Colles

semaine 10 : 15 novembre - 20 novembre

I. Questions de cours

Exercice 1

Soient E et F des espaces vectoriels.

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ un isomorphisme.

Que peut-on dire de u^{-1} .

Exercice 2

La loi géométrique est sans mémoire. Énoncé et démonstration.

Exercice 3

Soient E et F des espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

a) Démontrer que $\text{Ker}(f)$ est un espace vectoriel.

b) Démontrer que $\text{Im}(f)$ est un espace vectoriel.

Exercice 4

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ alors $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X > k] \big)$.

II. Autres exercices

Exercice 5

Trois personnes a_1, a_2, a_3 entrent à l'instant 0 dans un bureau de poste qui ne comporte que deux guichets. Les personnes a_1 et a_2 peuvent être servies immédiatement alors que a_3 doit attendre qu'un guichet soit libéré pour être servie. On supposera que le temps est mesuré par des nombres entiers avec une unité fixée.

Soit $p \in \,]0, 1[$. On suppose que pour $i \in \{1, 2, 3\}$ le temps de service de la personne a_i est une variable aléatoire X_i dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}([X_i = k]) = (1 - p) \ p^k$$

On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes.

On désigne par Y l'instant de première sortie (celle de a_1 ou a_2) qui est aussi l'instant où a_3 commence à se faire servir. Enfin, Z désigne l'instant de sortie de a_3.

1. Exprimer l'événement $[Y \geqslant k]$ à l'aide des variables aléatoires X_1 et X_2.
Calculer pour tout entier $k \geqslant 0$, le nombre $\mathbb{P}([Y \geqslant k])$. Déterminer alors la loi de Y.

2. Exprimer Z en fonction de Y et X_3. Déterminer la loi de Z.

3. Calculer le temps moyen passé par a_3 à la poste.

Exercice 6
On considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par P_n l'événement « Pile apparaît au $n^{\text{ème}}$ lancer » et par F_n l'événement « Face apparaît au $n^{\text{ème}}$ lancer ».
Soit Y la v.a.r. désignant le rang du lancer où, pour la première fois, apparaît un Face précédé d'au moins deux Pile si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si cette configuration n'apparaît jamais.
On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On pose $c_1 = c_2 = 0$ et pour tout $n \geqslant 3$, $c_n = \mathbb{P}([Y = n])$. On note également :

$$\forall n \geqslant 3,\ B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n \quad \text{et} \quad U_n = \bigcup_{i=3}^{n} B_i$$

On pose enfin $u_1 = u_2 = 0$ et pour tout $n \geqslant 3$, $u_n = \mathbb{P}(U_n)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est monotone et convergente.

2. ***a)*** Pour tout $n \geqslant 3$, calculer $\mathbb{P}(B_n)$.

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, les événements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.

c) Calculer les valeurs de u_3, u_4 et u_5.

3. Dans cette question, on suppose $n \geqslant 5$.

a) Comparer les événements $U_n \cap B_{n+1}$ et $U_{n-2} \cap B_{n+1}$. Préciser leurs probabilités respectives.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

d) Calculer $\mathbb{P}([Y = 0])$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = 1 - u_n$.

a) Trouver $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \beta v_{n+2} + \gamma v_{n+3}$.

b) Montrer que la série de terme général v_n est convergente et calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Exercice 7
Un canal de transmission transmet des bits avec erreur selon le modèle suivant : il transmet fidèlement un bit avec probabilité p et de façon erronée avec probabilité $1 - p$ avec $p \in [0, 1]$.
On considère n canaux en série, et que chaque canal fonctionne indépendamment des autres. On note X_k le bit reçu en sortie du $k^{\text{ème}}$ canal et X_0 le bit à l'entrée du premier canal.
On désire calculer la probabilité qu'au bout des n canaux, le signal reste inchangé.

1. Que vaut $\mathbb{P}_{[X_k=0]}([X_{k+1} = 1])$ et $\mathbb{P}_{[X_k=1]}([X_{k+1} = 1])$?

2. Posons $A_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 1]) \\ \mathbb{P}([X_n = 0]) \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Montrer que $A_{n+1} = MA_n$.

3. On admet que $M = P^{-1}DP$ où P et D sont deux matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définies par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}$$

En déduire la probabilité qu'un bit soit fidèlement transmis au bout de n canaux.
Que dire à la limite ?

Exercice 8
On considère un dé à 6 faces, que l'on lance une infinité de fois. Une face est rouge et les 5 autres faces sont bleues. On écrit sous forme d'une suite les résultats successifs obtenus, par exemple $BRRBBBRRRBRBRRR\dots$ (B signifiant bleu et R rouge).
On s'intéresse à la première série de nombres obtenus, c'est-à-dire la première série constituée uniquement de B si on obtient un B au premier lancer, ou la première série constituée uniquement de R si on obtient un R au premier lancer.
Par exemple :

1. $BBBRBR\dots$: la première série est BBB.

2. $RBRBBBRBB\dots$: la première série est réduite à R.

3. $RRRRRRRRRBR\dots$: la première série est $RRRRRRRR$.

On appelle X la variable aléatoire correspondant à la longueur de la première série.
Déterminer la loi de X et l'espérance de X.

Exercice 9
N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Un joueur lance une pièce équilibrée indéfiniment. On note X_N la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de fois où, au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs ont été différents. On peut appeler X_N le « nombre de changements » au cours de N premiers lancers.
Par exemple, si les $N = 9$ premiers lancers ont donné successivement :
Pile, Pile, Face, Pile, Face, Face, Face, Pile, Pile, alors la variable X_9 aura pris la valeur 4 (quatre changements aux $3^{\text{ème}}$, $4^{\text{ème}}$, $5^{\text{ème}}$ et $8^{\text{ème}}$ lancers).

