

Colles

semaine 8 : 18 octobre - 23 octobre

I. Généralités sur les variables aléatoires

I.1. Notion de variable aléatoire

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable.

- On dit que X est une **variable aléatoire réelle** définie sur (Ω, \mathcal{A}) si :
 - (i) X est une application de Ω dans \mathbb{R} ($X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$)
 - (ii) $\forall x \in \mathbb{R}, [X \leq x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$
- L'image de Ω par l'application X , est notée $X(\Omega)$.
Cet ensemble image $X(\Omega)$ est, par définition, l'ensemble des valeurs que peut prendre l'application X .

I.2. Fonction de répartition d'une variable aléatoire

a) Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire réelle.

- On appelle **fonction de répartition de X** et on note F_X l'application :

$$F_X : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F_X(x) = \mathbb{P}([X \leq x]) \end{cases}$$

b) Propriétés caractéristiques

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire réelle.

La fonction de répartition F_X vérifie les propriétés suivantes.

1) $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(x) \leq 1.$

2) F_X est croissante.

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$

4) F_X est continue à droite en tout point $x \in \mathbb{R}$.

Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t > x}} F_X(t) = F_X(x)$

5) F_X admet une limite finie à gauche en tout point $x \in \mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t < x}} F_X(t) = F_X(x) - \mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{P}([X < x])$$

II. Généralités sur les variables aléatoires discrètes

II.1. Définition

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probablisable.

Soit X une variable aléatoire réelle sur (Ω, \mathcal{A}) .

- La v.a.r. X est dite **discrète** si son ensemble image $X(\Omega)$ est au plus dénombrable (*i.e.* si $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou si $X(\Omega)$ est infini dénombrable).
- On dit que la v.a.r. X est **finie** si $X(\Omega)$ est fini.
On dit que la v.a.r. X est **infinie** si $X(\Omega)$ est un ensemble infini.

II.2. Système complet d'événements associé à une v.a.r. discrète

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probablisable.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur (Ω, \mathcal{A}) .

Notons $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ où $I \subseteq \mathbb{N}$.

*La famille $([X = x_i])_{i \in I}$ est un système complet d'événements, appelé **système complet d'événements associé à X** .*

II.3. Loi d'une v.a.r. discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probablisé.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur (Ω, \mathcal{A}) .

- On appelle **loi de probabilité** de X et on note \mathbb{P}_X l'application :

$$\mathbb{P}_X : \begin{array}{l|l} X(\Omega) & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}([X = x]) \end{array}$$

- Autrement dit, la loi de X est la donnée de l'ensemble des valeurs $\mathbb{P}([X = x])$ pour x décrivant $X(\Omega)$.

À RETENIR

Afin de déterminer la loi d'une v.a.r. discrète, on procède toujours en deux étapes.

- 1) Détermination de l'ensemble image $X(\Omega)$.
- 2) Calcul de $\mathbb{P}([X = x])$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

II.4. Fonction de répartition d'une v.a.r. discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une v.a.r. discrète sur (Ω, \mathcal{A}) telle que $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ ($I \subseteq \mathbb{N}$).

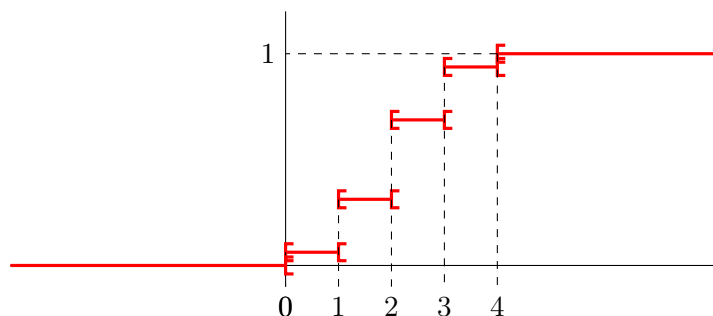
Alors la fonction de répartition F_X est déterminée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \sum_{\substack{x_i \leq x \\ i \in I}} \mathbb{P}([X = x_i])$$

Représentation graphique

Considérons une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(4, \frac{1}{2})$.

