- 2) $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme :

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi F est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- 3) $H = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme :

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

pour $a \in \mathbb{R}$. Ainsi $H = \{a \cdot I_2 \mid a \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des matrices scalaires.

- 4) $K = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme :

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Ainsi K est l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Propriétés de manipulations (démonstration non exigible)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et soit $(a, b, c) \in E^3$.

$$1) \quad \text{Vect}(a, 0_E) = \text{Vect}(a)$$

(de manière générale, on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie en ajoutant 0_E à cette partie)

$$2) \quad \text{Vect}(a, b) = \text{Vect}(b, a)$$

(de manière générale, on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie en modifiant l'ordre des termes de la partie)

$$3) \text{ Pour tout } \lambda \in \mathbb{R}^* : \quad \text{Vect}(\lambda \cdot a, b) = \text{Vect}(a, b)$$

(de manière générale, on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie par multiplication par un scalaire non nul d'un élément de cette partie)

$$4) \text{ Pour tout } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R} : \quad \text{Vect}(a, b, \lambda \cdot a + \mu \cdot b) = \text{Vect}(a, b)$$

(de manière générale, on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie en ajoutant à cette partie un vecteur qui apparaît comme CL d'éléments de cette partie.)

$$5) \text{ Pour tout } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R} : \quad \text{Vect}(a, b, c + (\lambda \cdot a + \mu \cdot b)) = \text{Vect}(a, b, c)$$

(de manière générale, on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie en ajoutant à un vecteur de cette partie une CL des autres vecteurs de cette partie.)

Il faut savoir généraliser ces propriétés dans le cas où la partie contient un nombre fini quelconque d'éléments (« de manière générale » ...).

Exemple

Il faut savoir procéder à des « simplifications » d'une partie A d'un espace vectoriel engendré par A à l'aide de ces propriétés. Par exemple (comprendre chaque étape!) :

$$\begin{aligned} \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$



Il faut lire correctement ces propriétés.

Il ne s'agit **EN AUCUN CAS** de « découper un vecteur ». Plus précisément :

$$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \not\equiv \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Comme vu précédemment, on peut ajouter à un vecteur de la partie A une CL de vecteurs de A sans que cela ne modifie $\text{Vect}(A)$. La famille A étant réduite à un vecteur, l'ajout d'une CL d'éléments de A se traduit par exemple par :

$$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

3) Propriétés théoriques (démon exigible de $\text{Vect}(A)$ sev de E)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Soit A une partie non vide de E .

- 1) $0_E \in \text{Vect}(A)$.
- 2) $A \subseteq \text{Vect}(A)$.
- 3) $A \subseteq B \Rightarrow \text{Vect}(A) \subseteq \text{Vect}(B)$.
- 4) $\text{Vect}(A)$ est un espace vectoriel. (démon exigible uniquement de ce point)

$\text{Vect}(A)$ est même le plus petit sev de E contenant A :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet F \text{ sev de } E \\ \bullet F \supseteq A \end{array} \right\} \Rightarrow F \supseteq \text{Vect}(A)$$

- 5) A est un ev $\Leftrightarrow A = \text{Vect}(A)$.
- 6) On a notamment : $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(A)$.

On peut retenir l'explication informelle suivante (qui fait écho au point 4)).



Lorsqu'on considère l'espace vectoriel engendré par une **partie** A de E , on suppose seulement que A est **une partie non vide de E** . **En aucun cas on ne suppose que A est un espace vectoriel.**

L'ensemble $\text{Vect}(A)$ est le « vectorialisé » de A . Pour créer $\text{Vect}(A)$, l'idée est de partir de l'ensemble A et d'y ajouter tous les éléments permettant d'obtenir une structure vectorielle :

- × pour tout $a \in A$, on ajoute tous les $\lambda \cdot a$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$,
- × on ajoute alors toutes les sommes finies d'éléments du nouvel ensemble créé.

En résumé, partant de A , on ajoute toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A . On obtient ainsi un espace vectoriel : c'est $\text{Vect}(A)$.

Démonstration.