1. Justifier que $X_N(\Omega) = [\![0, N-1]\!]$.

2. Déterminer la loi de X_2, ainsi que son espérance. Déterminer la loi de X_3.

3. Montrer : $\mathbb{P}([X_N = 0]) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{N-1}$ et $\mathbb{P}([X_N = 1]) = 2(N-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{N}$.

4. ***a)*** Justifier que pour tout entier $k \in [\![0, N-1]\!]$, $\mathbb{P}_{[X_N=k]}([X_{N+1} = k]) = \dfrac{1}{2}$.

b) En déduire que pour tout entier $k \in [\![0, N-1]\!]$:

$$\mathbb{P}\left([X_{N+1} - X_N = 0] \cap [X_N = k]\right) = \frac{1}{2}\mathbb{P}([X_N = k])$$

c) En sommant cette relation pour k variant de 0 à $N-1$, montrer :

$$\mathbb{P}\left([X_{N+1} - X_N = 0]\right) = \frac{1}{2}$$

d) Montrer que la variable $X_{N+1} - X_N$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
En déduire la relation $\mathbb{E}(X_{N+1}) = \dfrac{1}{2} + \mathbb{E}(X_N)$, puis donner $\mathbb{E}(X_N)$ en fonction de N.

5. ***a)*** Montrer grâce aux résultats ***4.b)*** et ***4.c)*** que les variables $X_{N+1} - X_N$ et X_N sont indépendantes.

b) En déduire par récurrence sur N que X_N suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(N-1, \dfrac{1}{2}\right)$.
En déduire la variance $\mathbb{V}(X_N)$.

Exercice 10

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On effectue des tirages successifs d'un jeton avec remise. X est la v.a.r. égale au rang du premier tirage qui amène, pour la première fois, un jeton différent des jetons tirés précédemment.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note A_i : « le jeton numéro i est obtenu au premier tirage ».

1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, calculer $\mathbb{P}_{A_i}\big([X = k]\big)$.

2. En appliquant la formule des probabilités totales, déterminer la loi de X.

3. Déterminer la loi de $Y = X - 1$. La reconnaître et en déduire sans calculs $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 11

1. On effectue une succession (infinie) de lancers d'un dé équilibré.
On note X le rang du premier 1 obtenu.

a) Rappeler la loi de X, son espérance et sa variance.

b) Calculer $\mathbb{P}([X \leqslant k])$ puis $P([X > k])$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2. On effectue une succession (infinie) de lancers d'un dé à 6 faces équilibré.
On note Y_n le rang d'apparition du $n^{\text{ème}}$ 1 obtenu.
Pour tout $M \in \mathbb{N}^*$, on note également C_M la variable aléatoire égale au nombre de 1 obtenus au cours des M premiers lancers.

a) Déterminer la loi de C_M.

b) Soit $k \geqslant n$, exprimer l'événement $[Y_n = k]$ à l'aide de la variable aléatoire C_{k-1} et de l'événement A_k : « obtenir la face 1 au $k^{\text{ème}}$ lancer ».

c) En déduire la loi de Y_n.

Exercice 12

1. On considère une v.a.r. X telle que : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
Déterminer l'espérance de la v.a.r. $Y = (-1)^X$.

2. On considère une v.a.r. X telle que : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.
Déterminer l'espérance de la v.a.r. $Y = \dfrac{1}{X+1}$.

Exercice 13

1. On effectue une succession (infinie) de lancers d'un dé équilibré. On note X le rang du premier 1 obtenu.

a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

b) Calculer $\mathbb{P}([X \leqslant k])$ puis $P([X > k])$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2. On effectue une succession (infinie) de lancers d'un dé à 6 faces équilibré.
On note Y_n le rang d'apparition du $n^{\text{ème}}$ 1 obtenu.
On note également C_M la variable aléatoire égale au nombre de 1 obtenus au cours des M premiers lancers.

a) Déterminer la loi de C_M.

b) Soit $k \geqslant n$, exprimer l'événement $[Y_n = k]$ à l'aide de la variable aléatoire C_{k-1} et de l'événement A_k : « obtenir la face 1 au $k^{\text{ème}}$ lancer ».

c) En déduire la loi de Y_n.

Exercice 14

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On effectue des tirages successifs d'un jeton avec remise. X est la v.a.r. égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois deux numéros distincts.
On note A_i : « le jeton numéro i est obtenu au premier tirage ».

1. Calculer $\mathbb{P}_{A_i}([X = k])$.

2. En appliquant la formule des probabilités totales, déterminer la loi de X.

3. Déterminer la loi de $Y = X - 1$. La reconnaître et en déduire sans calculs $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 15

Soit p un réel appartenant à l'intervalle ouvert $]0;1[$. On note $q = 1 - p$.
On dispose dans tout l'exercice d'une même pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut p.
On procède à l'expérience consistant en succession illimitée de lancers de la pièce. On note :

× pour tout entier naturel non nul n, X_n la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n premiers lancers de la pièce ;

× pour tout entier naturel non nul j, F_j : « La pièce donne FACE lors du j-ième lancer » ;

× Y la v.a.r. égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du second PILE.

Par exemple, si les lancers ont donné dans cet ordre :

FACE, PILE, FACE, FACE, FACE, PILE

alors Y prend la valeur 4.

1. Soit n un entier naturel non nul.

   a) Donner la loi de X_n.

   b) Préciser la valeur de son espérance $\mathbb{E}(X_n)$ et de sa variance $\mathbb{V}(X_n)$.

2. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire Y.