(1) expérience : quatre lancers successifs d'un dé 6, 2) X la v.a.r. qui compte le nombre de Pile)



- On obtient une fonction constante par morceaux qui présente des sauts de discontinuité qui donnent à cette courbe une allure d'**escalier**. Les **contremarches** (*i.e.* les sauts de continuité) ont pour hauteur les valeurs successives de $\mathbb{P}([X = x_i])$ (les x_i étant rangés dans l'ordre).
- Cette forme en escalier est **caractéristique** des fonctions de répartition des v.a.r. discrètes.
- En particulier, une v.a.r. à densité n'est jamais une v.a.r. discrète. En effet, si X est une v.a.r. à densité, alors F_X est une fonction continue sur \mathbb{R} . Or :

$$F_X \text{ continue en } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathbb{P}([X = x]) = 0$$

La fonction de répartition F_X d'une v.a.r. à densité n'admet pas de point de discontinuité. Sa représentation graphique ne fait donc pas apparaître de sauts de continuité.

III. Lois usuelles discrètes finies

III.1. Loi uniforme

a) Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi uniforme** sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) si :
 - a) $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$
 - b) $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{n}$
- Plus généralement, si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et $a < b$, on dit qu'une v.a.r. X suit **la loi uniforme** sur $\llbracket a, b \rrbracket$ si :
 - a) $X(\Omega) = \llbracket a, b \rrbracket$
 - b) $\forall k \in \llbracket a, b \rrbracket, \mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{b - a + 1}$
- On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$ pour signifier que X suit la loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$.

- **Expérience de référence** : on considère une expérience qui possède n issues différentes (qu'on numérote de 1 à n) qui sont équiprobables.
- **Variable associée à la loi** : la v.a.r. X égale à i si l'issue i est obtenue lors de l'expérience, suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

b) Espérance / variance

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

1) La v.a.r. X admet une espérance et une variance.

2) De plus : $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a < b$.

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$.

On note : $Y = X - a + 1$.

1) Alors : $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, b - a + 1 \rrbracket)$.

2) La v.a.r. X admet une espérance et une variance.

3) De plus : $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)(b-a+1)}{12}$

III.2. Loi de Bernoulli

a) Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in]0, 1[$ si :

$$a) \quad X(\Omega) = \{0, 1\}$$

$$b) \quad \mathbb{P}([X = 1]) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X = 0]) = 1 - p = q$$

- On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ pour signifier que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p .

- Expérience de référence** : on considère une expérience aléatoire possédant deux issues (qui ne sont pas forcément équiprobables) :
 - × l'une de ces issues est nommée « succès » et se produit avec probabilité p ;
 - × l'autre est nommée « échec » et se produit avec probabilité $1 - p$.
- Variable associée à la loi** : la v.a.r. X égale à 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec (*i.e.* calculant le nombre de succès) suit la loi de Bernoulli de paramètre p .

b) Espérance / variance

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ ($p \in]0, 1[$).

1) Alors X admet une espérance et une variance.

$$2) \text{ De plus : } \quad \mathbb{E}(X) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = p(1 - p) = pq$$

III.3. Loi binomiale

a) Définition

- On dit qu'une v.a.r. discrète X suit la **loi binomiale** de paramètre (n, p) , où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$ si :

$$a) \quad X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$$

$$b) \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

- On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ pour signifier que X suit la loi binomiale de paramètre (n, p) .

- Expérience de référence** : on considère l'expérience aléatoire qui consiste à effectuer n épreuves de Bernoulli indépendantes (le résultat de l'une ne dépend pas du résultat des autres) et de même paramètre p .
- Variable associée à la loi** : la v.a.r. donnant le nombre de succès obtenus au cours de cette expérience suit la loi binomiale de paramètre (n, p) .

b) **Espérance / variance**

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$).

1) Alors X admet une espérance et une variance.