1) Comme $A \neq \emptyset$, on peut considérer un élément $a \in A$.

Le vecteur 0_E s'écrit comme CL d'éléments de A :

$$0_E = 0 \cdot a$$

Ainsi, $0_E \in \text{Vect}(A)$.

(cela correspond à choisir $p = 1$ et $\lambda_1 = 0$ dans la définition)

4) $\text{Vect}(A)$ est bien un sev de E car :

(i) $\text{Vect}(A) \subseteq E$

En effet, les éléments de $\text{Vect}(A)$ sont des combinaisons linéaires d'éléments de A . Comme $A \subset E$, les éléments de $\text{Vect}(A)$ sont des combinaisons linéaires d'éléments de E . Une telle CL est un élément de E car E est stable par CL.

(ii) $\text{Vect}(A) \neq \emptyset$: en effet $0_E \in \text{Vect}(A)$ (d'après la question 1)).

(iii) $\text{Vect}(A)$ est stable par CL (car par définition c'est l'ensemble qui contient toutes les CL d'éléments de A).

Démontrons maintenant que $\text{Vect}(A)$ est le plus petit sev de E contenant A

Soit F un sev de E qui contient A ($F \supseteq A$).

Comme F est un ev, F est stable par CL.

Ainsi, comme F contient A , il contient aussi toutes les CL d'éléments de A .

Autrement dit : $F \supseteq \text{Vect}(A)$.

□

III. Familles génératrices, libres, bases (COURS)

III.1. Familles génératrices

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et soit (e_1, \dots, e_p) une famille de vecteurs de E .

- La famille (e_1, \dots, e_p) est dite **génératrice** de E si :

$$E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$$

Autrement dit, si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de la famille (e_1, \dots, e_p) .

$$(e_1, \dots, e_p) \text{ est une famille génératrice de } E \Leftrightarrow \forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, x = \sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot e_i$$

- Lorsque $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, on dit que la famille (e_1, \dots, e_p) engendre E .
- **Propriété :** (*démo non exigible*)

Soit $v \in E$.

$$\text{La famille } (e_1, \dots, e_p) \text{ est génératrice de } E \Rightarrow \text{La famille } (e_1, \dots, e_p, v) \text{ est génératrice de } E$$

De manière générale, toute famille qui contient une famille génératrice de E est une famille génératrice de E .



Lorsqu'on parle d'une famille génératrice d'un ev E , il faut systématiquement préciser l'ensemble E engendré sans quoi ce qui est écrit n'a pas de sens.

↪ Toute famille est génératrice.

En effet, une famille \mathcal{F} est toujours génératrice ... de l'espace qu'elle engendre !

Autrement dit, \mathcal{F} est toujours génératrice de $\text{Vect}(\mathcal{F})$ (espace vectoriel engendré par \mathcal{F}).

Mais cette information n'a que peu d'intérêt.

III.2. Familles libres, familles liées

1) Relation de dépendance linéaire

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $m \in \mathbb{N}^*$.

Soit (u_1, \dots, u_m) une **famille** de vecteurs de E .

- On dit qu'il existe une **relation de dépendance linéaire** entre (u_1, \dots, u_m) s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \dots + \lambda_m \cdot u_m = 0_E$$

- Cette relation est dite **triviale** si tous les λ_i y apparaissant sont nuls.

2) Notion de famille libre

Soit E un espace vectoriel et soit $m \in \mathbb{N}^*$.

Soit (e_1, \dots, e_m) une famille de vecteurs de E .

- La famille (e_1, \dots, e_m) est dite **libre** si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^n, \quad \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot e_i = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0 \right)$$

- On dit alors que les vecteurs (e_1, \dots, e_m) sont **linéairement indépendants** : la seule relation de dépendance linéaire entre les e_i est la relation triviale.
- Une famille non libre est dite **liée**.
- **Propriété** : (démonstration non exigible)

Toute sous-famille d'une famille libre est elle-même une famille libre.

- **Intérêt des familles libres** : (démonstration non exigible)

Si un vecteur $u \in E$ s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs d'une famille libre (e_1, \dots, e_m) alors cette combinaison linéaire est unique.