3. Donner les valeurs des probabilités :

$$\mathbb{P}([Y = 0]), \quad \mathbb{P}([Y = 1]) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Y = 2])$$

4. Soit n un entier naturel. Comparer les événements :

$$[Y = n] \quad \text{et} \quad [X_{n+1} = 1] \cap \overline{F_{n+2}}$$

5. Prouver :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y = n]) = (n+1)p^2q^n$$

6. Vérifier par le calcul :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = n]) = 1$$

7. Démontrer que la variable aléatoire Y possède une espérance $\mathbb{E}(Y)$ et donner sa valeur.

8. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note Y_k la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du $k^{\text{ème}}$ PILE. En particulier, on a $Y_2 = Y$.
En généralisant la méthode utilisée dans les questions précédentes, déterminer la loi de Y_k.

Exercice 16

Toutes les v.a.r. de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Soit $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. mutuellement indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre $p \in\,]0,1[$.

Soit N une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des U_i et X et Y les v.a.r. définies par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} U_i(\omega) \qquad \text{et} \qquad Y = N - X$$

1. Vérifier que pour tout $(\ell, k) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}\big([X = k]\cap[Y = \ell]\big) = \dbinom{k+\ell}{k} p^k(1-p)^\ell\, \mathbb{P}\big([N = k+\ell]\big)$.

2. On suppose que N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

a) Déterminer la loi de X.

b) Montrer que les v.a.r. X et Y sont indépendantes.

3. On suppose que X et Y sont indépendantes et que N prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose également : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big([X = k]\big) \neq 0$ et $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big([Y = \ell]\big) \neq 0$.

a) Vérifier que pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$:

$$(k+1)\ \mathbb{P}\big([X = k+1]\big)\mathbb{P}\big([Y = \ell]\big)\ (1-p) \ = \ (\ell+1)\ \mathbb{P}\big([X = k]\big)\mathbb{P}\big([Y = \ell+1]\big)\ p$$

b) En déduire la loi suivie par X puis celle suivie par Y.

c) Justifier que N suit une loi de Poisson. Préciser son paramètre.

Exercice 17

Une pièce truquée donne Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q = 1-p$.

On propose l'expérience suivante pour « rééquilibrer » la pièce.

- L'expérience est constituée d'une suite de parties consécutives.
- Chaque partie consiste à lancer la pièce *deux fois de suite.*
  - × Si à l'issue d'une partie on obtient deux fois le même résultat (2 Pile ou 2 Face), on refait une partie ;
  - × Si à l'issue d'une partie on obtient deux résultats différents, alors on arrête l'expérience et on rend le résultat du dernier lancer.
- L'expérience est modélisée à l'aide d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Soit T la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour que l'expérience se termine.

1. Écrire un script **Scilab** qui simule la variable aléatoire T.

2. Donner l'ensemble des valeurs prises par T. En déduire $\mathbb{P}\big([T = 2k+1]\big)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

3. *a)* Calculer $\mathbb{P}\big([T = 2k]\big)$, pour $k \in \mathbb{N}$ (on pourra s'intéresser à l'événement $A = [X_1 = X_2]$, où X_1 et X_2 sont les v.a.r. donnant respectivement le résultat du 1er et du 2ème lancer.

b) En déduire que l'expérience se termine presque sûrement.

c) Calculer l'espérance de T.

4. Soit R la variable aléatoire donnant le résultat de l'expérience. Donner la loi de R.

Exercice 18

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0;1[$ et on note $q = 1 - p$.
On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes deux la même loi géométrique de paramètre p.

1. On pose $Z = \min(X, Y)$ et on admet que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Démontrer, pour tout entier naturel k : $[Z > k] = [X > k] \cap [Y > k]$.

b) Pour tout entier naturel k, calculer $\mathbb{P}([Z > k])$.

c) En déduire que Z suit une loi géométrique.

2. On définit la variable aléatoire T de la façon suivante :
Pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel pair, on pose $T(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{2}$, et, pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel impair, on pose $T(\omega) = \dfrac{1 + X(\omega)}{2}$.
On admet que T est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Montrer que T prend des valeurs entières non nulles.

b) Réciproquement, justifier que tout entier naturel k non nul est élément de $T(\Omega)$ et en déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

c) Exprimer l'événement $[T = k]$ en fonction de certains événements $[X = i]$ puis montrer que T suit la même loi que Z.

Exercice 19

Deux joueurs A et B s'affrontent dans un jeu de la manière suivante :
A joue le premier et jette deux dés : si la somme des points obtenus est 5, A gagne.
Le jeu cesse alors.
Sinon, B joue à son tour et jette deux dés : si la somme des points obtenus est 7, B gagne.
Le jeu cesse alors.
Sinon, le tour revient à A et on poursuit comme ci-dessus jusqu'à ce que A ou B ait gagné.

1. *a)* Déterminer la probabilité pour que la somme des points lors du jet de deux dés soit égale à 5.

b) Déterminer la probabilité pour que la somme des points lors du jet de deux dés soit égale à 7.

2. *a)* Déterminer la probabilité pour que A gagne au $(2n+1)^{\text{ème}}$ jet des deux dés ($n \geqslant 0$).

b) Déterminer la probabilité pour que B gagne au $(2n+2)^{\text{ème}}$ jet des deux dés ($n \geqslant 0$).

3. En déduire les probabilités a et b pour que A et B gagnent le jeu.

4. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de jets de deux dés pour que le jeu s'arrête.
Montrer que N admet une espérance et la déterminer.

