Colles

semaine 11 : 22 novembre - 27 novembre

I. Questions de cours

Exercice 1

Soient E et F des espaces vectoriels.

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ un isomorphisme.

Que peut-on dire de u^{-1} ?

Exercice 2

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.

Démontrer : $\text{Im}(f) = \text{Vect}\,(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Exercice 3

Soient E et F des espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

a) Démontrer que $\text{Ker}(f)$ est un espace vectoriel.

b) Démontrer que $\text{Im}(f)$ est un espace vectoriel.

Exercice 4

Démontrer : f injective $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

II. Autres exercices

Exercice 5

On note f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$, par : $f((x, y, z)) = (y + z, y, x + y)$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

b. Déterminer le noyau de f. En déduire le rang de f.

c. Déterminer l'image de f.

d. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

e. Montrer que $H = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = u\}$ est un espace vectoriel réel.
Déterminer une base de H.

f. On note F l'ensemble défini par $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ y = 0\big\}$.
Montrer que f stabilise F, *i.e* $f(F) \subset F$.

Exercice 6
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
On note f l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe la matrice $f(M) = AMB$.

1) Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$.

2) Calculer $f(M)$ pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. En déduire le noyau de f puis le rang de f.

3) f est-elle un automorphisme ?

4) On note $E_2 = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid f(M) = 2M\}$.

a. Montrer que E_2 est un espace vectoriel réel.

b. Déterminer une base de E_2.

Exercice 7
On considère l'application u définie par :

$$u : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & Q(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X) \end{array}$$

a. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

b. Déterminer $\ker(u)$. En déduire le rang de u.

c. Déterminer $\mathrm{Im}(u)$.

Exercice 8
Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par : $f \ : \ P \mapsto P(X) + (1-X)\, P'(X)$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

b. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$, puis $\ker(f)$.

c. Quel est le rang de f ? Est-ce un automorphisme ?

Exercice 9
Soit $\varphi \ : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_4[X] \\ P & \longmapsto & (X^2 + X)\, P'(X) - (2X+1)\, P(X) \end{array}$

a. Montrer que φ est une application linéaire.

b. Déterminer le noyau de φ. En déduire le rang de φ.

c. Déterminer l'image de φ.

d. L'application φ est-elle un isomorphisme ?

Exercice 10
Soit Φ l'application qui à tout polynôme $P(X)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ associe le polynôme :

$$\Phi(P)(X) = 3X\, P'(X) + (X^2 - 1)\, P''(X)$$

a. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

b. Déterminer le noyau de Φ puis le rang de Φ.

c. Déterminer l'image de Φ.

d. L'endomorphisme Φ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$?

Exercice 11
On considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x-2y+3z \\ 2x+y+z \\ -x-y+z \\ 3x+2y+z \end{pmatrix} \end{array}$$

a. Montrer que f est une application linéaire.

b. Montrer que f est injective. En déduire le rang de f.

c. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 12
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.
Soit f l'application de $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ dans lui-même qui à une matrice M associe $f(M) = A^2N - AN$.

a. Démontrer que f est linéaire.

b. Déterminer le noyau de f ; on en donnera une base et la dimension.

c. Quelle est le rang de f ?

d. L'application f est-elle un automorphisme ?

Exercice 13
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
On dit qu'un endomorphisme f de E est un projecteur si $f \circ f = f$.
On considère p et q deux projecteurs de E.

a. Montrer que $p+q$ est un projecteur de E si, et seulement si, $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

b. On suppose dans cette question que $p+q$ est un projecteur de E.
Montrer :

$$\ker(p+q) = \ker(p) \cap \ker(q)$$

$$\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \{0_E\}$$

$$\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$$

(si A et B sont deux espaces vectoriels, on note $A+B = \{a+b \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$.

Exercice 14 (ECRICOME 2020)
Dans cet exercice, on désigne par $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3, et on note I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Soit a un réel ; on pose $M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie A : Étude du cas où $a = 1$

Dans toute cette partie, on suppose que $a = 1$.