2) De plus : $\mathbb{E}(X) = n p$ et $\mathbb{V}(X) = n p (1 - p) = n p q$

IV. Lois discrètes usuelles infinies

IV.1. Loi géométrique

a) Définition

• On dit qu'une v.a.r. X suit la **loi géométrique** de paramètre $p \in]0, 1[$ si :

a) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

b) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X = k]) = p (1 - p)^{k-1} = p q^{k-1}$

• On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ pour signifier que X suit la loi géométrique de paramètre p .

- **Expérience de référence** : on considère une expérience aléatoire qui consiste à effectuer une infinité d'épreuves de Bernoulli indépendantes (le résultat de l'une ne dépend pas du résultat des autres) et de même paramètre p .
- **Variable associée à la loi** : la v.a.r. donnant le rang d'apparition du premier succès obtenu lors de l'expérience suit la loi géométrique de paramètre p .

b) **Espérance / variance**

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ ($p \in]0, 1[$). Alors :

1) La v.a.r. X admet une espérance et une variance.

2) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$

c) **La loi géométrique est sans mémoire**

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ ($p \in]0, 1[$).

Alors pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$:

1) $\mathbb{P}([X > k]) = (1 - p)^k$

Cela caractérise la loi géométrique de paramètre p . Plus précisément :

$$Y \text{ est une v.a.r. à valeurs entières telle que } \Leftrightarrow Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \\ \text{pour tout } k \in \mathbb{N} : \mathbb{P}([Y > k]) = (1 - p)^k$$

Le sens direct se démontre grâce à l'égalité : $\mathbb{P}([Y = k]) = \mathbb{P}([Y > k - 1]) - \mathbb{P}([Y > k])$.

2) $\mathbb{P}([X > k + \ell]) = \mathbb{P}([X > k]) \times \mathbb{P}([X > \ell])$

3) $\mathbb{P}_{[X > k]}([X > k + \ell]) = \mathbb{P}([X > \ell])$

Démonstration.

Soit $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$.

1) On remarque tout d'abord :

$$\mathbb{P}([X > k]) = 1 - \mathbb{P}(\overline{[X > k]}) = 1 - \mathbb{P}([X \leq k])$$

Par ailleurs : $[X \leq k] = \bigcup_{i=1}^k [X = i]$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X \leq k]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^k [X = i]\right) \\ &= \sum_{i=1}^k \mathbb{P}([X = i]) \quad (\text{par incompatibilité}) \\ &= \sum_{i=1}^k p q^{i-1} = p \sum_{i=0}^{k-1} q^i = p \frac{1 - q^k}{1 - q} = 1 - q^k \end{aligned}$$

Enfin : $\mathbb{P}([X > k]) = 1 - \mathbb{P}([X \leq k]) = 1 - (1 - q^k) = q^k$.

2) D'après le point précédent :

$$\mathbb{P}([X > k + \ell]) = q^{k+\ell} = q^k \times q^\ell = \mathbb{P}([X > k]) \times \mathbb{P}([X > \ell])$$

3) Comme $[X > k + \ell] \subseteq [X > k]$, on a :

$$\mathbb{P}_{[X > k]}([X > k + \ell]) = \frac{\mathbb{P}([X > k + \ell])}{\mathbb{P}([X > k])} = \frac{q^{k+\ell}}{q^k} = q^\ell = \mathbb{P}([X > \ell])$$

On dit alors que la loi géométrique est à perte de mémoire (la propriété $[X > k]$ est oubliée, seul le délai est retenu) ou encore que la loi géométrique est **sans mémoire**. \square

Remarque

- Dans un contexte où X est un variable aléatoire mesurant une durée de vie (durée de vie d'une cellule, durée de fonctionnement d'un composant électronique, nombre de cycle de charge/décharge autorisé par une batterie), on introduit souvent la fonction :

$$S : t \mapsto \mathbb{P}([X > t]) = 1 - \mathbb{P}([X \leq t]) = 1 - F_X(t)$$

Dans ce cas, $S(t) = \mathbb{P}([X > t])$ représente la probabilité que l'objet (ou l'individu) considéré soit encore en vie après une durée t .

Dans le cas d'un phénomène à durée de vie continue (durée de vie d'une cellule), la modélisation s'appuiera sur une v.a.r. X à densité.