MÉTHODO

Démontrer qu'une famille finie \mathcal{F} est une famille libre d'un espace vectoriel E

1) Une famille (u) constituée uniquement d'un vecteur **non nul** de E est libre.

(la famille (0_E) est par contre liée et plus généralement, toute famille contenant 0_E est liée)

2) Une famille (u, v) constituée uniquement de deux vecteurs de E est libre si et seulement si ces deux vecteurs sont non colinéaires.

Pour démontrer la liberté d'une famille contenant trois vecteurs ou plus, on revient à la définition. Illustrons ce dernier cas.

- Démontrons que la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\text{Supposons : } \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

$$\text{Or : } (*) \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_3 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \\ \text{(par remontées successives)} \end{cases}$$

La famille \mathcal{F} est donc libre.

- Démontrons que la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est liée.

Cherchons $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$\text{Or : } (*) \iff \begin{cases} \lambda_1 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} \lambda_1 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} \lambda_1 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 & = & \lambda_3 \\ \lambda_2 & = & -2\lambda_3 \end{cases}$$

Ce système homogène à 3 équations et 3 inconnues n'est pas de Cramer.

Cela signifie qu'il admet d'autres solutions que $(0, 0, 0)$.

En choisissant par exemple $\lambda_3 = 1$, on obtient une relation de dépendance linéaire non triviale entre les trois vecteurs considérés.

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La famille \mathcal{F} est donc liée.

III.3. Bases d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel.

Soit (e_1, \dots, e_n) une famille de vecteurs de E .

- La famille (e_1, \dots, e_n) est une base de E si :
 - 1) c'est une famille génératrice de E .
 - 2) c'est une famille libre.
- Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , tout vecteur $x \in E$ se décompose de manière unique sous forme d'une combinaison linéaire d'éléments de \mathcal{B} .
- Autrement dit : $\forall x \in E, \exists!(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$.
- Les réels (x_1, \dots, x_n) sont les **coordonnées** de x dans la base \mathcal{B} .

Base canonique des espaces vectoriels de référence

• L'espace vectoriel \mathbb{R}^n

Considérons la famille $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, définie par :

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

Cette famille est libre et génératrice de \mathbb{R}^n . C'est donc une base de \mathbb{R}^n .

Ainsi, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$x = \sum_{k=1}^n x_k \cdot e_k$$

où (x_1, x_2, \dots, x_n) est le n -uplet de coordonnées du vecteur x dans la base \mathcal{B}_c .

Attention ! La notation est ici la même pour représenter le vecteur et ses coordonnées :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

• L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Considérons la famille $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, définie par :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cette famille est libre et génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. C'est donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Ainsi, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe un unique n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$X = \sum_{k=1}^n x_k \cdot e_k$$

où (x_1, x_2, \dots, x_n) est le n -uplet de coordonnées du vecteur X dans la base \mathcal{B}_c .

• L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Considérons la famille $\mathcal{B}_c = (E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, où $E_{i,j}$ est définie par :

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} - i$$

|
j

Cette famille est libre et génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. C'est donc une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Ainsi, pour tout $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, il existe une unique séquence $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ telle que :

$$M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j} \cdot E_{i,j}$$

et donc $(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n}, a_{2,1}, \dots, a_{2,n}, \dots, a_{n,1}, \dots, a_{n,n})$ sont les coordonnées de la matrice M dans la base canonique \mathcal{B}_c .

Exemple

- On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Sa base canonique est :

$$\mathcal{B}_c = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B}_c sont $(3, 1, 7, 5)$.

- **L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$**

Considérons la famille $\mathcal{B}_c = (P_0, P_1, P_2, \dots, P_n)$ où pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_i(X) = X^i$. Cette famille est libre et génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique n -uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$P(X) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot X + \dots + a_n \cdot X^n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot X^k$$

où (a_0, a_1, \dots, a_n) est le n -uplet de coordonnées du polynôme P dans la base \mathcal{B}_c .

MÉTHODO**Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée**

Illustrons la méthode sur un exemple.

