Colles

semaine 7 : 11 octobre - 16 octobre

I. Structure vectorielle (COURS)

I.1. Notion de loi de composition / d'espace vectoriel

1) Loi de composition interne, loi de composition externe

Soit E un ensemble non vide.

- Une **loi de composition interne** $\top$ sur l'ensemble E est une application $\top : E \times E \to E$. Ainsi : $\forall (x, y) \in E^2,\ x \top y \in E$.
- Une **loi de composition externe** $*$ sur l'ensemble E est une application $* : \mathbb{R} \times E \to E$. Ainsi : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E,\ \lambda * x \in E$.

2) Espace vectoriel

Un ensemble non vide E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel) si :

1) E est muni d'une loi de composition interne notée $+ : E \times E \to E$ qui vérifie les propriétés suivantes.

a) $\forall (x, y) \in E^2,\ x + y = y + x$ *(commutativité)*

b) $\forall (x, y, z) \in E^3,\ x + (y + z) = (x + y) + z$ *(associativité)*

c) $\exists\ 0_E \in E,\ \forall x \in E,\ x + 0_E = 0_E + x = x$ *(élément neutre)*

d) $\forall x \in E, \exists y \in E,\ x + y = y + x = 0_E$ *(y opposé de x)*

2) E est muni d'une loi de composition externe notée $\cdot : \mathbb{R} \times E \to E$ qui vérifie les propriétés suivantes.

a) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E^2,\ \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
(la loi $\cdot$ est distributive à gauche par rapport à la loi $+$ de E)

b) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in E^2,\ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
(la loi $\cdot$ est distributive à droite par rapport à « la » loi $+$)

c) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E,\ (\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$
(associativité mixte)

d) $\forall x \in E,\ 1 \cdot x = x$

Vocabulaire :

× les éléments de E sont appelés **vecteurs**.

× on pourra noter les vecteurs à l'aide d'une flèche $\vec{x}$.

× on parle parfois de **multiplication par un scalaire** pour désigner la loi $\cdot$
(les réels λ participant à la multiplication externe sont appelés des **scalaires***)*

Espaces vectoriels de référence :

$\mathbb{R}^n$, $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont des espaces vectoriels.

On retiendra que les lois $+$ et $\cdot$ vérifient les propriétés qui permettent les manipulations algébriques raisonnables des vecteurs.

I.2. Combinaison linéaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $m \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u_1, \dots, u_m)$ une **famille** de vecteurs de E.

- Un vecteur $v \in E$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $u_1, \dots, u_m$ s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$\boxed{v \ = \ \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \dots + \lambda_m \cdot u_m}$$

II. Sous-espaces vectoriels (COURS)

II.1. Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni des lois $+$ et $\cdot$

- Une partie <u>non vide</u> F de E est un **sous-espace vectoriel** de E si :

a) $\forall (x, y) \in F^2, \ x + y \in F$ *(F est stable pour la loi $+$)*

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in F, \ \lambda \cdot x \in F$ *(F est stable pour la loi $\cdot$)*

(F est stable par combinaison linéaire d'éléments de F)

- On pourra éventuellement utiliser l'une deux caractérisations suivantes.

$$\begin{aligned} & F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \\ \Leftrightarrow \quad & \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \ \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F \\ \Leftrightarrow \quad & \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda \cdot x + y \in F \end{aligned}$$

(on évitera d'utiliser la $2^{\text{ème}}$ caractérisation : elle introduit une dissymétrie des rôles de x et y qui n'a pas lieu d'être)

Propriété

- Un sev F de E est non vide. En particulier, il contient toujours 0_E.
- La contraposée de cet énoncé peut permettre de démontrer que F n'est pas un sev de E.

$$\boxed{0_E \notin F \ \Rightarrow \ F \text{ n'est pas un sev de } E}$$

II.2. Démontrer qu'un ensemble F est un ev (EXO)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

$$\boxed{F \text{ sous-espace vectoriel de } E \quad \Rightarrow \quad F \text{ est un espace vectoriel}}$$

MÉTHODO **Démontrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel**

Afin de montrer que F est un ev, il existe plusieurs possibilités.

1) Vérifier tous les axiomes d'espace vectoriel.
(en pratique, on ne le fait jamais - on estime que cela a été fait pour les ev de référence)

2) Démontrer que F est un sev d'un ev E de référence.

> Démontrons que F est un sev d'un ev E.
>
> ***(i)*** $F \subseteq E$
>
> ***(ii)*** $F \neq \varnothing$. `En effet,` $0_E \in F$ `car ...`
> *(si ce n'est pas le cas, F n'est pas un sev de E !)*
>
> ***(iii)*** Démontrons que F est stable par combinaisons linéaires.
> `Soit` $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
> `Soit` $(u, v) \in F^2$.
> - `Comme` $u \in F$, u `s'écrit ... et vérifie ...`
>   *(l'appartenance de u à E lui confère une écriture particulière*
>   *l'appartenance de u à F fait que u vérifie la propriété définissant F)*
> - `Comme` $v \in F$, v `s'écrit ... et vérifie ...`
>
> `On a alors :` $\lambda \cdot u + \mu \cdot v =$ `...`
> *(on réalise la somme des vecteurs $\lambda \cdot u$ et $\mu \cdot v$ à l'aide de la loi $+$ définie sur E)*
> `Or : ...`
> *(on vérifie que $\lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ vérifie la propriété définissant F)*
> `Et ainsi` $\lambda \cdot u + \lambda \cdot v \in F$.