1. Expliciter la matrice M, puis calculer $(M - I_3)^2$.

2. En déduire l'unique valeur propre possible de M.

3. La matrice M est-elle inversible ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie B : Étude du cas où $a = 0$

Dans cette partie, on suppose que $a = 0$.

4. Démontrer que 1 est une valeur propre de M, et donner une base et la dimension du sous-espace propre associé.

5. Démontrer que M n'est pas inversible.

6. En utilisant les deux questions précédentes, déterminer l'ensemble des valeurs propres de M, et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie C : Étude du cas où a est différent de 0 et de 1

Dans cette partie, on suppose que a est différent de 0 et de 1.
On pose $E = \mathbb{R}^3$, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice M.
Soit $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 0)$.

7. Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de E.

8. Calculer $f(u)$, $f(v)$.

9. Calculer $f(w)$ et trouver deux réels α et β tels que $f(w) = \alpha v + \beta w$.

10. Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$, que l'on notera T.

11. En déduire l'ensemble des valeurs propres de M, et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 15 (ECRICOME 2019)
On considère dans cet exercice l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, dont on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie A

1. ***a)*** Calculer A^2 puis vérifier que A^3 est la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Justifier que 0 est l'unique valeur propre possible de f.

c) Déterminer une base et la dimension du noyau de f.

d) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Soient $e'_1 = (-1, -1, 1)$, $e'_2 = (2, -1, 1)$ et $e'_3 = (-1, 2, 1)$.

a) Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.

b) Démontrer que la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$ est la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On pose : $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On note h l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice M.

a) Déterminer deux réels α et β tels que $M = \alpha A + \beta I$, où I est la matrice identité d'ordre 3.

b) Déterminer la matrice M' de h dans la base $\mathscr{B}'$.

c) En déduire que M est inversible.

d) À l'aide de la question ***1.a)***, calculer $(M - I)^3$. En déduire l'expression de M^{-1} en fonction des matrices I, M et M^2.

e) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer M^n pour tout entier naturel n, en fonction des matrices I, A et A^2.
Cette formule est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Partie B

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme g de E vérifiant $g \circ g = f$.
On suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice V carrée d'ordre 3 telle que :

$$V^2 = T$$

On note g l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}'$ est V.

4. Montrer : $VT = TV$. En déduire : $g \circ f = f \circ g$.

5. ***a)*** Montrer que $g(e'_1)$ appartient au noyau de f.
En déduire qu'il existe un réel a tel que : $g(e'_1) = a \cdot e'_1$.

b) Montrer que $g(e'_2) - a \cdot e'_2$ appartient aussi au noyau de f.
En déduire qu'il existe un réel b tel que : $g(e'_2) \;=\; b \cdot e'_1 + a \cdot e'_2$.

c) Montrer : $f \circ g(e'_3) \;=\; g \circ f(e'_3) \;=\; a \cdot e'_2 + b \cdot e'_1$.
En déduire que $g(e'_3) - a \cdot e'_3 - b \cdot e'_2$ appartient au noyau de f.

d) En déduire qu'il existe un réel c tel que : $V \;=\; \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

6. Calculer V^2 en fonction de a, b et c, puis en utilisant l'hypothèse $V^2 \;=\; T$, obtenir une contradiction.

Exercice 16

f désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

1) On suppose :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \exists \lambda_x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = \lambda_x \cdot x$$

a. Écrire de deux manières différentes le vecteur $f(e_1 + e_2 + \ldots + e_n)$.

b. En déduire qu'il existe un réel λ tel que $f = \lambda\, \mathrm{id}$.

2) Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$.
Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ de la forme $(x, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n)$.