Exercice 20
On considère une urne contenant $n+1$ boules numérotées de 0 à n.
On y effectue une suite de tirages d'une boule à la fois avec remise.
On définit la suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

× X_1 est la variable aléatoire certaine égale à 1 ;

× pour $p \geqslant 2$, X_p prend la valeur 1 si le numéro obtenu au $p^{\text{ème}}$ tirage n'a pas déjà été obtenu au cours des tirages précédents et X_p prend la valeur 0 dans le cas contraire.

1) Déterminer la loi de X_2.

2) Montrer que X_p suit la loi de Bernoulli de paramètre $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{p-1}$.

3) ***a.*** Montrer que :
$$\forall i < j,\ \mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \frac{(n-1)^{i-1} n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$$

b. En déduire la loi du produit $X_i X_j$.

4) Soit $N \geqslant 2$. On note Z_N la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des N premiers tirages. Exprimer Z_N en fonction de X_k et en déduire son espérance.

Exercice 21
Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$. On dispose d'un paquet de n cartes C_1, C_2, ..., C_n que l'on distribue intégralement, les unes après les autres entre n joueurs J_1, J_2, ..., J_n selon le protocole suivant :

× la première carte C_1 est donnée à J_1 ;

× la deuxième carte C_2 est donnée de façon équiprobable entre J_1 et J_2 ;

× la troisième carte C_3 est donnée de façon équiprobable entre J_1, J_2 et J_3 ;

× et ainsi de suite, jusqu'à la dernière carte C_n qui est donc distribuée de façon équiprobable entre les joueurs J_1, ..., J_n.

On suppose l'expérience modélisée sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de joueurs qui n'ont reçu aucune carte à la fin de la distribution.

1. Déterminer $X_n(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}([X_n = 0])$ et $\mathbb{P}([X_n = n-1])$.

2. Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note B_i la v.a.r. qui vaut 1 si J_i n'a reçu aucune carte à la fin de la distribution et vaut 0 sinon.
Déterminer la loi de B_i. Exprimer la v.a.r. X_n en fonction des v.a.r. B_i et en déduire l'espérance de X_n.

3. En faisant le moins de calculs possibles, donner la loi de X_4.

4. ***a)*** Montrer que pour i et j dans $[\![1, n]\!]$ tels que $i < j$, on a :
$$\mathbb{P}([B_i = 1] \cap [B_j = 1]) = \frac{(i-1)(j-2)}{n(n-1)}$$

En déduire la covariance des v.a.r. B_j et B_j.

b) Montrer que : $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{n+1}{12}$.

Exercice 22
Une urne contient n boules noires (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et deux boules blanches. On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule, sans remise. On note :

× X la v.a.r. égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

× Y la v.a.r. égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la seconde boule blanche.

× Pour tout $i \in [\![1, n+2]\!]$, N_i (resp. B_i) l'événement « le $i^{\text{ème}}$ tirage amène une boule noire (resp. blanche) ».

1. a) Préciser $X(\Omega)$. Décrire, pour tout $k \in X(\Omega)$, l'événement $[X = k]$ à l'aide des événements N_i et B_i.

b) Montrer que pour tout $k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}$.

c) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

2. a) Déterminer $Y(\Omega)$.

b) Déterminer la loi jointe du couple (X, Y).

c) En déduire la loi de Y.

d) Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

3. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$. Commenter son signe.

Exercice 23
On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.
On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard et on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note : B_k l'événement : « on obtient une boule bleue au $k^{\text{ème}}$ tirage »,
R_k l'événement : « on obtient une boule rouge au $k^{\text{ème}}$ tirage ».

Partie I : Simulation informatique

1. Recopier et compléter la fonction suivante afin qu'elle simule l'expérience étudiée et renvoie le nombre de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages, l'entier n étant entré en argument.

```
function s = EML(n)
    b = 1 // b désigne le nombre de boules bleues présentes dans l'urne
    r = 2 // r désigne le nombre de boules rouges présentes dans l'urne
    s = 0 // s désigne le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages
    for k = 1:n
        x = rand()
        if ... then
            ...
        else
            ...
        end
    end
endfunction
```

2. On exécute le programme suivant :

```
n = 10
m = 0
for i = 1:1000
    m = m + EML(n)
end
disp(m/1000)
```

On obtient 6.657. Comment interpréter ce résultat ?

Partie II : Rang d'apparition de la première boule bleue et rang d'apparition de la première boule rouge

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue et la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

3. *a)* Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Y = n]) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? une variance ?

4. Déterminer la loi de Z. La v.a.r. admet-elle une espérance ? une variance ?

Partie III : Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

On définit, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si l'on obtient une boule rouge au $k^{\text{ème}}$ tirage et égale à 0 sinon.
On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges obtenues au cours des n premiers tirages.

5. Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre S_n et certaines variables aléatoires X_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

6. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.

7. *a)* Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).

b) En déduire la loi de X_2.

c) Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

a) Calculer $\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$.

b) Justifier : $\mathbb{P}([S_n = k]) = \dbinom{n}{k}\ \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$,

puis en déduire : $\mathbb{P}([S_n = k]) = \dfrac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$.

9. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et : $\mathbb{E}(S_n) = \dfrac{2n}{3}$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}_{[S_n = k]}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{k+2}{n+3}$.

b) En déduire : $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{\mathbb{E}(S_n) + 2}{n+3}$.

c) Déterminer alors la loi de la variable aléatoire X_{n+1}. Que remarque-t-on ?

Oraux HEC

Exercice 24
Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

- Soit p, q et r des réels fixés de l'intervalle $]0,1[$ tels que $p+q+r=1$.
- Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,0,1\}$, indépendantes et de même loi donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X_n=1]) = p,\ \mathbb{P}([X_n=-1]) = q,\ \mathbb{P}([X_n=0]) = r.$$

- On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $Y_n = \prod\limits_{k=1}^{n} X_k$.

