

Colles

semaine 7 : 11 octobre - 16 octobre

I. Espace probabilisable

I.1. Notion de tribu

a) Définition

Soit Ω un ensemble.

Une **tribu** (on parle aussi de σ -**algèbre**) sur Ω est un ensemble \mathcal{A} vérifiant :

(0) $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$

(\mathcal{A} est constitué de parties de Ω : pour tout $A \in \mathcal{A}$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$)

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall A \in \mathcal{A}, \bar{A} \in \mathcal{A}$

(stabilité de \mathcal{A} par passage au complémentaire)

(iii) Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{A} on a : $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

(stabilité de \mathcal{A} par union dénombrable)

On peut remplacer (iii) par :

(iii') Pour tout $I \subset \mathbb{N}$ et toute famille $(A_i)_{i \in I}$ d'événements de \mathcal{A} on a :

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$$

(stabilité de \mathcal{A} par union au plus dénombrable)

b) Propriété de stabilité

Soit Ω un ensemble et \mathcal{A} une tribu sur Ω .

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

2) Pour tout $(A, B) \in \mathcal{A}^2$: $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ sont des éléments de \mathcal{A} .

3) Si $I \subset \mathbb{N}$ et si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de \mathcal{A} :

$$\bigcup_{i \in I} A_i \text{ et } \bigcap_{i \in I} A_i \text{ sont des éléments de } \mathcal{A}$$

Résumé des propriétés de stabilité.

Une tribu \mathcal{A} sur Ω :

- × contient \emptyset et Ω ,
- × est stable par union finie et stable par union dénombrable,
- × est stable par intersection finie et stable par intersection dénombrable,
- × est stable par passage au complémentaire.

I.2. Notion d'espace probabilisable

- On appelle **espace probabilisable** la donnée d'un couple (Ω, \mathcal{A}) où :
 - × Ω est un ensemble appelé **univers** (ou univers des possibles).
C'est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.
 - × \mathcal{A} est une **tribu** (on parle aussi de σ -**algèbre**) sur Ω .
- **Vocabulaire sur les éléments d'une tribu** :
 - × les éléments de \mathcal{A} sont appelés des **événements**.
 - × l'événement \emptyset (*c'est un élément de \mathcal{A}*) est l'**événement impossible**.
 - × l'événement Ω est l'**événement certain**.
 - × l'événement \bar{A} est appelé **événement contraire** de A .

I.3. Vocabulaire des probabilités : illustration à l'aide d'expériences aléatoires

Exemple

1) Expérience : on effectue 1 lancer d'une pièce.

- Univers : $\Omega = \{P, F\}$.
Univers : l'ensemble des résultats possibles de l'expérience.
- Tribu : $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{P\}, \{F\}, \{P, F\}\}$.
Tribu : l'ensemble de tous les événements considérés.

2) Expérience : on effectue 1 lancer d'un dé 6.

- Univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

L'univers Ω est l'ensemble des résultats possibles de l'expérience.

Tribu : $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

La tribu \mathcal{A} est l'ensemble de tous les événements considérés.

- Exemple d'événement A : « le résultat est pair ».

Un événement A peut être défini par une propriété sur l'expérience.

$A = \{2, 4, 6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Rigoureusement, un événement A est une partie de Ω constituée de l'ensemble des tirages qui réalisent la propriété définissant A .

Le lancer $\omega = 4$ réalise l'événement $A = \{2, 4, 6\}$.

On dit qu'un tirage $\omega \in \Omega$ réalise l'événement A s'il vérifie la propriété définissant A .

II. Espace probabilisé

II.1. Probabilité

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable.

- Une probabilité est une application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ telle que :

$$1) \forall A \in \mathcal{A}, \quad 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$$

$$2) \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

(la probabilité de l'événement certain est 1)

- 3) Pour toute suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'événements de \mathcal{A} deux à deux incompatibles ($\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$), on a :

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

(cette propriété est appelée σ -additivité)

- Lorsqu'une telle application existe, le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé**.