On note alors p_x l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\forall (a, b_2, b_3, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n,\ f\left(a \cdot x + \sum_{k=2}^{n} b_k \cdot \varepsilon_k\right) = a \cdot x$$

a. Montrer que p_x est un endomorphime de $\mathbb{R}^n$.

b. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, on a

$$p_x(z) = z \;\Leftrightarrow\; z \in \mathrm{Vect}\,(x)$$

3) Montrer l'équivalence suivante :

$$\forall g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n),\ f \circ g = g \circ f \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ f = \lambda \mathrm{id}$$

Exercice 17 (ECRICOME 2012)
$(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
Deux matrices A et B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ étant données, on suppose qu'il existe une matrice L appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$L = AL + B$$

On définit la suite de matrices $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} U_0 \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = A\,U_n + B \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence, pour tout entier naturel n :

$$U_n \ = \ L + A^n\,(U_0 - L)$$

Dans la suite du problème les matrices A et B sont choisies de telle sorte que :

$$A \ = \ \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B \ = \ \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On note :

- id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$;
- a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice A ;
- b l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice B ;
- $\mathrm{Im}(b)$ l'image de l'endomorphisme b ;
- $\mathrm{Im}(\mathrm{id} - a)$ l'image de l'endomorphisme $\mathrm{id} - a$.

2. Prouver que le vecteur $u = (x, y, z)$ appartient à l'image de b si et seulement si :

$$-x + y + z = 0$$

puis démontrer :

$$\mathrm{Im}(b) \ = \ \mathrm{Im}(\mathrm{id} - a)$$

3. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ peut être considérée comme la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à une base de vecteurs propres de a.

4. Écrire la matrice D de l'endomorphisme a ainsi que la matrice B' de l'endomorphisme b dans cette base de vecteurs propres.

5. Démontrer, pour tout entier naturel n,

$$A^n \ = \ P\,D^n\,P^{-1}$$

6. En écrivant convenablement D^n comme la somme de trois matrices diagonales judicieusement choisies, prouver l'existence de trois matrices E, F, G indépendantes de n telles que pour tout entier naturel n :

$$A^n \ = \ E + \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot F + \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot G.$$

Expliciter uniquement la matrice E sous la forme d'un tableau de nombres.

7. Déterminer par le calcul, une matrice L' de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$ telle que :

$$L' \; = \; D\, L' + B'$$

8. Montrer que la matrice $L = PL'P^{-1}$ vérifie :

$$L \; = \; A\, L + B$$

9. Établir : $E\, L = 0$.

10. Montrer que chacun des coefficients de la matrice U_n a pour limite, lorsque n tend vers $+\infty$, les coefficients de la matrice $E\, U_0 + L$.

Exercice 18 (`ECRICOME 2014`)
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

On considère les vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$u = (0, 1, -2) \qquad \text{et} \qquad v = (0, 1, -1)$$

On note $\text{Ker}(f)$ le noyau de f et $\text{Im}(f)$ son image. Si λ est une valeur propre de f, on désigne par $E_\lambda(f)$ l'espace propre de f associé à la valeur propre λ.

Partie I : Réduction de l'endomorphisme f

1. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.

2. Justifier que f n'est pas bijectif. En déduire, *sans le moindre calcul*, une valeur propre de f.

3. Prouver que u et v sont deux vecteurs propres de f.
Préciser la valeur propre λ (respectivement μ) associée à u (respectivement à v).
Donner la dimension de l'espace propre $E_\lambda(f)$ (respectivement $E_\mu(f)$).

4. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

5. Rechercher tous les vecteurs $t = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation :

$$f(t) = t + v$$

6. Déterminer un vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la troisième coordonnée (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) est nulle, telle que la famille $C = (u, v, w)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice de f dans la base C soit la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie II : Résolution d'une équation

Dans les questions 1,2 et 3 de cette partie, on suppose qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$g \circ g = f$$

1. Montrer que :

$$f \circ g = g \circ f$$

En déduire que :

$$f(g(u)) = 0 \quad \text{et} \quad f(g(v)) = g(v)$$

2. Justifier qu'il existe deux réels a et b tels que $g(u) = au$ et $g(v) = bv$.

3. On note N la matrice de g dans la base $C = (u, v, w)$ définie à la question I.6. Justifier que :

$$N = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

où a et b sont les deux réels définis à la question précédente (II.2) et c, d, e des réels.