1. ***a)*** Pour tout entier $n \geqslant 1$, préciser $Y_n(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}([Y_n = 0])$.

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{E}(Y_n)$.

2. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = \mathbb{P}([Y_n = 1])$.

a) Calculer p_1 et p_2.

b) Établir une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.

c) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$p_n = \frac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2}$$

d) Pouvait-on à l'aide de la question 2, trouver directement la loi de Y_n ?

3. ***a)*** Établir l'inégalité : $(p+q)^n > (p-q)^{2n}$. Calculer $\mathbb{V}(Y_n)$.

b) Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$ des deux variables aléatoires Y_n et Y_{n+1}.

Exercice 25
Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Soit $p \in \,]0,1[$ et $q = 1-p$.

1. On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie. On suppose qu'à chaque lancer la probabilité d'obtenir Pile est égale à p. On notera P et F les évènements « Obtenir Pile » et « Obtenir Face ».
On définit les variables aléatoires X_1 et X_2 de la façon suivante :

× X_1 vaut k si le premier Pile de rang impair s'obtient au rang $2k-1$ (entier qui représente le $k^{\text{ème}}$ nombre impair de $\mathbb{N}^*$),

× X_2 vaut k si le premier Pile de rang pair s'obtient au rang $2k$ (entier qui représente le k-ième nombre pair de $\mathbb{N}^*$.

Par exemple si l'on obtient (F,P,F,F,F,P,P) alors X_1 prend la valeur 4 et X_2 prend la valeur 1. On posera $X_1 = 0$ (respectivement $X_2 = 0$) si Pile n'apparaît à aucun rang impair (respectivement à aucun rang pair).

a) Prouver que $\mathbb{P}([X_1 = 0]) = \mathbb{P}([X_2 = 0]) = 0$.

b) Calculer $\mathbb{P}([X_1 = 1])$ et $\mathbb{P}([X_2 = 1])$. Déterminer les lois de X_1 et de X_2. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

c) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y égale au minimum de X_1 et de X_2.

2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.

a) Montrer que la variable aléatoire $Y = \left\lfloor \dfrac{X+1}{2} \right\rfloor$ suit une loi géométrique ($\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du nombre x).

b) Montrer que les variables aléatoires Y et $2Y - X$ sont indépendantes.

Exercice avec préparation 1

1. Question de cours

a) Définition et propriétés de la loi géométrique.

b) Compléter la ligne de code **Scilab** contenant des points d'interrogation pour que la fonction `geo` suivante fournisse une simulation de la loi géométrique dont le paramètre est égal à l'argument p de la fonction.

```
function x = geo(p)
    x = 1;
    while rand() ???
        x = x + 1;
    end;
endfunction
```

Une urne contient trois jetons numérotés 1, 2 et 3. On effectue dans cette urne, une suite de tirages d'un jeton avec remise.

2. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux numéros successifs distincts.

a) Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Y - 1$.

b) Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ et la variance $\mathbb{V}(Y)$ de la variable aléatoire Y.

3. On note Z la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, les trois numéros.

a) Soit deux entiers $k \geqslant 2$ et $\ell \geqslant 3$.
Calculer $\mathbb{P}([Y = k] \cap [Z = \ell])$ selon les valeurs de k et ℓ.

b) En déduire que, pour tout entier $\ell \geqslant 3$, on a : $\mathbb{P}([Z = \ell]) = \dfrac{2}{3} \left(\dfrac{2^{\ell-2} - 1}{3^{\ell-2}} \right)$.

c) Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

4. D'une manière plus générale, calculer l'espérance de la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, tous les numéros, dans l'hypothèse où l'urne contient au départ n jetons, numérotés de 1 à n.

Exercice 26

On note f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$, par : $f((x, y, z)) = (y + z, y, x + y)$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

b. Déterminer le noyau de f. En déduire le rang de f.

c. Déterminer l'image de f.

d. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

e. Montrer que $H = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = u\}$ est un espace vectoriel réel.
Déterminer une base de H.

f. On note F l'ensemble défini par $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ y = 0\}$.
Montrer que f stabilise F, *i.e* $f(F) \subset F$.

Exercice 27
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
On note f l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe la matrice $f(M) = AMB$.

1) Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$.

2) Calculer $f(M)$ pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. En déduire le noyau de f puis le rang de f.

3) f est-elle un automorphisme ?

4) On note $E_2 = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid f(M) = 2M\}$.

a. Montrer que E_2 est un espace vectoriel réel.

b. Déterminer une base de E_2.

Exercice 28
On considère l'application u définie par :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & Q(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X) \end{array}$$

a. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

b. Déterminer $\ker(u)$. En déduire le rang de u.

c. Déterminer $\mathrm{Im}(u)$.

Exercice 29
Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par : $f \ : \ P \mapsto P(X) + (1 - X)\, P'(X)$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

b. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$, puis $\ker(f)$.

c. Quel est le rang de f ? Est-ce un automorphisme ?

Exercice 30
Soit $\varphi \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_4[X] \\ P & \longmapsto & (X^2 + X)\, P'(X) - (2X + 1)\, P(X) \end{array}$

a. Montrer que φ est une application linéaire.

b. Déterminer le noyau de φ. En déduire le rang de φ.

c. Déterminer l'image de φ.

d. L'application φ est-elle un isomorphisme ?

Exercice 31
Soit Φ l'application qui à tout polynôme $P(X)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ associe le polynôme :

$$\Phi(P)(X) = 3X\, P'(X) + (X^2 - 1)\, P''(X)$$

a. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

b. Déterminer le noyau de Φ puis le rang de Φ.

c. Déterminer l'image de Φ.

d. L'endomorphisme Φ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$?