Le point (iii) peut être démontré en deux temps : (iii) stabilité de F par la loi $+$
et (iv) stabilité de F par la loi $\cdot$

> ***(iii)*** Démontrons que F est stable par la loi $+$.
> `Soit` $(u, v) \in F^2$.
> - `Comme` $u \in F$, u `s'écrit ... et vérifie ...`
>   *(l'appartenance de u à E lui confère une écriture particulière*
>   *l'appartenance de u à F fait que u vérifie les propriétés définissant F)*
> - `Comme` $v \in F$, v `s'écrit ... et vérifie ...`
>
> `On a alors :` $u + v = \dots$
> *(on réalise la somme des vecteurs u et v à l'aide de la loi $+$ définie sur E)*
> `Or :` $\dots$ *(on vérifie que $u + v$ vérifie la propriété définissant F)*
> `Et ainsi` $u + v \in F$.
>
> ***(iv)*** Démontrons que F est stable par la loi $\cdot$.
> `Soit` $\lambda \in \mathbb{R}$ `et soit` $u \in F$.
> - `Comme` $u \in F$, u `s'écrit ... et vérifie ...`
>
> *(l'appartenance de u à E lui confère une écriture particulière*
> *l'appartenance de u à F fait que u vérifie les propriétés définissant F)*
> `On a alors :` $\lambda \cdot u = \dots$
> `Or :` $\dots$ *(on vérifie que $\lambda \cdot u$ vérifie la propriété définissant F)*
> `Et ainsi` $\lambda \cdot u \in F$.

3) Montrer que F s'écrit sous la forme $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ est une famille finie d'éléments de E.

C'est la méthode à préconiser en pratique. Elle présente l'avantage d'exhiber une famille $\mathcal{F}$ génératrice de F. Si de plus $\mathcal{F}$ est une famille libre, alors $\mathcal{F}$ une base de F.

Le colleur pourra demander que soit présentée la $2^{\text{ème}}$ ou $3^{\text{ème}}$ méthode.

Illustration sur des exemples (EXO)

Voici le type d'exercices qu'il faut savoir résoudre à l'aide des 2 méthodes précédentes.

1) Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0 \right\}$ est un ev.

2) Montrer que l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un ev.

3) Montrer que $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$ est un ev.

4) Montrer que $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x)\}$ est un ev.

5) Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 2P(1)\}$ est un ev.

Pour les questions ***1)*** et ***2)*** on exhibera en priorité une famille génératrice de F ($F = \text{Vect}(\mathcal{F})$). Pour ***3)***, ***4)*** et ***5)*** on privilégiera la méthode consistant à démontrer que F est un sous-ensemble non vide, stable par combinaisons linéaires, d'un ev de référence.

Exemple

Traitons les questions ***1)*** et ***3)*** afin de mettre en avant la rédaction attendue.

1) Démontrons que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0 \right\}$ est un sev de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(i) $F \subseteq \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(ii) $F \neq \varnothing$. En effet, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$ puisque : $3 \times 0 + 2 \times 0 - 0 = 0$.

(iii) Démontrons que F est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Soit $(X, Y) \in F^2$.

- Comme $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il existe $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$.

  Comme $X \in F$, alors : $3x_1 + 2y_1 - z_1 = 0$.

- Comme $Y \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il existe $(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que $Y = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

  Comme $Y \in F$, alors : $3x_2 + 2y_2 - z_2 = 0$.

On a alors : $\lambda \cdot X + \mu \cdot Y = \begin{pmatrix} \lambda\, x_1 + \mu\, x_2 \\ \lambda\, y_1 + \mu\, y_2 \\ \lambda\, z_1 + \mu\, z_2 \end{pmatrix}$.

Or :

$$\begin{aligned} & 3\ (\lambda x_1 + \mu x_2) + 2\ (\lambda y_1 + \mu y_2) - (\lambda z_1 + \mu z_2) \\ & 3\,\lambda x_1 + 2\,\lambda y_1 - \lambda z_1 + 3\,\mu x_2 + 2\,\mu y_2 - \mu z_2 \\ = \ & \lambda\ (3\,x_1 + 2\,y_1 - z_1) + \mu\ (3\,x_2 + 2\,y_2 - z_2) \\ = \ & 0 \end{aligned}$$

Et ainsi, $\lambda \cdot X + \mu \cdot Y \in F$.

En réalité, pour ce type d'exemple, il est préférable d'utiliser la méthode ***2)*** (la méthode ***1)*** est donnée au-dessus à titre d'illustration.

1) Démontrons que $F = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0\}$ est un ev.

$$\begin{array}{rcl} F & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0\} \\ & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z = 3x + 2y\} \\ & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3x+2y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \{x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

Ainsi F est un espace vectoriel et $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de F ($F = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$).

