Colles

semaine 8 : 18 octobre - 23 octobre

I. Espace probabilisable

I.1. Notion de tribu

a) Définition

Soit Ω un ensemble.

Une **tribu** (on parle aussi de **σ-algèbre**) sur Ω est un ensemble $\mathscr{A}$ vérifiant :

(0) $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$
($\mathscr{A}$ est constitué de parties de Ω : pour tout $A \in \mathscr{A}$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$)

(i) $\Omega \in \mathscr{A}$

(ii) $\forall A \in \mathscr{A},\ \bar{A} \in \mathscr{A}$
(stabilité de $\mathscr{A}$ par passage au complémentaire)

(iii) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$ on a : $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \ \in\ \mathscr{A}$.
(stabilité de $\mathscr{A}$ par union dénombrable)

On peut remplacer ***(iii)*** par :

(iii') Pour tout $I \subset \mathbb{N}$ et toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements de $\mathscr{A}$ on a :

$$\bigcup_{i\in I} A_i \ \in\ \mathscr{A}$$

(stabilité de $\mathscr{A}$ par union au plus dénombrable)

b) Propriété de stabilité

Soit Ω un ensemble et $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω.

1) $\varnothing \in \mathscr{A}$.

2) Pour tout $(A, B) \in \mathscr{A}^2$: $\boxed{A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B \text{ sont des éléments de } \mathscr{A}.}$

3) Si $I \subset \mathbb{N}$ et si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{A}$:

$$\boxed{\bigcup_{i\in I} A_i \ \text{ et } \ \bigcap_{i\in I} A_i \ \text{ sont des éléments de } \mathscr{A}}$$

Résumé des propriétés de stabilité.
Une tribu $\mathscr{A}$ sur Ω :

× contient $\varnothing$ et Ω,

× est stable par union finie et stable par union dénombrable,

× est stable par intersection finie et stable par intersection dénombrable,

× est stable par passage au complémentaire.

I.2. Notion d'espace probabilisable

- On appelle **espace probabilisable** la donnée d'un couple $(\Omega, \mathscr{A})$ où :
  - × Ω est un ensemble appelé **univers** (ou univers des possibles).
    C'est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.
  - × $\mathscr{A}$ est une **tribu** (on parle aussi de σ**-algèbre**) sur Ω.
- **Vocabulaire sur les éléments d'une tribu** :
  - × les éléments de $\mathscr{A}$ sont appelés des **événements**.
  - × l'événement $\varnothing$ (*c'est un élément de* $\mathscr{A}$) est l'**événement impossible**.
  - × l'événement Ω est l'**événement certain**.
  - × l'événement $\bar{A}$ est appelé **événement contraire** de A.

I.3. Vocabulaire des probabilités : illustration à l'aide d'expériences aléatoires

Exemple

1) Expérience : on effectue 1 lancer d'une pièce.
- Univers : $\Omega = \{P, F\}$.
  Univers : l'ensemble des résultats possibles de l'expérience.
- Tribu : $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{P\}, \{F\}, \{P, F\}\}$.
  Tribu : l'ensemble de tous les événements considérés.

2) Expérience : on effectue 1 lancer d'un dé 6.
- Univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

  L'univers Ω est l'ensemble des résultats possibles de l'expérience.

  Tribu : $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

  La tribu $\mathscr{A}$ est l'ensemble de tous les événements considérés.
- Exemple d'événement A : « le résultat est pair ».

  Un événement A peut être défini par une propriété sur l'expérience.

  $A = \{2, 4, 6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$.

  Rigoureusement, un événement A est une partie de Ω constituée de l'ensemble des tirages qui réalisent la propriété définissant A.

  Le lancer $\omega = 4$ réalise l'événement $A = \{2, 4, 6\}$.

  On dit qu'un tirage $\omega \in \Omega$ réalise l'événement A s'il vérifie la propriété définissant A.

