Colles

semaine 12 : 29 novembre - 04 décembre

I. Questions de cours

Exercice 1
Stabilité de lois usuelles. Énoncé et démonstration (pour la loi de Poisson).

Exercice 2
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.
Démontrer : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(e_1), \dots, f(e_n)\right)$.

Exercice 3
Soit E un espace vectoriel.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
a) Démontrer : $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.
b) Démontrer : $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 4
Soient E et F des espaces vectoriels.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Démontrer : f injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

II. Autres exercices

Exercice 5
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
On note f l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe la matrice $f(M) = AMB$.
1) Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$.
2) Calculer $f(M)$ pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. En déduire le noyau de f puis le rang de f.
3) f est-elle un automorphisme ?
4) On note $E_2 = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid f(M) = 2M\}$.
   a. Montrer que E_2 est un espace vectoriel réel.
   b. Déterminer une base de E_2.

Exercice 6
On considère l'application u définie par :

$$u: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & Q(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X) \end{array}$$

a. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

b. Déterminer $\ker(u)$. En déduire le rang de u.

c. Déterminer $\mathrm{Im}(u)$.

Exercice 7
Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par : $f \ : \ P \mapsto P(X) + (1-X)\,P'(X)$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

b. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$, puis $\ker(f)$.

c. Quel est le rang de f ? Est-ce un automorphisme ?

Exercice 8
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Soit f l'application de $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ dans lui-même qui à une matrice M associe $f(M) = A^2M - AM$.

a. Démontrer que f est linéaire.

b. Déterminer le noyau de f ; on en donnera une base et la dimension.

c. Quelle est le rang de f ?

d. L'application f est-elle un automorphisme ?

Exercice 9
f désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

1) On suppose :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \exists \lambda_x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = \lambda_x \cdot x$$

a. Écrire de deux manières différentes le vecteur $f(e_1 + e_2 + \ldots + e_n)$.

b. En déduire qu'il existe un réel λ tel que $f = \lambda$ id.

2) Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$.
Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ de la forme $(x, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n)$.

On note alors p_x l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\forall (a, b_2, b_3, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n,\ f\left(a \cdot x + \sum_{k=2}^{n} b_k \cdot \varepsilon_k\right) = a \cdot x$$

a. Montrer que p_x est un endomorphime de $\mathbb{R}^n$.

b. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, on a

$$p_x(z) = z \ \Leftrightarrow \ z \in \mathrm{Vect}\,(x)$$

3) Montrer l'équivalence suivante :

$$\forall g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n),\ f \circ g = g \circ f \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ f = \lambda \mathrm{id}$$

Exercice 10
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
On dit qu'un endomorphisme f de E est un projecteur si $f \circ f = f$.
On considère p et q deux projecteurs de E.

a. Montrer que $p + q$ est un projecteur de E si, et seulement si, $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

b. On suppose dans cette question que $p + q$ est un projecteur de E.
Montrer :
$$\ker(p+q) = \ker(p) \cap \ker(q)$$
$$\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \{0_E\}$$
$$\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$$
(si A et B sont deux espaces vectoriels, on note $A + B = \{a + b \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$.

Oraux HEC

Exercice avec préparation 1

1. Question de cours : Définition et représentation graphique de la fonction partie entière.
On note E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par les quatre fonctions f_0, f_1, f_2 et f_3 définies par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = \mathrm{e}^x,\ f_3(x) = x\mathrm{e}^x.$$

2. On note : $\mathscr{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$.

a) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de F.

b) Montrer que toutes les fonctions de F sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

3. Soit Φ l'application définie par : pour tout $f \in F$, $\Phi(f) = f'$, où f' est la dérivée de f.

a) Justifier que Φ est un endomorphisme de F et écrire la matrice M de Φ dans la base $\mathscr{B}$.

b) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

c) Montrer que f_3 appartient à $\mathrm{Im}(\Phi)$ et résoudre dans F l'équation : $\Phi(f) = f_3$.