Dans le cas d'un phénomène à durée de vie discrète (nombre de cycles d'une batterie), la modélisation s'appuiera sur une v.a.r. X discrète.

- Considérons la propriété d'absence de mémoire dans ce contexte.

$$\mathbb{P}_{[X > k]}([X > k + \ell]) = \mathbb{P}([X > \ell])$$

Considérons que X compte la durée de fonctionnement d'un composant avant une panne. Alors cette propriété signifie que la durée de vie restante d'un objet est indépendante de la durée de vie écoulée de l'objet (période durant laquelle il a fonctionné sans tomber en panne). Autrement dit, il n'y a pas de vieillissement ou encore d'usure du composant électronique considéré. C'est un cas assez fréquent en réalité : on peut considérer que les diodes, transistors, résistances, condensateurs sont sans usure puisque leur usure ne débute que bien après la fin de vie de l'objet dans lequel ils sont installés. C'est pourquoi la durée de vie d'un composant est souvent modélisée par une v.a.r. qui suit loi exponentielle qui est, elle aussi, sans mémoire (c'est même une propriété qui caractérise la loi exponentielle).

Exercice

Soit X une v.a.r. telle que : $X \leftrightarrow \mathcal{G}(p)$ où $p \in]0, 1[$.

1) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([X > k - 1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

2) En déduire que : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > k])$.

3) Retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X)$ à l'aide de cette formule.

Démonstration.

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La v.a.r. X est à valeurs entières. On en déduit :

$$[X > k - 1] = [X = k] \cup [X > k]$$

Les événements $[X = k]$ et $[X > k]$ sont incompatibles. On en déduit :

$$\mathbb{P}([X > k - 1]) = \mathbb{P}([X = k]) + \mathbb{P}([X > k])$$

et ainsi : $\mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([X > k - 1]) - \mathbb{P}([X > k])$.

2) La v.a.r. X admet une espérance car elle suit une loi géométrique.

Par définition $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbb{P}([X = k])$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

Considérons la somme partielle $\sum_{k=1}^N k \mathbb{P}([X = k])$ correspondante.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N k \mathbb{P}([X = k]) &= \sum_{k=1}^N k \left(\mathbb{P}([X > k - 1]) - \mathbb{P}([X > k]) \right) && \text{(d'après la question précédente)} \\ &= \sum_{k=1}^N k \mathbb{P}([X > k - 1]) - \sum_{k=1}^N k \mathbb{P}([X > k]) && \text{(par linéarité)} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (k + 1) \mathbb{P}([X > k]) - \sum_{k=1}^N k \mathbb{P}([X > k]) && \text{(par décalage d'indice)} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} k \mathbb{P}([X > k]) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X > k]) - \sum_{k=1}^N k \mathbb{P}([X > k]) && \text{(par linéarité)} \\ &= 0 \times \mathbb{P}([X > 0]) + \sum_{k=1}^{N-1} k \mathbb{P}([X > k]) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X > k]) \\ &\quad - \left(\sum_{k=1}^{N-1} k \mathbb{P}([X > k]) + N \mathbb{P}([X > N]) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X > k]) - N \mathbb{P}([X > N]) \\ &= -N q^N + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X > k]) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^N k \mathbb{P}([X = k]) = -N q^N + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X > k])$$

Ainsi :
$$\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X > k]) = \sum_{k=1}^N k \mathbb{P}([X = k]) + N q^N.$$

Les membres droits de l'égalité admettent une limite. Plus précisément :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N k \mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{E}(X) \quad \text{et} \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} N q^N = 0$$

On en déduit que le membre de gauche admet une limite et :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X > k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > k]) = \mathbb{E}(X)$$

Remarque

La démonstration consiste à démontrer un résultat de type somme télescopique.