II. Espace probabilisé

II.1. Probabilité

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

- Une probabilité est un application $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$ telle que :
  1) $\forall A \in \mathscr{A}$, $\boxed{0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1}$
  2) $\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$
  (la probabilité de l'événement certain est 1)
  3) Pour toute suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathscr{A}$ deux à deux incompatibles ($\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i \neq j \ \Rightarrow\ A_i \cap A_j = \varnothing$), on a :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)}$$

  (cette propriété est appelée σ-additivité)
- Lorsqu'une telle application existe, le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé**.

Remarque

- La propriété de σ-additivité peut se noter de manière générale comme suit.
  Soit $I \subseteq N$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements deux à deux incompatibles. Alors :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)}$$

- En particulier, lorsque I fini ($I = [\![1, m]\!]$), on récupère la propriété d'additivité. Si $(A_1, \ldots, A_m)$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles alors :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i)}$$

II.2. Propriétés des probabilités

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit A, B, C des événements ($(A, B, C) \in \mathscr{A}^3$).

1) $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$ donc $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$

2) $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$

3) $A \subset B \ \Rightarrow\ \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$
(l'application $\mathbb{P}$ est croissante)

4) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

5) $$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) & = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ & & - \ \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ & & + \ \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{array}}$$

(formule du crible)

II.3. Probabilité uniforme

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini.
L'univer Ω peut alors s'écrire : $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

- Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ prenant la même valeur sur tous les événements élémentaires *i.e.* telle que :

$$\boxed{\mathbb{P}(\{\omega_1\}) \;=\; \dots \;=\; \mathbb{P}(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}}$$

- Cette probabilité est appelée probabilité uniforme et est définie par :

$$\boxed{\begin{array}{rccl} \mathbb{P} & : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & & A & \mapsto & \mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{\text{nombre d'issues réalisant } A}{\text{nombre d'issues de l'expérience}} \end{array}}$$

Exemple
On considère un jeu de 32 cartes.
L'expérience consiste à effectuer un tirage (simultané) de 5 cartes.
L'univers Ω est ici l'ensemble des parties à 5 éléments de l'ensemble des 32 cartes.
On munit l'univers Ω de la probabilité uniforme, notée $\mathbb{P}$.
Quelle est la probabilité d'obtenir une double paire ?

Démonstration.
On note A l'événement : « obtenir une double paire ».
Un 5-tirage dont les cartes forment une double paire est entièrement déterminé par :

× les hauteurs de chaque paire : $\binom{8}{2}$ possibilités
× les couleurs des 2 cartes de la première paire : $\binom{4}{2}$ possibilités
× les couleurs des 2 cartes de la seconde paire : $\binom{4}{2}$ possibilités
× la dernière carte : $\binom{24}{1}$ possibilités

(la dernière carte ne doit pas être de la même hauteur que l'une ou l'autre des paires)
Il y a donc $N = \binom{8}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{24}{1}$ tels 5-tirages.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{8}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{24}{1}}{\binom{32}{5}} = \dots = \frac{3 \times 3}{31 \times 29 \times 2}$$

□

`À RETENIR`

- Si l'univers fini Ω est muni de la probabilité uniforme, les calculs des probabilités se ramènent à des calculs de dénombrement.
- Afin de déterminer $\mathbb{P}(A)$, on détermine $\text{Card}(A)$.
  Il s'agit donc de compter le nombre de tirages réalisant la propriété définissant l'événement A.
  On retiendra la rédaction associée à ce type de questions :

  Un k-tirage réalisant l'événement A est entièrement déterminé par :

  × la valeur/position de ... : ... possibilités

  × ...

  × la valeur/position de ... : ... possibilités

  Il y a donc en tout ... tels k-tirages.

III. Système complet d'événements

III.1. Événements incompatibles

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.
Soit $(A, B) \in \mathscr{A}^2$ un couple d'événements.

Les événements A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.

III.2. Systèmes complets d'événements

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.
Soit $I \subseteq \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements de $\mathscr{A}$.

- La famille $(A_i)_{i \in I}$ est un **système complet d'événements** si :

  1) $\forall (i, j) \in I^2, \ \ i \neq j \ \Rightarrow \ A_i \cap A_j = \varnothing$
  (les événements sont deux à deux incompatibles)

  2) $\Omega = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$

III.3. Les systèmes complets d'événements rencontrés

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- Cas d'un sce à deux événements

  Soit $A \in \mathscr{A}$ (A est un événement).
  La famille $\left(A, \overline{A}\right)$ est un système complet d'événements.

