Colles

semaine 13 : 06 décembre - 11 décembre

I. Questions de cours

Exercice 1
Stabilité de lois usuelles. Énoncé et démonstration (pour la loi de Poisson).

Exercice 2
a) Formule de Cauchy-Schwarz. Énoncé.
b) Système complet d'événements associé à un couple de v.a.r. discrètes. Énoncé et démonstration.

Exercice 3
Stabilité par somme des lois usuelles. Énoncé (pour les lois binomiales et de Poisson) et démonstration (seulement pour les lois de Poisson).

Exercice 4
Loi du min / loi du max de deux v.a.r. (discrètes) indépendantes. Énoncé et démonstration.

II. Autres exercices

Exercice 5
Soient N et X deux variables aléatoires discrètes définies sur le même univers Ω, telles que $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$, et pour tout $k \in N(\Omega)$, la loi conditionnelle de X sachant $[N = k]$ est la loi uniforme sur $\{0, 1, ..., k\}$.
On note, pour $k \in \mathbb{N}$, $p_k = \mathbb{P}([N = k])$.

1) **a.** Déterminer la loi du couple (X, N) en fonction de la loi de N.
b. Donner, sous la forme d'une somme faisant intervenir les p_k, la probabilité $\mathbb{P}([X = i])$, pour $i \in \mathbb{N}$.
c. Montrer que $(N - X)(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et que $N - X$ suit la même loi que X.

2) On suppose dans cette question qu'il existe $n \geqslant 2$ tel que :
× $\forall k \geqslant n + 1,\ p_k = 0$,
× $\forall k \leqslant n,\ p_k > 0$.
a. Justifier l'existence des variances de N et de X et de la covariance de N et X.
b. Trouver une relation entre $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{E}(X)$, puis entre $\mathbb{V}(N)$ et $\mathrm{Cov}(N, X)$.
c. Calculer $\mathrm{Cov}(N, N - 2X)$. Les variables N et $N - 2X$ sont-elles indépendantes ?

3) On suppose dans cette question que $p_0 = p_1 = 0$ et : $\forall k \geqslant 2, p_k = \dfrac{1}{k(k-1)}$.
a. Déterminer explicitement la loi du couple (X, N) et la loi de X.
b. Les variables X et N admettent-elles une espérance ?
c. Montrer que les espérances $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$ et $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{N+1}\right)$ existent et les calculer.

Exercice 6
Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$. On dispose d'un paquet de n cartes C_1, C_2, ..., C_n que l'on distribue intégralement, les unes après les autres entre n joueurs J_1, J_2, ..., J_n selon le protocole suivant :

× la première carte C_1 est donnée à J_1 ;

× la deuxième carte C_2 est donnée de façon équiprobable entre J_1 et J_2 ;

× la troisième carte C_3 est donnée de façon équiprobable entre J_1, J_2 et J_3 ;

× et ainsi de suite, jusqu'à la dernière carte C_n qui est donc distribuée de façon équiprobable entre les joueurs J_1, ..., J_n.

On suppose l'expérience modélisée sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de joueurs qui n'ont reçu aucune carte à la fin de la distribution.

1. Déterminer $X_n(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}([X_n = 0])$ et $\mathbb{P}([X_n = n-1])$.

2. Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note B_i la v.a.r. qui vaut 1 si J_i n'a reçu aucune carte à la fin de la distribution et vaut 0 sinon.
Déterminer la loi de B_i. Exprimer la v.a.r. X_n en fonction des v.a.r. B_i et en déduire l'espérance de X_n.

3. En faisant le moins de calculs possibles, donner la loi de X_4.

4. ***a)*** Montrer que pour i et j dans $[\![1, n]\!]$ tels que $i < j$, on a :

$$\mathbb{P}([B_i = 1] \cap [B_j = 1]) = \frac{(i-1)(j-2)}{n(n-1)}$$

En déduire la covariance des v.a.r. B_j et B_j.

b) Montrer que : $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{n+1}{12}$.

Exercice 7
On considère une urne contenant $n+1$ boules numérotées de 0 à n.
On y effectue une suite de tirages d'une boule à la fois avec remise.
On définit la suite de variables aléatoires $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

× X_1 est la variable aléatoire certaine égale à 1 ;

× pour $p \geqslant 2$, X_p prend la valeur 1 si le numéro obtenu au $p^{\text{ème}}$ tirage n'a pas déjà été obtenu au cours des tirages précédents et X_p prend la valeur 0 dans le cas contraire.

1) Déterminer la loi de X_2.

2) Montrer que X_p suit la loi de Bernoulli de paramètre $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{p-1}$.

3) ***a.*** Montrer que :

$$\forall i < j, \ \mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \frac{(n-1)^{i-1} n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$$

b. En déduire la loi du produit $X_i X_j$.