4. On note G l'ensemble des fonctions g de E telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x+1) - g(x) = 0.$$

a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et trouver $F \cap G$.

b) Trouver un élément de G qui n'appartienne pas à F.

5. Trouver toutes les fonctions de F vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) - f(x) = (\mathrm{e} - 1)\, f'(x)$.

Exercice avec préparation 2

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2. On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on note D et T les deux applications suivantes :
$$D : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & ad - bc \end{array} \right. \quad \text{et} \quad T : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & a + d \end{array} \right.$$

2. Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Exprimer $D(AB)$ en fonction de $D(A)$ et $D(B)$. Montrer que $T(AB) = T(BA)$.

b) En déduire que si A et B sont semblables, on a $D(A) = D(B)$ et $T(A) = T(B)$.

3. Déterminer $\mathrm{Ker}(D)$ et $\mathrm{Ker}(T)$. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(T)$?
Dorénavant, si $u \in \mathscr{L}(E)$ de matrice A dans une base $\mathscr{B}$ de E, on note :

$$D(u) = D(A) \quad \text{et} \quad T(u) = T(A)$$

4. On note id_E l'endomorphisme identité de E. Exprimer $u^2 = u \circ u$ en fonction de u et id_E.

5. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathcal{S}_0 = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ v - v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E)}\}$.
Montrer que $\mathcal{S}_0$ est un espace vectoriel contenant $\{P(u) \mid P \in \mathbb{R}[X]\}$.

6. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ avec $u \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. On pose : $\mathcal{S} = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ v - v \circ u = u\}$.

a) Montrer que si $\mathcal{S}$ est non vide, alors l'endomorphisme u ne peut être bijectif.
En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur u^2 pour que $\mathcal{S}$ soit non vide.

b) On suppose que $\mathcal{S}$ est non vide. Établir l'existence d'une base $\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2)$ de E dans laquelle la matrice M_u de u d'écrit $M_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et déterminer la forme générale de la matrice des éléments v de $\mathcal{S}$ dans cette même base.

c) On suppose que $\mathcal{S}$ est non vide. Montrer que $\mathcal{S} = \{v_0 + \alpha \mathrm{id}_E + \beta u, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ où v_0 est un endomorphisme non inversible de E à déterminer.

Exercice avec préparation 3

1. Question de cours : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I.
Propriétés de l'application $x \in I \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$.
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.
Pour tout fonction $f \in E$, on note $T(f)$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)\, dt.$$

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, soit f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = \mathrm{e}^{ax}$. Déterminer $T(f_a)$.

3. **a)** Montrer que pour toute fonction $f \in E$, l'application $T(f)$ appartient à E et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer la fonction dérivée de la fonction $T(f)$.

b) On suppose que f est une fonction bornée de E. Montrer que $T(f)$ est bornée et établir l'existence d'un réel K tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|T(f)(x) - T(f)(y)| \leqslant K|x - y|$.

4. Soit T l'application de E dans E qui à $f \in E$, associe $T(f)$.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il surjectif ?

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Montrer que $T(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

c) Soit T_n la restriction à $\mathbb{R}_n[X]$ de l'endomorphisme T et $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. L'endomorphisme T_n est-il diagonalisable ? T_n est-il bijectif ?

Exercice avec préparation 4

1. Question de cours : Définition d'un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.
Si $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_p[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}_p[X]$, alors $P(A)$ désigne la matrice $a_0\, I_n + a_1\, A + \cdots + a_p\, A^p$.

2. Soit A et Q deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose que la matrice Q est inversible, d'inverse notée Q^{-1}.
Soit P un polynôme à coefficients réels. Expliciter $P\big(Q^{-1}AQ\big)$ en fonction de $P(A)$, Q et Q^{-1}.

3. ***a)*** Soit $x_1, x_2, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts et soit φ l'application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, associe le n-uplet $\big(P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)\big)$.
Montrer que l'application φ est bijective.

b) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ n réels distincts non nuls et $T = (t_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $t_{i,i} = \lambda_i$.
Établir l'existence d'un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\lambda_i \; P(\lambda_i) = 1$$

Que vaut $T \times P(T)$? Conclure.

4. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ soit égale à $P(A)$.

Exercice avec préparation 5

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
On définit l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.
On pose $H_0(X) = 1$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $H_k(X) = \dfrac{X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)}{k!}$.
On note $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.

2. ***a)*** Montrer que φ est un endomorphisme non bijectif de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Justifier que la famille $\mathscr{B}' = (H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Déterminer la matrice M' de φ dans la base $\mathscr{B}'$.

d) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

3. Dans cette question, p est un entier fixé supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, soit f_i l'application de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall Q \in \mathbb{R}_p[X]$, $f_i(Q) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} Q(k)$.

a) Justifier que pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, l'application f_i est linéaire.

b) Soit $(i, j) \in [\![0, p]\!]^2$. Établir la relation : $f_i(H_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

c) Soit a_0, a_1, …, a_p les réels vérifiant : $X^p = a_0 H_0 + a_1 H_1 + \cdots + a_p H_p$.
Déduire de la question précédente, la relation : $\forall i \in [\![0, p]\!]$, $a_i = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} k^p$.

Exercice avec préparation 6

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

1. Question de cours
Que peut-on dire du degré de la somme et du produit de deux polynômes ?

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et f l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, fait correspondre le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) \;=\; n\,X\,P(X) + X(1-X)P'(X), \text{ où } P' \text{ désigne la dérivée du polynôme } P$$

2. ***a)*** Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) L'endomorphisme f est-il bijectif ? Quel est son rang ?

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note H_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $H_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$.

a) Calculer pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f(H_k)(X)$.

b) Montrer que $\mathscr{B} = (H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Trouver les coordonnées du polynôme $(X+1)^n$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice avec préparation 7

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles à n lignes et n colonnes.
Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ la transposée de M.

1. ***a)*** Question de cours : théorème du rang.

b) Justifier que l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont la somme des coefficients est nulle est un espace vectoriel et préciser sa dimension.

2. Soit φ l'application qui à toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, associe la matrice $\varphi(M) = M + {}^tM$.
Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Dans cette question, et seulement dans cette question, on suppose que $n = 2$.
Pour tout $(i, j) \in [\![1, 2]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont nuls excepté celui de la $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.
On rappelle que la famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Écrire la matrice A de φ dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$.

b) Préciser le rang de φ.

c) Donner une base du noyau de φ.

4. On suppose désormais $n \geqslant 3$.

a) Déterminer $\varphi(\varphi(M))$, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de l'endomorphisme φ ?

b) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Exercice 11
Soient N et X deux variables aléatoires discrètes définies sur le même univers Ω, telles que $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$, et pour tout $k \in N(\Omega)$, la loi conditionnelle de X sachant $[N = k]$ est la loi uniforme sur $\{0, 1, ..., k\}$.
On note, pour $k \in \mathbb{N}$, $p_k = \mathbb{P}([N = k])$.

1) **a.** Déterminer la loi du couple (X, N) en fonction de la loi de N.

b. Donner, sous la forme d'une somme faisant intervenir les p_k, la probabilité $\mathbb{P}([X = i])$, pour $i \in \mathbb{N}$.

c. Montrer que $(N - X)(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et que $N - X$ suit la même loi que X.

2) On suppose dans cette question qu'il existe $n \geqslant 2$ tel que :

× $\forall k \geqslant n + 1,\ p_k = 0$,

× $\forall k \leqslant n,\ p_k > 0$.

a. Justifier l'existence des variances de N et de X et de la covariance de N et X.

b. Trouver une relation entre $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{E}(X)$, puis entre $\mathbb{V}(N)$ et $\mathrm{Cov}(N, X)$.

c. Calculer $\mathrm{Cov}(N, N - 2X)$. Les variables N et $N - 2X$ sont-elles indépendantes ?

3) On suppose dans cette question que $p_0 = p_1 = 0$ et : $\forall k \geqslant 2, p_k = \dfrac{1}{k(k-1)}$.

a. Déterminer explicitement la loi du couple (X, N) et la loi de X.

b. Les variables X et N admettent-elles une espérance ?

c. Montrer que les espérances $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$ et $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{N+1}\right)$ existent et les calculer.