  On en déduit notamment : $\boxed{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1}$

- Cas d'un sce à m événements

  Soit $(A_1, \ldots, A_m)$ est un système complet d'événements.

  On a notamment : $\boxed{\sum\limits_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i) = 1}$

- Cas d'un sce à une infinité d'événements

  Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un système complet d'événements.

  On a notamment : $\boxed{\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i) = 1}$

- Cas d'un sce associé à une v.a.r. discrète

  Soit X une v.a.r. discrète.
  La famille $\big([X = x]\big)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

  On en déduit notamment que : $\boxed{\sum\limits_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x]) = 1}$

IV. Propriété de la limite monotone

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathscr{A}$.

1) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ($\forall k \in \mathbb{N},\ A_k \subset A_{k+1}$) alors :

a) la suite $(\mathbb{P}(A_n))$ converge,

b) $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$

2) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ($\forall k \in \mathbb{N},\ A_k \supset A_{k+1}$) alors :

a) la suite $(\mathbb{P}(A_n))$ converge,

b) $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$

Dans le cas général (la suite (A_n) n'est ni croissante ni décroissante), on peut toujours appliquer le résultat suivant (**c'est celui qu'il faut retenir !**).

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathscr{A}$.

1) $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right)}$ *2)* $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k\right)}$

Exercice

On considère l'expérience consistant à effectuer une infinité de lancers d'un dé 6 équilibré.
On suppose que les résultats des lancers sont indépendants.

Notons A : « on n'obtient que des 6 lors de la partie ». Alors : $A = \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} F_i$.

Notons B : « on obtient au moins un 6 lors de la partie ». Alors : $B = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} F_i$.

a. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des 6 lors de la partie ?

D'après le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right)$$

Or :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(F_i) && \textit{(par indépendance des lancers)} \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 && \textit{(car } \tfrac{1}{6} \in\ ]-1,1[\textit{)} \end{aligned}$$

D'où $\mathbb{P}(A) = 0$.
(l'événement A est négligeable)

b. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 lors de la partie ?

D'après le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}(B) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i\right) \;=\; \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)$$

Or :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} F_i}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{F_i}\right) && \textit{(loi de de Morgan)} \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{F_i}\right) && \textit{(par indépendance des lancers)} \\
&= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 && \textit{(car } \tfrac{5}{6} \in\,]-1,1[\textit{)}
\end{aligned}$$

D'où $\mathbb{P}(B) = 1$.
(l'événement B est quasi-certain)

Remarque

- Dans ce dernier point de la démonstration, les événements de la suite (F_i) ne sont pas deux à deux incompatibles (si i et j sont différents, on peut obtenir un 6 à la fois au $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lancers). On ne peut donc pas appliquer directement la propriété de σ-additivité.
- La suite (F_i) n'est pas croissante (on a même que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $F_i \not\subset F_{i+1}$: si on a obtenu 6 au $i^{\text{ème}}$ tirage, il n'est pas forcé qu'on l'obtienne au suivant). On ne peut donc pas appliquer directement le résultat de la limite monotone concernant les suites croissantes.

`À RETENIR`

- On utilisera `TOUJOURS` la propriété de la limite monotone sous sa deuxième forme, à savoir :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)} \qquad \boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)}$$

- On ne pose la question de la monotonie de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que dans un deuxième temps :
  × si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors : $\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k = A_n$.
  × si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors : $\bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k = A_n$.
  ce qui permet de retrouver le premier théorème.