Exercice 32
On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x-2y+3z \\ 2x+y+z \\ -x-y+z \\ 3x+2y+z \end{pmatrix} \end{array}$$

a. Montrer que f est une application linéaire.

b. Montrer que f est injective. En déduire le rang de f.

c. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 33
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.
Soit f l'application de $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ dans lui-même qui à une matrice M associe $f(M) = A^2N - AN$.

a. Démontrer que f est linéaire.

b. Déterminer le noyau de f ; on en donnera une base et la dimension.

c. Quelle est le rang de f ?

d. L'application f est-elle un automorphisme ?

Exercice 34
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
On dit qu'un endomorphisme f de E est un projecteur si $f \circ f = f$.
On considère p et q deux projecteurs de E.

a. Montrer que $p+q$ est un projecteur de E si, et seulement si, $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

b. On suppose dans cette question que $p+q$ est un projecteur de E.
Montrer :

$$\ker(p+q) = \ker(p) \cap \ker(q)$$

$$\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \{0_E\}$$

$$\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$$

(si A et B sont deux espaces vectoriels, on note $A + B = \{a + b \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$.

Exercice 35 (ECRICOME 2020)
Dans cet exercice, on désigne par $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3, et on note I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Soit a un réel ; on pose $M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie A : Étude du cas où $a = 1$

Dans toute cette partie, on suppose que $a = 1$.

1. Expliciter la matrice M, puis calculer $(M - I_3)^2$.

2. En déduire l'unique valeur propre possible de M.

3. La matrice M est-elle inversible ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie B : Étude du cas où $a = 0$

Dans cette partie, on suppose que $a = 0$.

4. Démontrer que 1 est une valeur propre de M, et donner une base et la dimension du sous-espace propre associé.

5. Démontrer que M n'est pas inversible.

6. En utilisant les deux questions précédentes, déterminer l'ensemble des valeurs propres de M, et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie C : Étude du cas où a est différent de 0 et de 1

Dans cette partie, on suppose que a est différent de 0 et de 1.
On pose $E = \mathbb{R}^3$, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice M.
Soit $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 0)$.

7. Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de E.

8. Calculer $f(u)$, $f(v)$.

9. Calculer $f(w)$ et trouver deux réels α et β tels que $f(w) = \alpha v + \beta w$.

10. Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$, que l'on notera T.

11. En déduire l'ensemble des valeurs propres de M, et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 36 (ECRICOME 2019)
On considère dans cet exercice l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, dont on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie A

1. ***a)*** Calculer A^2 puis vérifier que A^3 est la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Justifier que 0 est l'unique valeur propre possible de f.

c) Déterminer une base et la dimension du noyau de f.

d) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Soient $e'_1 = (-1, -1, 1)$, $e'_2 = (2, -1, 1)$ et $e'_3 = (-1, 2, 1)$.

a) Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.

b) Démontrer que la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$ est la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On pose : $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On note h l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice M.

a) Déterminer deux réels α et β tels que $M = \alpha A + \beta I$, où I est la matrice identité d'ordre 3.

b) Déterminer la matrice M' de h dans la base $\mathscr{B}'$.

c) En déduire que M est inversible.

d) À l'aide de la question ***1.a)***, calculer $(M - I)^3$. En déduire l'expression de M^{-1} en fonction des matrices I, M et M^2.

e) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer M^n pour tout entier naturel n, en fonction des matrices I, A et A^2.
Cette formule est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Partie B

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme g de E vérifiant $g \circ g = f$.
On suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice V carrée d'ordre 3 telle que :

$$V^2 = T$$

On note g l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}'$ est V.

4. Montrer : $VT = TV$. En déduire : $g \circ f = f \circ g$.

5. ***a)*** Montrer que $g(e'_1)$ appartient au noyau de f.
En déduire qu'il existe un réel a tel que : $g(e'_1) = a \cdot e'_1$.

b) Montrer que $g(e'_2) - a \cdot e'_2$ appartient aussi au noyau de f.
En déduire qu'il existe un réel b tel que : $g(e'_2) \;=\; b \cdot e'_1 + a \cdot e'_2$.

c) Montrer : $f \circ g(e'_3) \;=\; g \circ f(e'_3) \;=\; a \cdot e'_2 + b \cdot e'_1$.
En déduire que $g(e'_3) - a \cdot e'_3 - b \cdot e'_2$ appartient au noyau de f.

d) En déduire qu'il existe un réel c tel que : $V \;=\; \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

6. Calculer V^2 en fonction de a, b et c, puis en utilisant l'hypothèse $V^2 = T$, obtenir une contradiction.

Exercice 37
f désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

1) On suppose :
$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \exists \lambda_x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = \lambda_x \cdot x$$

a. Écrire de deux manières différentes le vecteur $f(e_1 + e_2 + \ldots + e_n)$.

b. En déduire qu'il existe un réel λ tel que $f = \lambda$ id.

2) Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$.
Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ de la forme $(x, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n)$.

On note alors p_x l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par :
$$\forall (a, b_2, b_3, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n,\ f\left(a \cdot x + \sum_{k=2}^{n} b_k \cdot \varepsilon_k\right) = a \cdot x$$

a. Montrer que p_x est un endomorphime de $\mathbb{R}^n$.

b. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, on a
$$p_x(z) = z \;\Leftrightarrow\; z \in \operatorname{Vect}(x)$$

3) Montrer l'équivalence suivante :
$$\forall g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n),\ f \circ g = g \circ f \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ f = \lambda \text{id}$$

Exercice 38 (ECRICOME 2012)
$(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
Deux matrices A et B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ étant données, on suppose qu'il existe une matrice L appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$L = AL + B$$

On définit la suite de matrices $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} U_0 \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = A\,U_n + B \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence, pour tout entier naturel n :

$$U_n \ = \ L + A^n\,(U_0 - L)$$

Dans la suite du problème les matrices A et B sont choisies de telle sorte que :

$$A \ = \ \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B \ = \ \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On note :

- id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$;
- a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice A ;
- b l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice B ;
- $\mathrm{Im}(b)$ l'image de l'endomorphisme b ;
- $\mathrm{Im}(\mathrm{id} - a)$ l'image de l'endomorphisme $\mathrm{id} - a$.