Exercice 12
Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$. On dispose d'un paquet de n cartes C_1, C_2, …, C_n que l'on distribue intégralement, les unes après les autres entre n joueurs J_1, J_2, …, J_n selon le protocole suivant :

× la première carte C_1 est donnée à J_1 ;

× la deuxième carte C_2 est donnée de façon équiprobable entre J_1 et J_2 ;

× la troisième carte C_3 est donnée de façon équiprobable entre J_1, J_2 et J_3 ;

× et ainsi de suite, jusqu'à la dernière carte C_n qui est donc distribuée de façon équiprobable entre les joueurs J_1, …, J_n.

On suppose l'expérience modélisée sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de joueurs qui n'ont reçu aucune carte à la fin de la distribution.

1. Déterminer $X_n(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}([X_n = 0])$ et $\mathbb{P}([X_n = n - 1])$.

2. Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note B_i la v.a.r. qui vaut 1 si J_i n'a reçu aucune carte à la fin de la distribution et vaut 0 sinon.
Déterminer la loi de B_i. Exprimer la v.a.r. X_n en fonction des v.a.r. B_i et en déduire l'espérance de X_n.

3. En faisant le moins de calculs possibles, donner la loi de X_4.

4. ***a)*** Montrer que pour i et j dans $[\![1, n]\!]$ tels que $i < j$, on a :

$$\mathbb{P}([B_i = 1] \cap [B_j = 1]) = \frac{(i-1)(j-2)}{n(n-1)}$$

En déduire la covariance des v.a.r. B_j et B_j.

b) Montrer que : $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{n+1}{12}$.

Exercice 13
On considère une urne contenant $n+1$ boules numérotées de 0 à n.
On y effectue une suite de tirages d'une boule à la fois avec remise.
On définit la suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

- $\times$ X_1 est la variable aléatoire certaine égale à 1 ;
- $\times$ pour $p \geqslant 2$, X_p prend la valeur 1 si le numéro obtenu au $p^{\text{ème}}$ tirage n'a pas déjà été obtenu au cours des tirages précédents et X_p prend la valeur 0 dans le cas contraire.

1) Déterminer la loi de X_2.

2) Montrer que X_p suit la loi de Bernoulli de paramètre $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{p-1}$.

3) ***a.*** Montrer que :

$$\forall i < j,\ \mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \frac{(n-1)^{i-1}n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$$

b. En déduire la loi du produit X_iX_j.

4) Soit $N \geqslant 2$. On note Z_N la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des N premiers tirages. Exprimer Z_N en fonction de X_k et en déduire son espérance.

Exercice 14
Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que $X(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$.
Pour tout $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, on pose :

$$a_{i,j} = \mathbb{P}\big([X=j] \cap [Y=i] \big) \qquad \text{et} \qquad b_{i,j} = \mathbb{P}_{[X=j]}\big([Y=i] \big)$$

1) On suppose qu'il existe un réel λ tel que :

$$\forall\, (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2, a_{i,j} = \lambda \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}$$

a. Calculer la valeur de λ.

b. Déterminer les lois marginales de X et de Y.

c. Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.

d. Soit $Z = X - 1$. Reconnaître dans la loi de Z une loi usuelle.
En déduire l'espérance et la variance de X.

2) On suppose à présent que :

$$\forall\, (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2,\ a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & \text{si } |i+j-n-2| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a. Déterminer α.

b. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 15
Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire successivement et sans remise 2 jetons de ce sac.
On note X le numéro du premier jeton tiré, et Y le numéro du second jeton tiré.

a. Déterminer la loi du couple (X, Y).

b. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

c. Déterminer la covariance de X et Y.

d. On note $Z = |X - Y|$.
Déterminer la loi de Z, puis calculer l'espérance de Z.