- L'obtention d'une infinité de 6 dans la partie se définit à l'aide des événements suivants.
  Notons C : « on obtient une infinité successive de 6 lors de la partie ».
  Cet événement s'écrit sous la forme :
  $$C \;=\; \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bigcap_{j=i}^{+\infty} F_j$$
  Notons D : « on obtient une infinité de 6 lors de la partie ».
  Cet événement s'écrit sous la forme :
  $$D \;=\; \bigcap_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{j=i}^{+\infty} F_j$$

V. Formule des probabilités composées

V.1. Probabilité conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

On considère l'application $\mathbb{P}_A$ suivante :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_A & : & \mathscr{A} & \to & [0,1] \\ & & B & \mapsto & \boxed{\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}} \end{array}$$

- $\mathbb{P}_A$ est une probabilité, appelée **probabilité conditionnelle** relative à A.
- Pour tout événement B, $\mathbb{P}_A(B)$ désigne la probabilité de B sachant A.

Démonstration.
Il s'agit de vérifier que $\mathbb{P}_A$ vérifie les axiomes d'une probabilité.

1) Soit $B \in \mathscr{A}$.

- Comme $\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant 0$ et $\mathbb{P}(A) > 0$ (car $\mathbb{P}(A) \neq 0$), on a : $\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \geqslant 0$.
- Comme $A \cap B \subset A$, on a $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A)$ et donc : $\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \leqslant 1$.

2) $\mathbb{P}_A(\Omega) \ = \ \dfrac{\mathbb{P}(A \cap \Omega)}{\mathbb{P}(A)} \ = \ \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} \ = \ 1$.

3) Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles. Alors :

$$\mathbb{P}_A\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) \ = \ \dfrac{\mathbb{P}\Big(A \cap \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\Big)}{\mathbb{P}(A)} \ = \ \dfrac{\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} (A \cap B_n)\Big)}{\mathbb{P}(A)}$$

Notons alors $C_n = A \cap B_n$.
Les événements de la suite (C_n) sont deux à deux incompatibles.
En effet, soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $i \neq j$. On a alors :

$$C_i \cap C_j \ = \ (A \cap B_i) \ \cap \ (A \cap B_j) \ = \ A \cap (B_i \cap B_j) \ = \ A \cap \varnothing \ = \ \varnothing$$

Par σ-additivité de $\mathbb{P}$, on a alors : $\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} (A \cap B_n)\Big) \ = \ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A \cap B_n)$.
Et ainsi :

$$\mathbb{P}_A\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) \ = \ \dfrac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A \cap B_n)}{\mathbb{P}(A)} \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B_n)}{\mathbb{P}(A)} \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_A(B_n)$$

□

V.2. Formule des probabilités composées

Énoncé de la formule pour deux événements A et B (c'est la définition ci-dessus !)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soient A et B deux événements.

1) Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on peut écrire : $\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)}$

2) Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on peut écrire : $\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\ \mathbb{P}_B(A)}$

3) On a alors, si $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \neq 0$: $\boxed{\mathbb{P}(B)\ \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)}$

Énoncé dans le cas général

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
Soit $(A_1, \ldots, A_m)$ une famille d'événements de $\mathscr{A}$.
On suppose : $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{m-1}) \neq 0$.

On a alors : $\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_m) = \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}_{A_1}(A_2)\ \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3)\ \ldots\ \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{m-1}}(A_m)}$

Exemple
Une urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires.
L'expérience consiste à tirer successivement 3 boules.

- Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note B_i l'événement : « la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche ».
- Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note N_i l'événement : « la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est noire ».

Quelle est la probabilité que les trois boules tirées soient blanches ?

Démonstration.
D'après la formule des probabilités composées (sous réserve que l'on puisse écrire chacun des éléments) :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(B_1)\ \mathbb{P}_{B_1}(B_2)\ \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3)$$

- Tout d'abord : $\mathbb{P}(B_1) = \frac{5}{13}$ ($\neq 0$).
  (l'urne contient initialement 5 *boules blanches et* 13 *boules en tout)*
- Ensuite : $\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{4}{12}$.

  En effet, si l'événement B_1 est réalisé, c'est qu'on a obtenu une boule blanche au premier tirage. Dans ce cas, B_2 est réalisé si et seulement si l'on tire une boule blanche dans une urne qui contient 4 boules blanches et 8 boules noires (soit 12 boules en tout).
  (on remarque au passage : $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\ \mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{5 \times 4}{13 \times 12} \neq 0$*)*
- Enfin : $\mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) = \frac{3}{11}$.