On pouvait faire apparaître directement une telle somme en remarquant :

$$k \mathbb{P}([X = k]) = (k-1) \mathbb{P}([X > k-1]) - k \mathbb{P}([X > k]) + \mathbb{P}([X > k-1])$$

Ainsi, par sommation et linéarité :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N k \mathbb{P}([X = k]) \\ &= \sum_{k=1}^N \left((k-1) \mathbb{P}([X > k-1]) - k \mathbb{P}([X > k]) \right) + \sum_{k=1}^N \mathbb{P}([X > k-1]) \\ &= \cancel{(1-1) \mathbb{P}([X > 1-1])} - N \mathbb{P}([X > N]) + \sum_{k=1}^N \mathbb{P}([X > k-1]) \\ &= -N \mathbb{P}([X > N]) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X > k]) \end{aligned}$$

3) D'après ce qui précède :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}.$$

□

IV.2. Loi de Poisson

a) Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si :
 - a) $X(\Omega) = \mathbb{N}$
 - b) $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X = k]) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$
- On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ pour signifier que X suit la loi de Poisson de paramètre λ .

Le B0 suggère d'introduire la loi de Poisson comme loi limite.

On considère $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ où $\lambda > 0$.
On démontre alors :

$$\mathbb{P}([X_n = k]) = \binom{n}{k} \times \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathbb{P}([X = k])$$

où X est une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

La loi de Poisson apparaît comme la limite de lois binomiales $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$. Ainsi, si n grand (et donc $\frac{\lambda}{n}$ proche de 0) la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ est une bonne approximation de la loi $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$.

b) Espérance / variance

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ ($\lambda > 0$). Alors :

1) La v.a.r. admet une espérance et une variance.

2) $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\mathbb{V}(X) = \lambda$

MÉTHODO

Calcul de probabilités (bilan du chapitre)

Afin de résoudre un exercice de calcul de probabilités, il faudra penser au schéma suivant.

0) Introduction des événements basiques (le fait d'avoir tiré une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage, le fait d'avoir obtenu pile au $i^{\text{ème}}$ tirage, le fait d'avoir obtenu un 6 au $i^{\text{ème}}$ tirage ...) liés à l'expérience considérée.

Nommage de l'événement A dont on cherche à déterminer la probabilité.

(ces deux étapes sont parfois directement données dans l'énoncé)

1) Décomposition de l'événement A à l'aide d'événements basiques.

2) Deux cas se présentent alors :

(i) si cette décomposition fait apparaître une union, il faut retenir le triptyque :

union / incompatibilité / somme

Dans le cas d'une union finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette union (cas d'une union d'une suite croissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles.
 - × si c'est le cas, on utilise l'additivité de \mathbb{P} .
 - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la formule du crible.

Dans le cas d'une union infinie d'événements

- On vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles :
 - × si c'est le cas, on utilise la σ -additivité de \mathbb{P} .
 - × si ce n'est pas le cas, on se ramène au cas d'une union finie d'événements en utilisant le théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une intersection d'événements en considérant la formule liant probabilité d'un événement à la probabilité de l'événement contraire.

(ii) si cette décomposition fait apparaître une intersection, il faut retenir le triptyque :

intersection / indépendance / produit

Dans le cas d'une intersection finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette intersection (cas d'une intersection d'une suite décroissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont mutuellement indépendants.
 - × si c'est le cas, on utilise la formule associée.
 - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la Formule des Probabilités Composées (FPC).

Dans le cas d'une intersection infinie d'événements

- On se ramène au cas d'une intersection finie d'événements en utilisant le théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une union d'événements en considérant la formule liant probabilité d'un événement à la probabilité de l'événement contraire.

Remarque

- Il est à noter que la Formule des Probabilités Totales (FPT) rentre dans ce schéma. En effet, si la famille $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements, alors tout événement B s'écrit comme une réunion d'événements 2 à 2 incompatibles.

$$B = \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$$

- L'étape de décomposition des événements est **primordiale**.
On raisonne TOUJOURS sur les événements et JAMAIS directement sur les probabilités.

~~$\mathbb{P}(A) = 0$ car c'est la probabilité d'obtenir ...~~

(cf démarche de l'exercice sur la limite monotone)

- Lorsqu'il s'agit de raisonner sur les événements, on adopte la rédaction suivante :

~~L'événement A signifie que ...~~

L'événement A est réalisé si et seulement si ... ✓

- Afin de déterminer une probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(B)$ on pourra rédiger comme suit :

Si l'événement A est réalisé, c'est que ...