3) Démontrons que $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$ est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(i) $F \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par définition.

(ii) $F \neq \varnothing$. En effet, la suite constante nulle est élément de F.

(iii) Démontrons que F est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(u, v) \in F^2$.

- Comme $u \in F$, u est une suite (u_n) qui vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.
  En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\lambda\ u_{n+2} = \lambda\ u_{n+1} + 2\lambda\ u_n$.
- Comme $v \in F$, v est une suite (v_n) qui vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n$.
  En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mu\ v_{n+2} = \mu\ v_{n+1} + 2\mu\ v_n$.

On a alors : $\lambda \cdot u + \mu \cdot v = \big(\lambda\ u_n + \mu\ v_n\big)_{n \in \mathbb{N}}$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{rl} & \lambda\ u_{n+2} + \mu\ v_{n+2} \\ = & \lambda\,(u_{n+1} + 2u_n) + \mu\,(v_{n+1} + 2v_n) \\ = & (\lambda\ u_{n+1} + 2\lambda\ u_n) + (\mu\ v_{n+1} + 2\mu\ v_n) \\ = & (\lambda\ u_{n+1} + \mu\ v_{n+1}) + 2\ (\lambda\ u_n + \mu\ v_n) \\ = & w_{n+1} + w_n \end{array}$$

Et ainsi $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.

II.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie (COURS)

1) Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Soit A une partie <u>non vide</u> de E ($A \subseteq E$).

- On appelle **sous-espace vectoriel engendré par** A et on note $\text{Vect}(A)$ l'ensemble des vecteurs de E qui s'écrivent comme combinaison linéaire (finie) d'éléments de A. Autrement dit :

$$\boxed{\text{Vect}(A) = \{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot a_i \mid p \in \mathbb{N}^*, (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, (a_1, \dots, a_p) \in A^p\}}$$

- En particulier, si $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ (*i.e.* A fini), on a :

$$\boxed{\text{Vect}(A) = \text{Vect}(\ a_1, \dots, a_m) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot a_i \quad | \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m \right\}}$$

(on note $\text{Vect}(a_1, \dots, a_m)$ *en lieu et place de* $\text{Vect}(\{a_1, \dots, a_m\})$*)*

Illustration dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

1) $E = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme :

$$a \cdot \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Ainsi $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2) $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme :

$$a \cdot \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$$

pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi F est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3) $H = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme :

$$a \cdot \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}$$

pour $a \in \mathbb{R}$. Ainsi $H = \{a \cdot I_2 \mid a \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des matrices scalaires.

4) $K = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)$ est l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme :

$$a \cdot \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&c\\c&b\end{pmatrix}$$

pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Ainsi K est l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2) **Propriétés de manipulations** *(démo non exigible)*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $\big(a, b, c\big) \in E^3$.

1) $\boxed{\text{Vect}\,(a, 0_E) = \text{Vect}\,(a)}$

(de manière générale, on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie en ajoutant 0_E à cette partie)

2) $\boxed{\text{Vect}\,(a, b) = \text{Vect}\,(b, a)}$

(de manière générale, on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie en modifiant l'ordre des termes de la partie)

3) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$: $\boxed{\text{Vect}\,(\lambda \cdot a, b) = \text{Vect}\,(a, b)}$

(de manière générale, on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie par multiplication par un scalaire non nul d'un élément de cette partie)

4) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$: $\boxed{\text{Vect}\,(a, b, \lambda \cdot a + \mu \cdot b) = \text{Vect}\,(a, b)}$

(de manière générale, on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie en ajoutant à cette partie un vecteur qui apparaît comme CL d'éléments de cette partie.)

5) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$: $\boxed{\text{Vect}\,(a, b, c + (\lambda \cdot a + \mu \cdot b)) = \text{Vect}\,(a, b, c)}$

(de manière générale, on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie en ajoutant à un vecteur de cette partie une CL des autres vecteurs de cette partie.)

Il faut savoir généraliser ces propriétés dans le cas où la partie contient un nombre fini quelconque d'éléments (« de manière générale » ...).

Exemple

Il faut savoir procéder à des « simplifications » d'une partie A d'un espace vectoriel engendré par A à l'aide de ces propriétés. Par exemple (comprendre chaque étape !) :

$$\begin{aligned}
\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) \\
&= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right) \\
&= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) \\
&= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) \\
&= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) \\
&= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \mathscr{M}_{31}(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

Il faut lire correctement ces propriétés.
Il ne s'agit `EN AUCUN CAS` de « découper un vecteur ». Plus précisément :

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \cancel{=} \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Comme vu précédemment, on peut ajouter à un vecteur de la partie A une CL de vecteurs de A sans que cela ne modifie $\mathrm{Vect}(A)$. La famille A étant réduite à un vecteur, l'ajout d'une CL d'éléments de A se traduit par exemple par :

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}\right)$$

3) Propriétés théoriques *(démo exigible de* $\mathrm{Vect}(A)$ *sev de* E*)*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Soit A une partie <u>non vide</u> de E.

1) $0_E \in \mathrm{Vect}(A)$.

2) $A \subseteq \mathrm{Vect}(A)$.