Remarque

- La propriété de σ -additivité peut se noter de manière générale comme suit.
Soit $I \subseteq \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements deux à deux incompatibles. Alors :

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

- En particulier, lorsque I fini ($I = \llbracket 1, m \rrbracket$), on récupère la propriété d'additivité. Si (A_1, \dots, A_m) est une famille d'événements deux à deux incompatibles alors :

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right) = \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(A_i)$$

II.2. Propriétés des probabilités

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit A, B, C des événements $((A, B, C) \in \mathcal{A}^3)$.

$$1) \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) \text{ donc } \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

$$2) \mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$3) A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$$

(l'application \mathbb{P} est croissante)

$$4) \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$5) \quad \begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ &\quad - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ &\quad + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

(formule du crible)

II.3. Probabilité uniforme

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini.

L'univers Ω peut alors s'écrire : $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

- Il existe une unique probabilité \mathbb{P} prenant la même valeur sur tous les événements élémentaires *i.e.* telle que :

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \dots = \mathbb{P}(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}$$

- Cette probabilité est appelée probabilité uniforme et est définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto \mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre d'issues réalisant } A}{\text{nombre d'issues de l'expérience}} \end{aligned}$$

Exemple

On considère un jeu de 32 cartes.

L'expérience consiste à effectuer un tirage (simultané) de 5 cartes.

L'univers Ω est ici l'ensemble des parties à 5 éléments de l'ensemble des 32 cartes.

On munit l'univers Ω de la probabilité uniforme, notée \mathbb{P} .

Quelle est la probabilité d'obtenir une double paire ?

Démonstration.

On note A l'événement : « obtenir une double paire ».

Un 5-tirage dont les cartes forment une double paire est entièrement déterminé par :

- × les hauteurs de chaque paire : $\binom{8}{2}$ possibilités.
- × les couleurs des 2 cartes de la première paire : $\binom{4}{2}$ possibilités.
- × les couleurs des 2 cartes de la seconde paire : $\binom{4}{2}$ possibilités.
- × la dernière carte : $\binom{24}{1}$ possibilités.

(la dernière carte ne doit pas être de la même hauteur que l'une ou l'autre des paires)

Il y a donc $N = \binom{8}{2} \binom{4}{2} \binom{4}{2} \binom{24}{1}$ tels 5-tirages.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{8}{2} \binom{4}{2} \binom{4}{2} \binom{24}{1}}{\binom{32}{5}} = \dots = \frac{3 \times 3}{31 \times 29 \times 2}$$

□

À RETENIR

- Si l'univers fini Ω est muni de la probabilité uniforme, les calculs des probabilités se ramènent à des calculs de dénombrement.
- Afin de déterminer $\mathbb{P}(A)$, on détermine $\text{Card}(A)$.
Il s'agit donc de compter le nombre de tirages réalisant la propriété définissant l'événement A .
On retiendra la rédaction associée à ce type de questions :

Un k -tirage réalisant l'événement A est entièrement déterminé par :

- × la valeur de ... : ... possibilités
- × ...
- × la valeur de ... : ... possibilités

Il y a donc en tout ... tels k -tirages.

III. Système complet d'événements

III.1. Événements incompatibles

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable.
 Soit $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ un couple d'événements.
 Les événements A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.

III.2. Systèmes complets d'événements

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable.
 Soit $I \subseteq \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements de \mathcal{A} .

- La famille $(A_i)_{i \in I}$ est un **système complet d'événements** si :
 - 1) Pour tout $(i, j) \in I^2$, $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$
 (les événements sont deux à deux incompatibles)
 - 2) $\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$

III.3. Les systèmes complets d'événements rencontrés

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- Cas d'un sce à deux événements
 Soit $A \in \mathcal{A}$ (A est un événement).
 La famille (A, \bar{A}) est un système complet d'événements.
 On en déduit notamment que : $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) = 1$
- Cas d'un sce à n événements
 Soit (A_1, \dots, A_n) est un système complet d'événements.
 On a notamment que : $\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) = 1$
- Cas d'un sce à une infinité d'événements
 Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un système complet d'événements.
 On a notamment que : $\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i) = 1$
- Cas d'un sce associé à une v.a.r. discrète
 Soit X une v.a.r. discrète.
 La famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.
 On en déduit notamment que : $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x]) = 1$

IV. Propriété de la limite monotone

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de \mathcal{A} .

1) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante ($\forall k \in \mathbb{N}, A_k \subset A_{k+1}$) alors :

a) la suite $(\mathbb{P}(A_n))$ converge,

$$b) \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

2) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante ($\forall k \in \mathbb{N}, A_k \supset A_{k+1}$) alors :

a) la suite $(\mathbb{P}(A_n))$ converge,

$$b) \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

Dans le cas général (la suite (A_n) n'est ni croissante ni décroissante), on peut toujours appliquer le résultat suivant (**c'est celui qu'il faut retenir !**).

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de \mathcal{A} .

$$1) \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \quad 2) \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$$

Exercice

On considère l'expérience consistant à effectuer une infinité de lancers d'un dé 6 équilibré.

On suppose que les résultats des lancers sont indépendants.

Notons A : « on n'obtient que des 6 lors de la partie ». Alors : $A = \bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i$.

Notons B : « on obtient au moins un 6 lors de la partie ». Alors : $B = \bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i$.

a. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des 6 lors de la partie ?

D'après le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n F_i\right)$$

Or :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n F_i\right) &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(F_i) && \text{(par indépendance des lancers)} \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 && \text{(car } \frac{1}{6} \in]-1, 1[) \end{aligned}$$

D'où $\mathbb{P}(A) = 0$.

(l'événement A est négligeable)

b. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 lors de la partie ?

D'après le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right)$$

Or :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{i=1}^n F_i}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{F_i}\right) \quad (\text{loi de de Morgan}) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\overline{F_i}) \quad (\text{par indépendance des lancers}) \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad (\text{car } \frac{5}{6} \in]-1, 1[) \end{aligned}$$

D'où $\mathbb{P}(B) = 1$.

(l'événement B est quasi-certain)

Remarque

- Dans ce dernier point de la démonstration, les événements de la suite (F_i) ne sont pas deux à deux incompatibles (si i et j sont différents, on peut obtenir un 6 à la fois au $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lancers). On ne peut donc pas appliquer directement la propriété de σ -additivité.
- La suite (F_i) n'est pas croissante (on a même que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $F_i \not\subset F_{i+1}$: si on a obtenu 6 au $i^{\text{ème}}$ tirage, il n'est pas forcé qu'on l'obtienne au suivant). On ne peut donc pas appliquer directement le résultat de la limite monotone concernant les suites croissantes.

À RETENIR

- On utilisera TOUJOURS la propriété de la limite monotone sous sa deuxième forme, à savoir :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$$

- On ne pose la question de la monotonie de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que dans un deuxième temps :

× si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante alors : $\bigcup_{k=0}^n A_k = A_n$.

× si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante alors : $\bigcap_{k=0}^n A_k = A_n$.

ce qui permet de retrouver le premier théorème.

- L'obtention d'une infinité de 6 dans la partie se définit à l'aide des événements suivants.

Notons C : « on obtient une infinité successive de 6 lors de la partie ».

Cet événement s'écrit sous la forme :

$$C = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bigcap_{j=i}^{+\infty} F_j$$

Notons D : « on obtient une infinité de 6 lors de la partie ».

Cet événement s'écrit sous la forme :

$$D = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{j=i}^{+\infty} F_j$$

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

Les questions de cours pour cette semaine sont les suivantes :

- le rang est une mesure de « degré d'indépendance linéaire ». Énoncé et démonstration.
- calcul du rang d'une famille de vecteurs ou d'une matrice fournie par le colleur.
- sur le théorème de la limite monotone. Énoncé du deuxième théorème (pas la démonstration).
Application :
 - × savoir calculer la probabilité de n'obtenir que des 6 lors d'une suite infinie de lancers de dé ;
 - × savoir calculer la probabilité d'obtenir (au moins) un 6 au cours de la partie.

Exercices types

Très peu d'exercices de probabilités seront proposés cette semaine car le cours n'a pas été suffisamment développé et que trop peu d'exercices ont été traités. Si un exercice de probabilités est proposé, il conviendra d'insister particulièrement sur la phase de décomposition d'événement.