4. Existe-t-il des endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ tels que $g \circ g = f$?
Indication : Utiliser les matrices de f et g dans la base $C = (u, v, w)$ définie à la question I.6.

Oraux HEC

Exercice avec préparation 1

1. Question de cours : Définition et représentation graphique de la fonction partie entière.
On note E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par les quatre fonctions f_0, f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = \mathrm{e}^x,\ f_3(x) = x\mathrm{e}^x.$$

2. On note : $\mathscr{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$.

a) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de F.

b) Montrer que toutes les fonctions de F sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

3. Soit Φ l'application définie par : pour tout $f \in F$, $\Phi(f) = f'$, où f' est la dérivée de f.

a) Justifier que Φ est un endomorphisme de F et écrire la matrice M de Φ dans la base $\mathscr{B}$.

b) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

c) Montrer que f_3 appartient à $\mathrm{Im}(\Phi)$ et résoudre dans F l'équation : $\Phi(f) = f_3$.

4. On note G l'ensemble des fonctions g de E telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x+1) - g(x) = 0.$$

a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et trouver $F \cap G$.

b) Trouver un élément de G qui n'appartienne pas à F.

5. Trouver toutes les fonctions de F vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) - f(x) = (\mathrm{e} - 1)\, f'(x)$.

Exercice avec préparation 2

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2. On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on note D et T les deux applications suivantes :

$$D : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & ad - bc \end{array} \right. \quad \text{et} \quad T : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & a + d \end{array} \right.$$

2. Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Exprimer $D(AB)$ en fonction de $D(A)$ et $D(B)$. Montrer que $T(AB) = T(BA)$.

b) En déduire que si A et B sont semblables, on a $D(A) = D(B)$ et $T(A) = T(B)$.

3. Déterminer $\mathrm{Ker}(D)$ et $\mathrm{Ker}(T)$. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(T)$?
Dorénavant, si $u \in \mathscr{L}(E)$ de matrice A dans une base $\mathscr{B}$ de E, on note :

$$D(u) = D(A) \quad \text{et} \quad T(u) = T(A)$$

4. On note id_E l'endomorphisme identité de E. Exprimer $u^2 = u \circ u$ en fonction de u et id_E.

5. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathcal{S}_0 = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ v - v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E)}\}$.
Montrer que $\mathcal{S}_0$ est un espace vectoriel contenant $\{P(u) \mid P \in \mathbb{R}[X]\}$.

6. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ avec $u \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. On pose : $\mathcal{S} = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ v - v \circ u = u\}$.

a) Montrer que si $\mathcal{S}$ est non vide, alors l'endomorphisme u ne peut être bijectif.
En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur u^2 pour que $\mathcal{S}$ soit non vide.

b) On suppose que $\mathcal{S}$ est non vide. Établir l'existence d'une base $\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2)$ de E dans laquelle la matrice M_u de u d'écrit $M_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et déterminer la forme générale de la matrice des éléments v de $\mathcal{S}$ dans cette même base.

c) On suppose que $\mathcal{S}$ est non vide. Montrer que $\mathcal{S} = \{v_0 + \alpha \mathrm{id}_E + \beta u, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ où v_0 est un endomorphisme non inversible de E à déterminer.

Exercice avec préparation 3

1. Question de cours : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I.
Propriétés de l'application $x \in I \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$.
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.
Pour tout fonction $f \in E$, on note $T(f)$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)\ dt.$$

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, soit f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = \mathrm{e}^{ax}$. Déterminer $T(f_a)$.

3. *a)* Montrer que pour toute fonction $f \in E$, l'application $T(f)$ appartient à E et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer la fonction dérivée de la fonction $T(f)$.

b) On suppose que f est une fonction bornée de E. Montrer que $T(f)$ est bornée et établir l'existence d'un réel K tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|T(f)(x) - T(f)(y)| \leqslant K|x - y|$.