3) $A \subseteq B \;\Rightarrow\; \mathrm{Vect}(A) \subseteq \mathrm{Vect}(B)$.

4) $\mathrm{Vect}(A)$ est un espace vectoriel. *(démo exigible uniquement de ce point)*

$\mathrm{Vect}(A)$ est même le plus petit sev de E contenant A :

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ F \text{ sev de } E\\ \bullet\ F \supseteq A\end{array}\right\} \Rightarrow\ F \supseteq \mathrm{Vect}(A)$$

5) A est un ev $\Leftrightarrow A = \mathrm{Vect}(A)$.

6) On a notamment : $\mathrm{Vect}(\mathrm{Vect}(A)) = \mathrm{Vect}(A)$.

On peut retenir l'explication informelle suivante (qui fait écho au point *4)*).

Lorsqu'on considère l'espace vectoriel engendré par une **partie** A de E, on suppose seulement que A est **une partie non vide de E**. **En aucun cas on ne suppose que A est un espace vectoriel**.
L'ensemble $\mathrm{Vect}(A)$ est le « vectorialisé » de A. Pour créer $\mathrm{Vect}(A)$, l'idée est de partir de l'ensemble A et d'y ajouter tous les éléments permettant d'obtenir une structure vectorielle :

- × pour tout $a \in A$, on ajoute tous les $\lambda \cdot a$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$,
- × on ajoute alors toutes les sommes finies d'éléments du nouvel ensemble créé.

En résumé, partant de A, on ajoute toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A. On obtient ainsi un espace vectoriel : c'est $\mathrm{Vect}(A)$.

Démonstration.

1) Comme $A \neq \varnothing$, on peut considérer un élément $a \in A$.
Le vecteur 0_E s'écrit comme CL d'éléments de A :

$$0_E = 0 \cdot a$$

Ainsi, $0_E \in \text{Vect}(A)$.
(cela correspond à choisir $p = 1$ et $\lambda_1 = 0$ dans la définition)

4) $\text{Vect}(A)$ est bien un sev de E car :

(i) $\text{Vect}(A) \subseteq E$
En effet, les éléments de $\text{Vect}(A)$ sont des combinaisons linéaires d'éléments de A. Comme $A \subset E$, les éléments de $\text{Vect}(A)$ sont des combinaisons linéaires d'éléments de E. Une telle CL est un élément de E car E est stable par CL.

(ii) $\text{Vect}(A) \neq \varnothing$: en effet $0_E \in \text{Vect}(A)$ (d'après la question ***1)***).

(iii) $\text{Vect}(A)$ est stable par CL (car par définition c'est l'ensemble qui contient toutes les CL d'éléments de A).

Démontrons maintenant que $\text{Vect}(A)$ **est le plus petit sev de** E **contenant** A
Soit F un sev de E qui contient A ($F \supseteq A$).
Comme F est un ev, F est stable par CL.
Ainsi, comme F contient A, il contient aussi toutes les CL d'éléments de A.
Autrement dit : $F \supseteq \text{Vect}(A)$.

□

III. Familles génératrices, libres, bases (COURS)

III.1. Familles génératrices

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.

- La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est dite **génératrice** de E si :

$$E = \text{Vect}\,(e_1, \dots, e_p)$$

Autrement dit, si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de la famille $(e_1, \dots, e_p)$.

$(e_1, \dots, e_p)$ est une famille génératrice de E	$\Leftrightarrow$	$\forall x \in E,\ \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,\ x = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot e_i$

- Lorsque $E = \text{Vect}\,(e_1, \dots, e_p)$, on dit que la famille $(e_1, \dots, e_p)$ engendre E.
- **Propriété :** *(démo non exigible)*

Soit $v \in E$.

La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice de E	$\Rightarrow$	La famille $(e_1, \dots, e_p, v)$ est génératrice de E

De manière générale, toute famille qui contient une famille génératrice de E est une famille génératrice de E.

Lorsqu'on parle d'une famille génératrice d'un ev E, il faut systématiquement préciser l'ensemble E engendré sans quoi ce qui est écrit n'a pas de sens.

$\hookrightarrow$ Toute famille est génératrice.
En effet, une famille $\mathcal{F}$ est toujours génératrice ... de l'espace qu'elle engendre !
Autrement dit, $\mathcal{F}$ est toujours génératrice de $\text{Vect}\,(\mathcal{F})$ (espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$).
Mais cette information n'a que peu d'intérêt.

III.2. Familles libres, familles liées

1) Relation de dépendance linéaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $m \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u_1, \dots, u_m)$ une **famille** de vecteurs de E.

- On dit qu'il existe une **relation de dépendance linéaire** entre $(u_1, \dots, u_m)$ s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \dots + \lambda_m \cdot u_m = 0_E$$

- Cette relation est dite **triviale** si tous les λ_i y apparaissant sont nuls.

2) Notion de famille libre

Soit E un espace vectoriel et soit $m \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(e_1, \dots, e_m)$ une famille de vecteurs de E.