2. Prouver que le vecteur $u = (x, y, z)$ appartient à l'image de b si et seulement si :

$$-x + y + z = 0$$

puis démontrer :

$$\mathrm{Im}(b) \ = \ \mathrm{Im}(\mathrm{id} - a)$$

3. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ peut être considérée comme la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à une base de vecteurs propres de a.

4. Écrire la matrice D de l'endomorphisme a ainsi que la matrice B' de l'endomorphisme b dans cette base de vecteurs propres.

5. Démontrer, pour tout entier naturel n,

$$A^n \ = \ P\,D^n\,P^{-1}$$

6. En écrivant convenablement D^n comme la somme de trois matrices diagonales judicieusement choisies, prouver l'existence de trois matrices E, F, G indépendantes de n telles que pour tout entier naturel n :

$$A^n \ = \ E + \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot F + \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot G.$$

Expliciter uniquement la matrice E sous la forme d'un tableau de nombres.

7. Déterminer par le calcul, une matrice L' de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$ telle que :

$$L' \; = \; D\,L' + B'$$

8. Montrer que la matrice $L = PL'P^{-1}$ vérifie :

$$L \; = \; A\,L + B$$

9. Établir : $E\,L = 0$.

10. Montrer que chacun des coefficients de la matrice U_n a pour limite, lorsque n tend vers $+\infty$, les coefficients de la matrice $E\,U_0 + L$.

Exercice 39 (`ECRICOME 2014`)
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

On considère les vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$u = (0, 1, -2) \qquad \text{et} \qquad v = (0, 1, -1)$$

On note $\text{Ker}(f)$ le noyau de f et $\text{Im}(f)$ son image. Si λ est une valeur propre de f, on désigne par $E_\lambda(f)$ l'espace propre de f associé à la valeur propre λ.

Partie I : Réduction de l'endomorphisme f

1. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.

2. Justifier que f n'est pas bijectif. En déduire, *sans le moindre calcul*, une valeur propre de f.

3. Prouver que u et v sont deux vecteurs propres de f.
Préciser la valeur propre λ (respectivement μ) associée à u (respectivement à v).
Donner la dimension de l'espace propre $E_\lambda(f)$ (respectivement $E_\mu(f)$).

4. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

5. Rechercher tous les vecteurs $t = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation :

$$f(t) = t + v$$

6. Déterminer un vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la troisième coordonnée (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) est nulle, telle que la famille $C = (u, v, w)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice de f dans la base C soit la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie II : Résolution d'une équation

Dans les questions 1,2 et 3 de cette partie, on suppose qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$g \circ g = f$$

1. Montrer que :

$$f \circ g = g \circ f$$

En déduire que :

$$f(g(u)) = 0 \quad \text{et} \quad f(g(v)) = g(v)$$

2. Justifier qu'il existe deux réels a et b tels que $g(u) = au$ et $g(v) = bv$.

3. On note N la matrice de g dans la base $C = (u, v, w)$ définie à la question I.6. Justifier que :

$$N = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

où a et b sont les deux réels définis à la question précédente (II.2) et c, d, e des réels.

4. Existe-t-il des endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ tels que $g \circ g = f$?
Indication : Utiliser les matrices de f et g dans la base $C = (u, v, w)$ définie à la question I.6.

Oraux HEC

Exercice avec préparation 2

1. Question de cours : Définition et représentation graphique de la fonction partie entière.
On note E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par les quatre fonctions f_0, f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = \mathrm{e}^x,\ f_3(x) = x\mathrm{e}^x.$$

2. On note : $\mathscr{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$.

a) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de F.

b) Montrer que toutes les fonctions de F sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

3. Soit Φ l'application définie par : pour tout $f \in F$, $\Phi(f) = f'$, où f' est la dérivée de f.

a) Justifier que Φ est un endomorphisme de F et écrire la matrice M de Φ dans la base $\mathscr{B}$.

b) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

c) Montrer que f_3 appartient à $\mathrm{Im}(\Phi)$ et résoudre dans F l'équation : $\Phi(f) = f_3$.

4. On note G l'ensemble des fonctions g de E telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x+1) - g(x) = 0.$$

a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et trouver $F \cap G$.

b) Trouver un élément de G qui n'appartienne pas à F.

5. Trouver toutes les fonctions de F vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) - f(x) = (\mathrm{e} - 1)\, f'(x)$.

Exercice avec préparation 3

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2. On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on note D et T les deux applications suivantes :

$$D : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & ad - bc \end{array} \right. \quad \text{et} \quad T : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & a + d \end{array} \right.$$

2. Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Exprimer $D(AB)$ en fonction de $D(A)$ et $D(B)$. Montrer que $T(AB) = T(BA)$.

b) En déduire que si A et B sont semblables, on a $D(A) = D(B)$ et $T(A) = T(B)$.