Dans ce cas, l'événement B est réalisé si et seulement si ...

- Dans un énoncé de probabilités discrètes, on manipule différents niveaux d'objets.

1) Au premier niveau, on trouve l'expérience aléatoire considérée.

On note Ω l'univers des possibles : c'est l'**ensemble** des résultats possibles (appelés aussi issues) de l'expérience. Si on considère l'expérience consistant à effectuer trois lancers successifs d'une même pièce, alors : $\Omega = \{P, F\}^3$.

Autrement dit, Ω est l'ensemble des triplets à coefficients dans l'ensemble $\{P, F\}$.

Ces triplets pourront être nommés des 3-lancers (on s'adapte ainsi au vocabulaire des probabilités).

Par exemple, $\omega = (F, F, P)$ est un 3-lancer qui est un résultat possible de l'expérience. Ce résultat est obtenu si le 1^{er} lancer fournit *Face*, le 2^{ème} fournit *Face*, le 3^{ème} fournit *Pile*.

2) Au deuxième niveau, on trouve les événements : un événement A n'est rien d'autre qu'un **ensemble** qui regroupe certaines issues de l'expérience. Ainsi : $A \subset \Omega$ (un événement est un sous-ensemble de l'univers). Par exemple, l'événement P_1 : « obtenir *Pile* au premier lancer » regroupe tous les 3-lancers dont le premier coefficient vaut P .

$$P_1 = \{ (P, F, F), (P, F, P), (P, P, F), (P, P, P) \}$$

Par exemple, $\omega = (P, F, F) \in P_1$. Lorsque $\omega \in P_1$, on dit que ω **réalise** l'événement P_1 .

3) Au troisième niveau, on trouve les v.a.r. . Ce sont des **applications** particulières :

– elles prennent comme argument un **résultat possible de l'expérience** et renvoient une **valeur réelle**. Considérons la v.a.r. X qui donne le nombre de *Pile* obtenus au cours de l'expérience. Avec le 3-lancer ω précédent, on obtient : $X(\omega) = X((P, F, F)) = 1$.

Cela démontre que la v.a.r. X peut prendre la valeur 1 (on a exhibé un 3-lancer ω tel que $X(\omega) = 1$).

– elles sont des machines à créer des événements. Par exemple, $[X = 2]$ est un événement.

Il regroupe **tous** les 3-lancers ω tels que : $X(\omega) = 2$.

Autrement dit : $[X = 2] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 2\} = \{ (P, P, F), (P, F, P), (F, F, P) \}$.

Ce deuxième point nous replonge au deuxième niveau. Ainsi, pour comprendre le chapitre sur les v.a.r. , il est donc essentiel de maîtriser celui sur les probabilités générales.

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

Les questions de cours pour cette semaine sont les suivantes :

- Formule des Probabilités Totales (FPT). Énoncé et démonstration.
- Formule des probabilités composées. Énoncé et illustration : savoir déterminer la probabilité de tirer successivement trois boules blanches dans une urne comportant des boules blanches et noires (ou énoncé similaire).
- sur le théorème de la limite monotone. Énoncé du deuxième théorème (pas la démonstration).
Application :
 - × savoir calculer la probabilité de n'obtenir que des 6 lors d'une suite infinie de lancers de dé ;
 - × savoir calculer la probabilité d'obtenir (au moins) un 6 au cours de la partie.

Exercices types

Il n'y a pas d'exercices types cette semaine. Il y aura :

- des exercices de probabilité (qui traitent d'événements ou de v.a.r.) qui mettent en œuvre la méthodologie précédente.
- des exercices de dénombrement.

Les compétences attendues cette semaine sur le chapitre des v.a.r. discrètes sont les suivantes :

- savoir déterminer l'ensemble image d'une v.a.r. (savoir en déduire si la v.a.r. étudiée est discrète).
- savoir déterminer la loi d'une transformée d'une v.a.r. .
- savoir reconnaître une loi usuelle et connaître la rédaction associée (**1**) description de l'expérience, **2** description de la v.a.r. **3**) conclusion).