- La famille $(e_1, \dots, e_m)$ est dite **libre** si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^n, \quad \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot e_i = 0_E \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0 \right)$$

- On dit alors que les vecteurs $(e_1, \dots, e_m)$ sont **linéairement indépendants** : la seule relation de dépendance linéaire entre les e_i est la relation triviale.
- Une famille non libre est dite **liée**.
- **Propriété :** *(démo non exigible)*

  Toute sous-famille d'une famille libre est elle-même une famille libre.

- **Intérêt des familles libres :** *(démo non exigible)*

  Si un vecteur $u \in E$ s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs d'une famille libre $(e_1, \dots, e_m)$ alors cette combinaison linéaire est unique.

`MÉTHODO` **Démontrer qu'une famille finie $\mathcal{F}$ est une famille libre d'un espace vectoriel E**

1) Une famille (u) constituée uniquement d'un vecteur **non nul** de E est libre.
(la famille (0_E) est par contre liée et plus généralement, toute famille contenant 0_E est liée)

2) Une famille (u, v) constituée uniquement de deux vecteurs de E est libre si et seulement si ces deux vecteurs sont non colinéaires.

Pour démontrer la liberté d'une famille contenant trois vecteurs ou plus, on revient à la définition. Illustrons ce dernier cas.

- Démontrons que la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est libre.

  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

  Supposons : $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $(*)$

$$\text{Or :} \quad (*) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_3}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right.$$

(par remontées successives)

  La famille $\mathcal{F}$ est donc libre.

- Démontrons que la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est liée.

  Cherchons $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$\text{Or :} \quad (*) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcr} \lambda_1 & = & \lambda_3 \\ \lambda_2 & = & -2\lambda_3 \end{array} \right.$$

  Ce système homogène à 3 équations et 3 inconnues n'est pas de Cramer.
  Cela signifie qu'il admet d'autres solutions que $(0, 0, 0)$.
  En choisissant par exemple $\lambda_3 = 1$, on obtient une relation de dépendance linéaire non triviale entre les trois vecteurs considérés.

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  La famille $\mathcal{F}$ est donc liée.

III.3. Bases d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel.

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E.

- La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E si :
  1) c'est une famille génératrice de E.
  2) c'est une famille libre.
- Si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, tout vecteur $x \in E$ se décompose de manière unique sous forme d'une combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{B}$.
- Autrement dit : $\forall x \in E, \ \exists ! (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$.
- Les réels $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les **coordonnées** de x dans la base $\mathscr{B}$.

Base canonique des espaces vectoriels de référence

- **L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$**

  Considérons la famille $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, définie par :

  $$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

  Cette famille est libre et génératrice de $\mathbb{R}^n$. C'est donc une base de $\mathbb{R}^n$.
  Ainsi, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique n-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

  $$x = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e_k$$

  où $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est le n-uplet de coordonnées du vecteur x dans la base $\mathscr{B}_c$.
  Attention ! La notation est ici la même pour représenter le vecteur et ses coordonnées :
  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

- **L'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$**

  Considérons la famille $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, définie par :

  $$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Cette famille est libre et génératrice de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. C'est donc une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
  Ainsi, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe u unique n-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

  $$X = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e_k$$

  où $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est le n-uplet de coordonnées du vecteur X dans la base $\mathscr{B}_c$.

- **L'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$**

  Considérons la famille $\mathscr{B}_c = (\, E_{i,j} \,)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, où $E_{i,j}$ est définie par :

  $$E_{i,j} \ = \ \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & \dots & \dots & & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & & 0 & \dots & \dots & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ \\ - \, i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} | \\ j \end{array} & \end{array}$$

  Cette famille est libre et génératrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. C'est donc une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Ainsi, pour tout $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, il existe une unique séquence $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ telle que :

  $$M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \cdot E_{i,j}$$

  et donc $(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n}, a_{2,1}, \dots, a_{2,n}, \dots, a_{n,1}, \dots, a_{n,n})$ sont les coordonnées de la matrice M dans la base canonique $\mathscr{B}_c$.

Exemple

- On considère l'espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Sa base canonique est :

$$\mathscr{B}_c = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

  Les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}_c$ sont $(3, 1, 7, 5)$.

- **L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$**

  Considérons la famille $\mathscr{B}_c = (P_0, P_1, P_2, \dots, P_n)$ où pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P_i(X) = X^i$.
  Cette famille est libre et génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
  Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique n-uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$P(X) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot X + \ldots + a_n \cdot X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot X^k$$

  où $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ est le n-uplet de coordonnées du polynôme P dans la base $\mathscr{B}_c$.

`MÉTHODO` **Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée**

Illustrons la méthode sur un exemple.

On considère la base $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et on cherche à déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Cherchons $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Or : $(*)$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & & & & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array} \right.$$

$$\underset{}{\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\iff}} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & & & & x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & & & = & -4 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & & x_2 & & & = & -4 \\ & & & & x_3 & = & 2 \end{array} \right.$$

(on intervertit les 2 lignes en cas de pivot nul)

$$\overset{L1 \leftarrow L_1 - L_3}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ & & x_2 & & & = & -4 \\ & & & & x_3 & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & & & = & 5 \\ & & x_2 & & & = & -4 \\ & & & & x_3 & = & 2 \end{array} \right.$$

Ainsi, le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ a pour coordonnéees $(5, -4, 2)$ dans la base $\mathscr{B}$.