3. Déterminer $\mathrm{Ker}(D)$ et $\mathrm{Ker}(T)$. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(T)$?
Dorénavant, si $u \in \mathscr{L}(E)$ de matrice A dans une base $\mathscr{B}$ de E, on note :

$$D(u) = D(A) \quad \text{et} \quad T(u) = T(A)$$

4. On note id_E l'endomorphisme identité de E. Exprimer $u^2 = u \circ u$ en fonction de u et id_E.

5. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathcal{S}_0 = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ v - v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E)}\}$.
Montrer que $\mathcal{S}_0$ est un espace vectoriel contenant $\{P(u) \mid P \in \mathbb{R}[X]\}$.

6. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ avec $u \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. On pose : $\mathcal{S} = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ v - v \circ u = u\}$.

a) Montrer que si $\mathcal{S}$ est non vide, alors l'endomorphisme u ne peut être bijectif.
En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur u^2 pour que $\mathcal{S}$ soit non vide.

b) On suppose que $\mathcal{S}$ est non vide. Établir l'existence d'une base $\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2)$ de E dans laquelle la matrice M_u de u d'écrit $M_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et déterminer la forme générale de la matrice des éléments v de $\mathcal{S}$ dans cette même base.

c) On suppose que $\mathcal{S}$ est non vide. Montrer que $\mathcal{S} = \{v_0 + \alpha \mathrm{id}_E + \beta u, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ où v_0 est un endomorphisme non inversible de E à déterminer.

Exercice avec préparation 4

1. Question de cours : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I.
Propriétés de l'application $x \in I \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.
Pour tout fonction $f \in E$, on note $T(f)$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt.$$

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, soit f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = \mathrm{e}^{ax}$. Déterminer $T(f_a)$.

3. *a)* Montrer que pour toute fonction $f \in E$, l'application $T(f)$ appartient à E et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer la fonction dérivée de la fonction $T(f)$.

b) On suppose que f est une fonction bornée de E. Montrer que $T(f)$ est bornée et établir l'existence d'un réel K tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|T(f)(x) - T(f)(y)| \leqslant K|x - y|$.

4. Soit T l'application de E dans E qui à $f \in E$, associe $T(f)$.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il surjectif ?

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Montrer que $T(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

c) Soit T_n la restriction à $\mathbb{R}_n[X]$ de l'endomorphisme T et $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. L'endomorphisme T_n est-il diagonalisable ? T_n est-il bijectif ?

Exercice avec préparation 5

1. Question de cours : Définition d'un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.
Si $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_p[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}_p[X]$, alors $P(A)$ désigne la matrice $a_0\,I_n + a_1\,A + \cdots + a_p\,A^p$.

2. Soit A et Q deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose que la matrice Q est inversible, d'inverse notée Q^{-1}.
Soit P un polynôme à coefficients réels. Expliciter $P\big(Q^{-1}AQ\big)$ en fonction de $P(A)$, Q et Q^{-1}.

3. *a)* Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts et soit φ l'application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, associe le n-uplet $\big(P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)\big)$.
Montrer que l'application φ est bijective.

b) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n réels distincts non nuls et $T = (t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $t_{i,i} = \lambda_i$.

Établir l'existence d'un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\lambda_i \; P(\lambda_i) = 1$$

Que vaut $T \times P(T)$? Conclure.

4. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ soit égale à $P(A)$.

Exercice avec préparation 6

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

On définit l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P)(X) = P(X + 1) - P(X)$.

On pose $H_0(X) = 1$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $H_k(X) = \dfrac{X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)}{k!}$.

On note $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.

2. ***a)*** Montrer que φ est un endomorphisme non bijectif de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Justifier que la famille $\mathscr{B}' = (H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Déterminer la matrice M' de φ dans la base $\mathscr{B}'$.

d) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

3. Dans cette question, p est un entier fixé supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, soit f_i l'application de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall Q \in \mathbb{R}_p[X]$, $f_i(Q) = \sum\limits_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \dbinom{i}{k} Q(k)$.

a) Justifier que pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, l'application f_i est linéaire.

b) Soit $(i, j) \in [\![0, p]\!]^2$. Établir la relation : $f_i(H_j) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{array} \right.$.

c) Soit a_0, a_1, ..., a_p les réels vérifiant : $X^p = a_0 H_0 + a_1 H_1 + \cdots + a_p H_p$.

Déduire de la question précédente, la relation : $\forall i \in [\![0, p]\!]$, $a_i = \sum\limits_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \dbinom{i}{k} k^p$.

Exercice avec préparation 7

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

1. Question de cours

Que peut-on dire du degré de la somme et du produit de deux polynômes ?

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et f l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, fait correspondre le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) \;=\; n\,X\,P(X) + X(1-X)P'(X), \text{ où } P' \text{ désigne la dérivée du polynôme } P$$

2. ***a)*** Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) L'endomorphisme f est-il bijectif ? Quel est son rang ?

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note H_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $H_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$.

a) Calculer pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f(H_k)(X)$.

b) Montrer que $\mathscr{B} = (H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Trouver les coordonnées du polynôme $(X+1)^n$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice avec préparation 8

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles à n lignes et n colonnes.
Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ la transposée de M.

1. *a)* Question de cours : théorème du rang.

b) Justifier que l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont la somme des coefficients est nulle est un espace vectoriel et préciser sa dimension.

2. Soit φ l'application qui à toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, associe la matrice $\varphi(M) = M + {}^tM$.
Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Dans cette question, et seulement dans cette question, on suppose que $n = 2$.
Pour tout $(i, j) \in [\![1, 2]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont nuls excepté celui de la $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.
On rappelle que la famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Écrire la matrice A de φ dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$.

b) Préciser le rang de φ.

c) Donner une base du noyau de φ.

4. On suppose désormais $n \geqslant 3$.

a) Déterminer $\varphi(\varphi(M))$, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de l'endomorphisme φ ?

b) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?