Exercice 16
Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p (avec $0 < p < 1$) ; la proportion de boules blanches est $1 - p$.
On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise.
On définit le couple de v.a.r. (X, Y) à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$ par :

$\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ [X = i] \cap [Y = j]$: « les i premières boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i+j+1)^{\text{ème}}$ est blanche ou les i premières boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i+j+1)^{\text{ème}}$ est verte »

1. ***a)*** Déterminer la loi de la v.a.r. X.

b) Montrer que la v.a.r. X admet une espérance et la calculer.

2. Déterminer la loi du couple (X, Y)

3. En déduire la loi de la v.a.r. Y.

4. ***a)*** Établir que si $p \neq \frac{1}{2}$, les v.a.r. X et Y ne sont pas indépendantes.

b) Démontrer que si $p = \frac{1}{2}$, les v.a.r. X et Y sont indépendantes.

Exercice 17
Toutes les v.a.r. considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soient λ et p deux réels tels que $\lambda > 0$ et $0 < p < 1$.
On considère le couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, de loi définie par :

$$\forall\ (k,n) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}([X = n] \cap [Y = k]) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\, \lambda^n\, p^k\, (1-p)^{n-k}}{k!\, (n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^2$.

2. Déterminer la loi marginale de la variable aléatoire X, puis celle de la variable aléatoire Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

3. Déterminer la loi conditionnelle de la variable aléatoire Y, sachant que $[X = n]$ est réalisé.

4. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X - Y$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire Z.

5. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 18
Soient X et Y deux variables de Bernoulli de même paramètre p $(0 < p < 1)$ et indépendantes.

a. On considère les variables aléatoires $S = X + Y$ et $D = X - Y$.
Déterminer la loi du couple (S, D).

b. Déterminer les lois marginales du couple (S, D).

c. Calculer les espérances $\mathbb{E}(S)$ et $\mathbb{E}(D)$.

d. Les variables S et D sont-elles indépendantes ?

e. Calculer la covariance de S et D.

Exercice 19

On considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire et on procède à l'expérience suivante : on effectue des tirages successifs d'une boule de cette urne et à chaque pas du tirage on replace dans l'urne la boule tirée en ajoutant une boule supplémentaire de la même couleur que la boule obtenue. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

a. Quel est l'ensemble des valeurs prises par X_n ?

b. Déterminer la loi de X_1, de X_2.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer, pour tout $k \in X_n(\Omega)$, la loi de X_{n+1} conditionnelle à $[X_n = k]$.

d. Démontrer, en raisonnant par récurrence, que X_n suit la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

Exercice 20

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.
On effectue deux tirages d'une boule avec remise.
On note X (respectivement Y) le plus grand (respectivement le plus petit) des numéros tirés.

a. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).

b. Déterminer les lois mariginales de X et Y.

c. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.

d. Calculer la covariance de X et Y.
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

e. Calculer la variance de $X + Y$.

Exercice 21

Une urne contient n boules noires (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et deux boules blanches. On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule, sans remise. On note :

× X la v.a.r. égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

× Y la v.a.r. égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la seconde boule blanche.

× Pour tout $i \in [\![1, n+2]\!]$, N_i (resp. B_i) l'événement « le $i^{\text{ème}}$ tirage amène une boule noire (resp. blanche) ».

1. ***a)*** Préciser $X(\Omega)$. Décrire, pour tout $k \in X(\Omega)$, l'événement $[X = k]$ à l'aide des événements N_i et B_i.

b) Montrer que pour tout $k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}$.

c) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

2. ***a)*** Déterminer $Y(\Omega)$.

b) Déterminer la loi jointe du couple (X, Y).

c) En déduire la loi de Y.

d) Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

3. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Commenter son signe.

Oraux HEC

Exercice avec préparation 8

1. Question de cours : Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On jette n fois de suite un dé pipé dont les 6 faces ne comportent que les nombres 1, 2 et 3, et on suppose que les résultats des lancers sont indépendants.

À chaque lancer, la probabilité d'obtenir 1 est p, celle d'obtenir 2 est q, et celle d'obtenir 3 est $1-p-q$, où p et q sont deux paramètres réels strictement positifs vérifiant $p+q<1$.