MÉTHODO **Déterminer une base d'un sous-espace propre d'une matrice donnée**

La notion de valeur propre et de sous-espace propre n'est pas au programme de cette semaine. Mais il faut dès à présent savoir déterminer le sous-espace propre $E_\lambda(M) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = \lambda \cdot X\}$ pour une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et une valeur propre λ données (le vocabulaire sera précisé dans le chapitre « Réduction ». Illustrons la méthode sur un exemple.

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminons $E_{-1}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\}$.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_{-1}(A) & \iff & (A+I)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[2mm]
& \iff & \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2mm]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -4\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ -2\,x & + & y & - & z & = & 0 \\ 6\,x & - & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 + 3\,L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 2\,L_2 - L_1}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -4\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \iff & \left\{ \ -4\,x = -2\,y + 2\,z \right.
\end{array}$$

- On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-1}(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{2}\,z \right\} \\[2mm]
& = & \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{2}\,z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\[2mm]
& = & \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\[2mm]
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\[2mm]
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

- La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$:
  × engendre $E_{-1}(A)$,
  × est libre car est constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

  C'est donc une base de $E_{-1}(A)$.

IV. Espace vectoriel de dimension finie (COURS) et (EXO)

IV.1. Notion de dimension finie

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet une base de cardinal fini (*i.e.* constituée d'un nombre fini de vecteurs).

Soit E un $\mathbb{R}$-ev non réduit à $\{0_E\}$.

Supposons que E admet une famille génératrice finie.

1) Alors E possède une base $\mathscr{B}$ de cardinal fini que l'on note $n \in \mathbb{N}^*$.

C'est le théorème de la base incomplète *(démo non exigible)*.

- Toute famille libre (dans E) peut être complétée en une base de E.
- De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E.
  Ceci signifie que toute famille génératrice de E contient une base de E.

2) Et toutes les bases de E sont finies et de même cardinal n.

C'est issu du résultat clé suivant *(démo non exigible)*.

Si un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E possède une base de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ alors toute famille possédant strictement plus de n éléments est liée.

- Ce nombre n est appelé **dimension de l'espace vectoriel** E, noté $\dim E$.
- Par convention, on note $\dim(\{0_E\}) = 0$.

IV.2. Cardinal d'une famille libre, d'une famille génératrice en dimension finie

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel tel que $E \neq \{0_E\}$.

- **Propriété :** *(démo non exigible)*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

Sur les familles libres

a) Toute famille libre possède au plus n vecteurs.

b) Toute famille libre de n vecteurs est une base de E.

c) Toute famille de q vecteurs avec $q > n$ est liée.

d) Toute sous-famille d'une famille libre (dans E) est libre (dans E).

Sur les familles génératrices

a) Toute famille génératrice de E possède au moins n vecteurs.

b) Toute famille génératrice de E de n vecteurs est une base de E.

c) Toute famille de q vecteurs avec $q < n$ n'est pas génératrice de E.

d) Toute sur-famille d'une famille génératrice de E est génératrice de E.

- Ainsi, si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :
  - × E admet une famille libre $(u_1, \dots, u_m)$.
  - × E admet une famille génératrice $(v_1, \dots, v_p)$.

  Alors :
$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Card}(\{u_1, \dots, u_m\}) & \leqslant & \dim(E) & \leqslant & \mathrm{Card}(\{v_1, \dots, v_p\}) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ m & \leqslant & n & \leqslant & p \end{array}$$

  On pourra retenir :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Card}\begin{pmatrix} \text{une famille} \\ \text{libre de } E \end{pmatrix} & \leqslant & \mathrm{Card}\begin{pmatrix} \text{une base} \\ \text{de } E \end{pmatrix} & \leqslant & \mathrm{Card}\begin{pmatrix} \text{une famille} \\ \text{génératrice de } E \end{pmatrix} \\ & & \shortparallel & & \\ & & \dim(E) & & \end{array}$$

- **Espaces vectoriels de référence :**
  $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, $\dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = n$, $\dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = n \times p$, $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$.

MÉTHODO **Démontrer qu'une famille finie $\mathcal{F}$ est une base d'un espace vectoriel F de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$**

Pour démontrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est une base d'un ev F, on peut procéder comme suit.

1) **Démontrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre et génératrice de F.**

La famille $\mathcal{F}$ est :

× génératrice de F,

× libre.

C'est donc une base de F.

Exemple classique d'utilisation

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$ est un ev et en déterminer une base.

(on commence par démontrer $F = \text{Vect}\,(\ \dots\ )$)

2) **Démontrer que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E de cardinal minimal ($\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(F)$)**

La famille $\mathcal{F}$ est :

× génératrice de F,

× telle que : $\text{Card}(\mathcal{F}) = p = \dim(F)$.

C'est donc une base de F.