4. Soit T l'application de E dans E qui à $f \in E$, associe $T(f)$.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il surjectif ?

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Montrer que $T\left(\mathbb{R}_n[X]\right) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

c) Soit T_n la restriction à $\mathbb{R}_n[X]$ de l'endomorphisme T et $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. L'endomorphisme T_n est-il diagonalisable ? T_n est-il bijectif ?

Exercice avec préparation 4

1. Question de cours : Définition d'un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.
Si $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_p[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}_p[X]$, alors $P(A)$ désigne la matrice $a_0\, I_n + a_1\, A + \cdots + a_p\, A^p$.

2. Soit A et Q deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose que la matrice Q est inversible, d'inverse notée Q^{-1}.
Soit P un polynôme à coefficients réels. Expliciter $P\big(Q^{-1}AQ\big)$ en fonction de $P(A)$, Q et Q^{-1}.

3. *a)* Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts et soit φ l'application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, associe le n-uplet $\big(P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)\big)$.
Montrer que l'application φ est bijective.

b) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ n réels distincts non nuls et $T = (t_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $t_{i,i} = \lambda_i$.

Établir l'existence d'un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\lambda_i \; P(\lambda_i) = 1$$

Que vaut $T \times P(T)$? Conclure.

4. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ soit égale à $P(A)$.

Exercice avec préparation 5

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

On définit l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

On pose $H_0(X) = 1$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $H_k(X) = \dfrac{X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)}{k!}$.

On note $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.

2. *a)* Montrer que φ est un endomorphisme non bijectif de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Justifier que la famille $\mathscr{B}' = (H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Déterminer la matrice M' de φ dans la base $\mathscr{B}'$.

d) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

3. Dans cette question, p est un entier fixé supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, soit f_i l'application de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall Q \in \mathbb{R}_p[X]$, $f_i(Q) = \sum\limits_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \dbinom{i}{k} Q(k)$.

a) Justifier que pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, l'application f_i est linéaire.

b) Soit $(i, j) \in [\![0, p]\!]^2$. Établir la relation : $f_i(H_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

c) Soit a_0, a_1, …, a_p les réels vérifiant : $X^p = a_0 H_0 + a_1 H_1 + \cdots + a_p H_p$.

Déduire de la question précédente, la relation : $\forall i \in [\![0, p]\!]$, $a_i = \sum\limits_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \dbinom{i}{k} k^p$.

Exercice avec préparation 6

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

1. Question de cours

Que peut-on dire du degré de la somme et du produit de deux polynômes ?

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et f l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, fait correspondre le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) \;=\; n\,X\,P(X) + X(1-X)P'(X), \text{ où } P' \text{ désigne la dérivée du polynôme } P$$

2. *a)* Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) L'endomorphisme f est-il bijectif ? Quel est son rang ?

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note H_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $H_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$.

a) Calculer pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f(H_k)(X)$.

b) Montrer que $\mathscr{B} = (H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Trouver les coordonnées du polynôme $(X+1)^n$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice avec préparation 7

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles à n lignes et n colonnes.
Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ la transposée de M.

1. *a)* Question de cours : théorème du rang.

b) Justifier que l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont la somme des coefficients est nulle est un espace vectoriel et préciser sa dimension.

2. Soit φ l'application qui à toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, associe la matrice $\varphi(M) = M + {}^tM$.
Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Dans cette question, et seulement dans cette question, on suppose que $n = 2$.
Pour tout $(i, j) \in [\![1, 2]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont nuls excepté celui de la $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.
On rappelle que la famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Écrire la matrice A de φ dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$.

b) Préciser le rang de φ.

c) Donner une base du noyau de φ.

4. On suppose désormais $n \geqslant 3$.

a) Déterminer $\varphi(\varphi(M))$, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de l'endomorphisme φ ?

b) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?