On considère la base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et on cherche à déterminer les coordonnées

du vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Cherchons $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$\text{Or : } \quad (*) \quad \iff \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \iff \end{matrix} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_3 = 2 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \iff \end{matrix} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 = -4 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

(on intervertit les 2 lignes en cas de pivot nul)

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ \iff \end{matrix} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 = -4 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \iff \end{matrix} \quad \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -4 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Ainsi, le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ a pour coordonnées $(5, -4, 2)$ dans la base \mathcal{B} .

MÉTHODO

Déterminer une base d'un sous-espace propre d'une matrice donnée

La notion de valeur propre et de sous-espace propre n'est pas au programme de cette semaine. Mais il faut dès à présent savoir déterminer le sous-espace propre $E_\lambda(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = \lambda \cdot X\}$ pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une valeur propre λ données (le vocabulaire sera précisé dans le chapitre « Réduction ». Illustrons la méthode sur un exemple.

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminons $E_{-1}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\}$.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{aligned} X \in E_{-1}(A) &\iff (A + I)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -4x + 2y - 2z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ 6x - 3y + 3z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_1}}{\iff} \begin{cases} -4x + 2y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -4x = -2y + 2z \end{cases} \end{aligned}$$

- On obtient alors :

$$\begin{aligned} E_{-1}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

- La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_{-1}(A)$,

× est libre car est constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

C'est donc une base de $E_{-1}(A)$.

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

Les questions de cours pour cette semaine sont les suivantes :

- condition nécessaire de convergence d'une série. Énoncé et démonstration.
- nature de la série de terme général $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Deux démonstrations attendues :
 - × par télescopage,
 - × à l'aide du critère d'équivalence des séries à termes positifs.
- procédé de comparaison séries / intégrales pour une fonction f continue sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur cet intervalle.
Ce résultat n'étant pas dans le programme officiel, on ne peut l'utiliser directement avec comme argument « par théorème de comparaison séries / intégrales ». Il faut donc savoir faire la démonstration pour chaque exercice.
- l'ensemble $\text{Vect}(A)$ engendré par une partie non vide A de E est un sev de E .
 ⇔ **bien comprendre que $\text{Vect}(A)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des CL d'éléments de A .**

Comme la semaine précédente, après la question de cours suivra l'étude de la nature d'une série (on se reporte au programme A pour les techniques à connaître sur les séries).

Exercices types

Les compétences attendues cette semaine sur ce chapitre sont les suivantes :

- savoir procéder à des « simplifications » d'une partie A d'un espace vectoriel engendré par A .
- savoir démontrer qu'un ensemble est (ou n'est pas) un ev.
En particulier, savoir démontrer qu'un ensemble est un sev d'un ev.
- savoir démontrer qu'une famille est libre dans un ev F :
 - × si la famille possède seulement un vecteur.
 - × si la famille possède seulement deux vecteurs.
 - × si la famille possède trois vecteurs ou plus (revenir à la définition).
- savoir démontrer qu'une famille \mathcal{F} est génératrice d'un ev F :
 - × car F s'écrit naturellement sous la forme $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$.
 - × en revenant à la définition c'est à dire en démontrant que tout vecteur de F s'écrit comme CL des vecteurs de la famille \mathcal{F} .
- savoir démontrer qu'une famille est une base d'un ev F :
 - × car elle est libre et génératrice de F .
- savoir calculer les coordonnées d'un vecteur de F dans une base de F .
- connaître les bases canoniques des espaces vectoriels de référence.
(comprendre que *SEULS* les espaces vectoriels de référence ont une base canonique !)
- savoir déterminer le sous-espace propre $E_\lambda(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = \lambda \cdot X\}$ pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une valeur propre λ données. Le vocabulaire de sous-espace propre et de valeur propre est réservé aux cubes.
- savoir résoudre un système d'équations linéaires homogène ou non homogène.
On prendra particulièrement soin à l'écriture des systèmes et on opérera par une application **stricte** de la méthode du pivot de Gauss (les colleurs sont autorisés à exclure de colle -avec attribution de la note 0- tout élève qui opère par substitution).