Exemple classique d'utilisation

La famille $\mathcal{F} = \big((1,0,1),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ est :

× génératrice de $\mathbb{R}^3$.
En effet, tout vecteur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ s'écrit :

$$(a,b,c) = a \cdot (1,0,1) + b \cdot (0,1,0) + (c-a) \cdot (0,0,1)$$

× telle que : $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Ainsi, $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3) **Démontrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre de cardinal maximal ($\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(F)$)**

La famille $\mathcal{F}$ est :

× libre,

× telle que : $\text{Card}(\mathcal{F}) = p = \dim(F)$.

C'est donc une base de F.

Exemple classique d'utilisation

La famille $\mathcal{F} = \big((1,0,1),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ est :

× libre (*(à démontrer !)*.

× telle que : $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Ainsi, $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Pour démontrer le caractère libre de la famille $\mathcal{F}$, on pensera systématiquement à la caractérisation de la liberté pour des familles ne contenant qu'un, deux ou plus de vecteurs.

IV.3. Dimension d'un sous espace vectoriel *(démonstration non exigible)*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1) Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.

2)
$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ F \text{ sev de } E \\ \bullet\ \dim(F) = \dim(E) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad F = E}$$

MÉTHODO **Démontrer l'égalité de deux espaces vectoriels**

Pour démontrer que $E = F$, on peut réaliser les deux étapes suivantes :

1) démontrer que $F \subset E$.

2) démontrer que $\dim(F) = \dim(E)$.

V. Notion de rang (COURS) et (EXO)

V.1. Rang d'une famille de vecteurs

a) Définitions et propriétés

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.

- On appelle **rang de la famille** $(u_1, \ldots, u_p)$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par $(u_1, \ldots, u_p)$. Autrement dit :

$$\boxed{\text{rg}(u_1, \ldots, u_p) \ = \ \dim\left(\text{Vect}\left(u_1, \ldots, u_p\right)\right)}$$

- **Propriété :**
  Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\text{rg}(u_1, \ldots, u_p) \leqslant p} \quad \text{et} \quad \boxed{\text{rg}(u_1, \ldots, u_p) \leqslant n}$$

- **Intérêt du rang :** *(démonstration exigible)*
  Le rang d'une famille $\mathcal{F}$ est une mesure du « degré d'indépendance linéaire » de la famille $\mathcal{F}$. Seules les familles de rang plein sont libres.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La famille } (u_1, \ldots, u_p) \\ \text{est libre}\end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \text{rg}(u_1, \ldots, u_p) = p}$$

Démonstration.
La famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ est génératrice de $F = \text{Vect}\left(u_1, \ldots, u_p\right)$.

($\Rightarrow$) Supposons que la famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ est libre. Alors la famille $\mathcal{F}$:

- $\times$ est libre,
- $\times$ génératrice de F.

C'est donc une base de $F = \text{Vect}\left(u_1, \ldots, u_p\right)$.
On en déduit : $\text{rg}(u_1, \ldots, u_p) = \dim(\text{Vect}\left(u_1, \ldots, u_p\right)) = p$.

($\Leftarrow$) Supposons : $\dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)) = p$. Alors la famille $\mathcal{F}$ est :

- $\times$ génératrice de F,
- $\times$ telle que : $\text{Card}(\mathcal{F}) = p = \dim(F)$.

C'est donc une base de F.
En particulier, la famille $\mathcal{F}$ est libre. □

b) **Détermination pratique du rang** `(EXO)`

On a vu précédemment qu'on ne modifiait pas l'espace vectoriel engendré par une partie en :

- $\times$ ajoutant à cette partie le vecteur 0,
- $\times$ modifiant l'ordre des éléments de cette partie,
- $\times$ multipliant l'un des éléments de cette partie par un réel $\lambda \neq 0$,
- $\times$ ajoutant à cette partie une CL des éléments de cette partie,
- $\times$ ajoutant à l'un des éléments de cette partie un CL des autres éléments de cette partie.

On en déduit que ces opérations laissent le rang inchangé.

Exemple (en tâtonnant)

$$\begin{aligned}
\text{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right) &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right) \\
&= \text{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right) \\
&= \text{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right) \\
&= \text{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right) \\
&= \text{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right) \\
&= \text{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right) \\
&= \text{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \dim\left(\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\right) \\
&= \dim\left(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right) = 3
\end{aligned}$$

V.2. Rang d'une matrice

a) Définitions et propriétés

Soit $A = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_p \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- On appelle **rang de la matrice** A, noté $\mathrm{rg}(A)$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses vecteurs colonnes $C_1, C_2, \ldots, C_p$.

$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Vect}\,(C_1, C_2, \ldots, C_p)).$$

- **Propriété :** si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ alors :

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) \leqslant p} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{rg}(A) \leqslant n}$$

b) Détermination pratique du rang `(EXO)`

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Notons $C_1, \ldots, C_p$ les vecteurs colonnes de A.

Notons $L_1, \ldots, L_n$ les vecteurs lignes de A.