Soit X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de 1 (resp. 2) obtenus en n lancers consécutifs.

a) Quelles sont les lois respectives de X et Y ?

b) Déterminer la loi du couple (X, Y).

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

d) Déterminer le biais et le risque quadratique de l'estimateur $T_n = \dfrac{X}{n+1}$ du paramètre p.

3. On suppose dans cette question que le nombre de lancers effectués avec ce dé est une variable aléatoire N suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Soit X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de 1 (resp. 2) obtenus en N lancers consécutifs.

a) Déterminer les lois de X et Y respectivement.

b) Vérifier que X et Y sont indépendantes.

c) $T = \dfrac{X}{N+1}$ est-il un estimateur sans biais du paramètre p ?

Exercice avec préparation 9

1. Question de cours : Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes. Lien entre indépendance et covariance.
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes finies à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On suppose que $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ et $Y(\Omega) \subset [\![0, m]\!]$, où n et m sont deux entiers de $\mathbb{N}^*$.
Pour tout couple $(i, j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, m]\!]$, on pose : $p_{i,j} = \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$.
Soit F_X et F_Y les deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par : $F_X(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X = i])x^i$ et

$F_Y(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} \mathbb{P}([Y = j])x^j$.

Soit $Z = (X, Y)$ et G_Z la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $G_Z(x, y) = \sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{m} p_{i,j} x^i y^j$.

2. Donner la valeur de $G_Z(1, 1)$ et exprimer les espérances de X, Y et XY, puis la covariance de (X, Y) à l'aide des dérivées partielles premières et secondes de G_Z au point $(1, 1)$.

3. Soit f une fonction polynomiale de deux variables définies sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = \sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{m} a_{i,j} x^i y^j$

avec $a_{i,j} \in \mathbb{R}$.
On suppose que pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) = 0$.

a) Montrer que pour tout $(i, j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, m]\!]$, on a $a_{i,j} = 0$.

b) En déduire que X et Y sont indépendantes, si et seulement si, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $G_Z(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$. (on pourra poser : $a_{i,j} = p_{i,j} - \mathbb{P}([X=i])\mathbb{P}([Y=j])$).

4. Une urne contient des jetons portant chacun une des lettres A, B ou C. La proportion des jetons portant la lettre A est p, celle des jetons portant la lettre B est q et celle des jetons portant la lettre C est r, où p, q et r sont trois réels strictement positifs vérifiant $p+q+r=1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages d'un jeton avec remise dans cette urne. On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de jetons tirés portant la lettre A (resp. B) à l'issue de ces n tirages.

a) Quelles sont les lois de X et Y respectivement ? Déterminer F_X et F_Y.

b) Déterminer la loi de Z. En déduire G_Z.

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

d) Calculer la covariance de (X,Y). Le signe de cette covariance était-il prévisible ?

Exercice avec préparation 10

1. Question de cours :
Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Lois marginales. Lois conditionnelles.

Soit c un réel strictement positif et soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, telles que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = c\frac{i+j}{i!j!}$$

2. **a)** Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}([X=i]) = c\dfrac{(i+1)}{i!}$ e.
En déduire la valeur de c.

b) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

3. **a)** Déterminer la loi de $X+Y-1$.

b) En déduire la variance de $X+Y$.

c) Calculer la covariance de X et de $X+5Y$.
Les variables aléatoires X et $X+5Y$ sont-elles indépendantes ?

4. On pose : $Z = \dfrac{1}{X+1}$.

a) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

b) Déterminer pour $i \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X=i]$.

c) Pour $A \in \mathscr{A}$, on pose : $g_A(Y) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} kP_A([Y=k])$.
Établir l'existence d'une fonction affine f telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$g_{[X=X(\omega)]}(Y) = f(Z(\omega))$$

Exercice avec préparation 11

1. Question de cours

a) Définition et propriétés de la loi géométrique.

b) Compléter la ligne de code **Scilab** contenant des points d'interrogation pour que la fonction `geo` suivante fournisse une simulation de la loi géométrique dont le paramètre est égal à l'argument p de la fonction.

```
function x = geo(p)
    x = 1;
    while rand() ???
        x = x + 1;
    end;
endfunction
```

Une urne contient trois jetons numérotés 1, 2 et 3. On effectue dans cette urne, une suite de tirages d'un jeton avec remise.

2. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux numéros successifs distincts.

a) Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Y - 1$.

b) Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ et la variance $\mathbb{V}(Y)$ de la variable aléatoire Y.

3. On note Z la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, les trois numéros.

a) Soit deux entiers $k \geqslant 2$ et $\ell \geqslant 3$.
Calculer $\mathbb{P}([Y = k] \cap [Z = \ell])$ selon les valeurs de k et ℓ.

b) En déduire que, pour tout entier $\ell \geqslant 3$, on a : $\mathbb{P}([Z = \ell]) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2^{\ell-2} - 1}{3^{\ell-2}}\right)$.

c) Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

4. D'une manière plus générale, calculer l'espérance de la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, tous les numéros, dans l'hypothèse où l'urne contient au départ n jetons, numérotés de 1 à n.

Exercice avec préparation 12

Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. Les proportions respectives de ces boules sont p_1 pour les blanches, p_2 pour les noires et p_3 pour les rouges ($p_1 + p_2 + p_3 = 1$).
On effectue dans cette urne des tirages successifs indépendants avec remise. Les proportions de boules restent ainsi les mêmes au cours de l'expérience.
On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Question de cours : Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Lois marginales.

2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note Z_k la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si une boule blanche est tirée au $k^{\text{ème}}$ tirage, -1 si une boule noire est tirée au $k^{\text{ème}}$ tirage et 0 si une boule rouge est tirée au $k^{\text{ème}}$ tirage. On note $S_k = Z_1 + \cdots + Z_k$.

a) Trouver la loi de probabilité de S_1. Calculer son espérance et sa variance.
En déduire l'espérance et la variance de S_k.

b) Pour tout réel t strictement positif et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on pose $g_k(t) = \mathbb{E}\big(t^{S_k}\big)$.
Expliciter $g_k(t)$ en fonction de t et de k.

c) Montrer que $g'_k(1) = \mathbb{E}(S_k)$ et retrouver le résultat de la question (a).

3. *a)* On note X_1 la variable aléatoire représentant le numéro du tirage auquel une boule blanche sort pour la première fois. Trouver la loi de probabilité de X_1. Calculer son espérance et sa variance.

b) Sachant que l'événement $[X_1 = k]$ est réalisé, quelle est la probabilité de tirer une boule rouge à chacun des $k-1$ premiers tirages ?

c) On note W la variable aléatoire représentant le nombre de boules rouges tirées avant l'obtention de la première boule blanche. Quelle est la loi conditionnelle de W sachant $[X_1 = k]$?

d) En déduire la loi de W (sous forme d'une somme qu'on ne cherchera pas à calculer).

4. On note Y_1 la variable représentant le numéro du tirage auquel une boule noire sort pour la première fois.

a) Trouver, pour tout couple d'entiers strictement positifs (k, l), la probabilité de l'évènement :

$$[X_1 = k] \cap [Y_1 = l]$$

(on pourra distinguer selon que $k > l$, $k = l$ ou $k < l$)

Les variables aléatoires X_1 et Y_1 sont-elles indépendantes ?

b) On se place, pour cette question, dans le cas particulier où $p_3 = 0$ (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de boule rouge). Calculer alors la covariance de X_1 et Y_1.

Exercice avec préparation 13

1. Question de cours : Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes ; lois marginales et lois conditionnelles.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Soit p un réel de $]0, 1[$. On pose : $q = 1 - p$.
On suppose que :

× X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$;

× $Y(\Omega) = \mathbb{N}$;

× pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est une loi binomiale de paramètres n et p.

2. Déterminer la loi du couple (X, Y).

3. Montrer que Y suit une loi de Poisson de paramètre λp.

4. Déterminer la loi de $X - Y$.

5. *a)* Établir l'indépendance des variables aléatoires Y et $X - Y$.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.