  En effet, si l'événement $B_1 \cap B_2$ est réalisé, c'est qu'on a obtenu une boule blanche lors des deux premiers tirages. Dans ce cas, l'événement B_3 est réalisé si et seulement si l'on tire une boule blanche dans une urne qui contient 3 boules blanches et 8 boules noires (soit 12 boules en tout).

On en conclut : $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{5 \times \cancel{4} \times \cancel{3}}{13 \times \cancel{12} \times 11} = \frac{5}{11 \times 13} \simeq 0,035$. □

`À RETENIR`

Afin de déterminer une probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(B)$ on pourra rédiger comme suit :

Si l'événement A est réalisé, c'est que ...
Dans ce cas, l'événement B est réalisé si et seulement si ...

VI. Formule des probabilités totales

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1) Cas d'un sce à deux événements

Soit $A \in \mathscr{A}$. Alors $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements.

Alors, pour tout événement B : $\boxed{\mathbb{P}(B) \ = \ \mathbb{P}\big(A \cap B\big) + \mathbb{P}\big(\overline{A} \cap B\big)}$

Si de plus $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\overline{A}) \neq 0$ alors : $\boxed{\mathbb{P}(B) \ = \ \mathbb{P}(A) \ \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A}) \ \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)}$

2) Cas d'un sce à n événements

Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements.

Alors, pour tout événement B : $\boxed{\mathbb{P}(B) \ = \ \sum\limits_{i=1}^{n} \ \mathbb{P}(A_i \cap B)}$

Si de plus : $\forall i \in [\![1, n]\!], \ \mathbb{P}(A_i) \neq 0$ alors : $\boxed{\mathbb{P}(B) \ = \ \sum\limits_{i=1}^{n} \ \mathbb{P}(A_i) \ \mathbb{P}_{A_i}(B)}$

3) Cas d'un sce à une infinité d'événements

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un système complet d'événements.

Alors, pour tout événement B : $\boxed{\mathbb{P}(B) \ = \ \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \ \mathbb{P}(A_i \cap B)}$

Si de plus : $\forall i \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(A_i) \neq 0$ alors : $\boxed{\mathbb{P}(B) \ = \ \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \ \mathbb{P}(A_i) \ \mathbb{P}_{A_i}(B)}$

4) Cas d'un sce associé à une v.a.r. discrète

Soit X une v.a.r. discrète. La famille $([X = x])_{x\in X(\Omega)}$ est un sce.

Alors, pour tout événement B : $\boxed{\mathbb{P}(B) \ = \ \sum\limits_{x\in X(\Omega)} \ \mathbb{P}([X = x] \cap B)}$

Considérons une autre v.a.r. discrète Y.

Alors pour tout $y \in Y(\Omega))$: $\boxed{\mathbb{P}([Y = y]) \ = \ \sum\limits_{x\in X(\Omega)} \ \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])}$

À RETENIR

Dans la formule des probabilités totales, la somme s'écrit à l'aide de TOUS les d'événements qui constituent le SCE. Ainsi, il y a autant de termes dans la somme que d'événements dans le SCE :

× si l'on considère un SCE noté $(A_i)_{i\in I}$, alors la FPT s'écrira à l'aide d'une somme $\sum\limits_{i\in I} \ldots$

× si l'on considère un SCE noté $(A_i)_{i\in[\![1,10]\!]}$, alors la FPT s'écrira à l'aide d'une somme $\sum\limits_{i=1}^{10} \ldots$

× si l'on considère un SCE noté $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, alors la FPT s'écrira à l'aide d'une somme $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \ldots$

Démonstration.

- Comme $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ un système complet d'événements : $\Omega = \bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} A_i$.

  Ainsi, on a : $B = B \cap \Omega = B \cap \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} (B \cap A_i)$.