- On a alors :

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)}$$

  Ce qui permet de conclure que :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, \ldots, C_p) = \mathrm{rg}(L_1, \ldots, L_n)$$

- On a vu précédemment que certains opérations laissent le rang d'une famille de vecteurs inchangé.
  On peut traduire ces opérations pour le calcul du rang d'une matrice.
  On ne modifie par le rang d'une matrice en :
  × ajoutant une colonne (resp. ligne) de 0,
  × modifiant l'ordre des colonnes (resp. lignes) de cette matrice,
  × multipliant l'une des colonnes (resp. lignes) de cette matrice par un réel $\lambda \neq 0$,
  × ajoutant à cette matrice une colonne (resp. ligne) qui est une CL des autres colonnes (resp. lignes) de cette matrice,
  × ajoutant à l'une des colonnes (resp. lignes) de cette matrice une CL des autres colonnes (resp. lignes) de cette matrice.

c) Rang d'une matrice : intérêt `(EXO)` - *démo non exigible*

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) $\boxed{A \text{ est inversible } \Leftrightarrow \ \mathrm{rg}(A) = n}$

2) $\boxed{A \text{ n'est pas inversible } \Leftrightarrow \ \mathrm{rg}(A) < n}$

(savoir repérer que A n'est pas inversible car possède une colonne (ligne) de 0, deux colonnes (lignes) égales, une colonne (ligne) CL des autres colonnes (lignes) ...)

MÉTHODO **Calcul du rang d'une matrice / famille de vecteurs, méthode du pivot de Gauss**

$$\begin{aligned}
& \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right) \\
= \quad & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\3 & 5 & -1 & 2 & 0\\0 & 5 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\right) \\
\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 3\,L_1}{=} \quad & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 5 & -1 & -1 & 0\\0 & 5 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\right) \\
\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} \quad & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 5 & -1 & -1 & 0\\0 & 0 & 2 & 3 & 0\end{pmatrix}\right) \\
\underset{L_2 \leftarrow 2\,L_2 + L_1}{=} \quad & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 10 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2 & 3 & 0\end{pmatrix}\right) \\
\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{10}\,L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}\,L_3}}{=} \quad & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} & 0\\0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0\end{pmatrix}\right) \\
\underset{C4 \leftarrow C_4 - C_1 - \frac{1}{10}\,C_2 - \frac{3}{2}\,C_3}{=} \quad & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

- Les opérations élémentaires sur les lignes (resp. les colonnes) d'une matrice ne modifient pas son rang. La méthode consiste alors à opérer par pivot de Gauss afin de faire apparaître une matrice plus simple dont le rang est facile à déterminer.
- En l'occurrence, la réduite obtenue est une matrice par blocs :

$$J_r = \left(\begin{array}{c:c} I_r & (0) \\ \hdashline (0) & (0) \end{array}\right)$$

Le bloc en haut à gauche est la matrice identité d'ordre r. Tous les autres blocs sont des matrices nulles. On conclut le calcul en remarquant :

$$\boxed{\mathrm{rg}(J_r) \ = \ r}$$

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

Les questions de cours pour cette semaine se trouvent dans le document « programme_7_B.pdf ».

Exercices types

Les compétences attendues cette semaine sur ce chapitre sont les suivantes :

- bien comprendre que $\text{Vect}(A)$, espace vectoriel engendré par la partie A, représente l'ensemble des CL d'éléments de A.
- savoir procéder à des « simplifications » d'une partie A d'un espace vectoriel engendré par A.
- savoir démontrer qu'un ensemble est (ou n'est pas) un ev.
  En particulier, savoir démontrer qu'un ensemble est un sev d'un ev.
- savoir démontrer qu'une famille est libre dans un ev F :
  - × si la famille possède seulement un vecteur.
  - × si la famille possède seulement deux vecteurs.
  - × si la famille possède trois vecteurs ou plus (revenir à la définition).
- savoir démontrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est génératrice d'un ev F :
  - × car F s'écrit naturellement sous la forme $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$.
  - × en revenant à la définition c'est à dire en démontrant que tout vecteur de F s'écrit comme CL des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$.
- savoir démontrer qu'une famille est une base d'un ev F :
  - × car elle est libre et génératrice de F.
  - × **car elle est génératrice de F et de cardinal minimal** (*cf rédaction détaillée dans ce document*).
  - × **car elle est libre et de cardinal maximal** (*cf rédaction détaillée dans ce document*).
- savoir calculer les coordonnées d'un vecteur de F dans une base de F.
- savoir démontrer que l'intersection $F \cap G$ de deux sev de E est un sev de E.
- savoir démontrer que la réunion $F \cup G$ de deux sev de E n'est pas, de manière générale, un sev de E (on exhibera un contre-exemple).
- savoir calculer le rang d'une famille de vecteurs.
- savoir calculer le rang d'une matrice.
- connaître les bases canoniques des espaces vectoriels de référence.
  (comprendre que SEULS les espaces vectoriels de référence ont une base canonique !)
- savoir déterminer le sous-espace propre $E_\lambda(M) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = \lambda \cdot X\}$ pour une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et une valeur propre λ données. Le vocabulaire de sous-espace propre et de valeur propre est réservé aux cubes.
- savoir résoudre un système d'équations linéaires homogène ou non homogène.
  On prendra particulièrement soin à l'écriture des systèmes et on opérera par une application **stricte** de la méthode du pivot de Gauss (les colleurs sont autorisés à exclure de colle -avec attribution de la note 0- tout élève qui opère par substitution).