  (la distributivité et les lois de de Morgan se généralisent au cas dénombrable)

- Et comme $(B \cap A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles :
*(à savoir démontrer : cf démo du point **3)** du théorème définissant la notion de probabilité conditionnelle)*
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} (A_i \cap B)\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i \cap B)$$
- Enfin, si pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$, on a : $\mathbb{P}(A_i \cap B) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}_{A_i}(B)$.
Et ainsi :
$$\mathbb{P}(B) \;=\; \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)\ \mathbb{P}_{A_i}(B)$$ □

Exercice
On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne numéro k se trouvent k boules blanches et $n-k$ boules rouges. On choisit au hasard (équiprobablement) une urne, puis on tire simultanément deux boules dans cette urne.
On note A_k : « le tirage s'effectue dans l'urne k » (pour $k \in [\![1,n]\!]$).
On note B : « on tire deux boules blanches ».

Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches ?

Démonstration.
La famille $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements.
On en déduit, par la formule des probabilités totales que :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k \cap B)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}_{A_k}(B) \qquad \textit{(car } \mathbb{P}(A_k) = \tfrac{1}{n} \neq 0\textit{)}\end{aligned}$$
Or, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$: $\mathbb{P}_{A_k}(B) \;=\; \dfrac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}} \;=\; \dfrac{\frac{k!}{2!(k-2)!}}{\frac{n!}{2!(n-2)!}} \;=\; \dfrac{k!}{\cancel{2!}(k-2)!} \times \dfrac{\cancel{2!}(n-2)!}{n!} \;=\; \dfrac{k(k-1)}{n(n-1)}$.
En effet, si A_k est réalisé, c'est que l'on a tiré au sort l'urne k.
Dans ce cas, l'événement B est réalisé si et seulement si l'on obtient deux boules blanches dans l'urne k qui contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.
Un 2-tirage réalisant B (un 2-tirage contenant 2 boules blanches) est entièrement déterminé par :
× *la valeur des 2 boules blanches parmi les k présentes : $\binom{k}{2}$ possibilités.*
Il y a donc $\binom{k}{2}$ tels 2-tirages.
De plus, il y a $\binom{n}{2}$ 2-tirages en tout.

Ainsi :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{k\,(k-1)}{n\,(n-1)}\\ &= \frac{1}{n^2\,(n-1)} \sum_{k=1}^{n} k\,(k-1)\\ &= \frac{1}{n^2\,(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k\right)\\ &= \frac{1}{n^2\,(n-1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right)\\ &= \frac{n(n+1)}{6\,n^2\,(n-1)}\,((2n+1)-3)\\ &= \frac{n(n+1)}{6\,n^2\,(n-1)}\,2(n-1) \;=\; \frac{\cancel{n}(n+1)}{6\,n^{\cancel{2}}\,\cancel{(n-1)}}\,2\cancel{(n-1)} \;=\; \frac{1}{3}\,\frac{n+1}{n}\end{aligned}$$ □

VII. Indépendance en probabilité

VII.1. Indépendance de deux événements

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- Deux événements A et B sont dits **indépendants (pour la probabilité $\mathbb{P}$)** si :

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)}$$

- On peut exprimer cette propriété à l'aide de probabilités conditionnelles.

1) Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ alors : $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)}$

2) Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$ alors : $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)}$

VII.2. Indépendance (mutuelle) d'une famille d'événements

a) Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements de $\mathscr{A}$.

- On dit que les événements de la famille $(A_i)_{i \in I}$ sont **(mutuellement) indépendants (pour la probabilité $\mathbb{P}$)** si :

$$\boxed{\forall J \subset N, \quad \left.\begin{array}{c} J \textbf{ fini} \\ J \subset I \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_i\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)}$$

- **Cas particulier d'une famille à trois événements**

Les événements A_1, A_2, A_3 sont mutuellement indépendants si :

a) $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}(A_2)$

b) $\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}(A_3)$

c) $\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2)\ \mathbb{P}(A_3)$

d) $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}(A_2)\ \mathbb{P}(A_3)$

b) Indépendance et passage à l'événement contraire

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $m \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(A_1, \dots, A_m)$ une famille d'événements.

Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, notons $B_i \in \{A_i, \overline{A_i}\}$ (autrement dit $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$).

Les événements de la famille $(A_1, \dots, A_m)$ sont (mutuellement) indépendants	$\Rightarrow$	Les événements de la famille $(B_1, \dots, B_m)$ sont (mutuellement) indépendants