4) Soit $N \geqslant 2$. On note Z_N la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des N premiers tirages. Exprimer Z_N en fonction de X_k et en déduire son espérance.

Exercice 8
Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que $X(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$.
Pour tout $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, on pose :

$$a_{i,j} = \mathbb{P}\big([X = j] \cap [Y = i] \big) \quad \text{et} \quad b_{i,j} = \mathbb{P}_{[X=j]}\big([Y = i] \big)$$

1) On suppose qu'il existe un réel λ tel que :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2, a_{i,j} = \lambda \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}$$

- ***a.*** Calculer la valeur de λ.
- ***b.*** Déterminer les lois marginales de X et de Y.
- ***c.*** Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.
- ***d.*** Soit $Z = X - 1$. Reconnaître dans la loi de Z une loi usuelle.
  En déduire l'espérance et la variance de X.

2) On suppose à présent que :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2, \ a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & \text{si } |i + j - n - 2| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- ***a.*** Déterminer α.
- ***b.*** Déterminer les lois marginales de X et de Y.
  Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 9
Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire successivement et sans remise 2 jetons de ce sac. On note X le numéro du premier jeton tiré, et Y le numéro du second jeton tiré.

- ***a.*** Déterminer la loi du couple (X, Y).
- ***b.*** Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
- ***c.*** Déterminer la covariance de X et Y.
- ***d.*** On note $Z = |X - Y|$.
  Déterminer la loi de Z, puis calculer l'espérance de Z.

Exercice 10
Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p (avec $0 < p < 1$) ; la proportion de boules blanches est $1-p$.
On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise.
On définit le couple de v.a.r. (X,Y) à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$ par :

$\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ [X=i]\cap[Y=j]$: « les i premières boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i+j+1)^{\text{ème}}$ est blanche ou les i premières boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i+j+1)^{\text{ème}}$ est verte »

1. *a)* Déterminer la loi de la v.a.r. X.
   b) Montrer que la v.a.r. X admet une espérance et la calculer.
2. Déterminer la loi du couple (X,Y)
3. En déduire la loi de la v.a.r. Y.
4. *a)* Établir que si $p \neq \frac{1}{2}$, les v.a.r. X et Y ne sont pas indépendantes.
   b) Démontrer que si $p = \frac{1}{2}$, les v.a.r. X et Y sont indépendantes.

Exercice 11
Toutes les v.a.r. considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soient λ et p deux réels tels que $\lambda > 0$ et $0 < p < 1$.
On considère le couple de variables aléatoires (X,Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, de loi définie par :

$$\forall\ (k,n) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}([X=n]\cap[Y=k]) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\,\lambda^n\,p^k\,(1-p)^{n-k}}{k!\,(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^2$.
2. Déterminer la loi marginale de la variable aléatoire X, puis celle de la variable aléatoire Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi conditionnelle de la variable aléatoire Y, sachant que $[X=n]$ est réalisé.
4. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X - Y$.
   Déterminer la loi de la variable aléatoire Z.
5. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 12
Soient X et Y deux variables de Bernoulli de même paramètre p $(0 < p < 1)$ et indépendantes.
a. On considère les variables aléatoires $S = X + Y$ et $D = X - Y$.
   Déterminer la loi du couple (S,D).
b. Déterminer les lois marginales du couple (S,D).
c. Calculer les espérances $\mathbb{E}(S)$ et $\mathbb{E}(D)$.
d. Les variables S et D sont-elles indépendantes ?
e. Calculer la covariance de S et D.

Exercice 13
On considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire et on procède à l'expérience suivante : on effectue des tirages successifs d'une boule de cette urne et à chaque pas du tirage on replace dans l'urne la boule tirée en ajoutant une boule supplémentaire de la même couleur que la boule obtenue. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

a. Quel est l'ensemble des valeurs prises par X_n ?

b. Déterminer la loi de X_1, de X_2.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer, pour tout $k \in X_n(\Omega)$, la loi de X_{n+1} conditionnelle à $[X_n = k]$.

d. Démontrer, en raisonnant par récurrence, que X_n suit la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

Exercice 14
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.
On effectue deux tirages d'une boule avec remise.
On note X (respectivement Y) le plus grand (respectivement le plus petit) des numéros tirés.

a. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).

b. Déterminer les lois mariginales de X et Y.

c. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.

d. Calculer la covariance de X et Y.
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

e. Calculer la variance de $X + Y$.

Exercice 15
Une urne contient n boules noires (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et deux boules blanches. On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule, sans remise. On note :

× X la v.a.r. égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

× Y la v.a.r. égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la seconde boule blanche.

× Pour tout $i \in [\![1, n+2]\!]$, N_i (resp. B_i) l'événement « le $i^{\text{ème}}$ tirage amène une boule noire (resp. blanche) ».

1. ***a)*** Préciser $X(\Omega)$. Décrire, pour tout $k \in X(\Omega)$, l'événement $[X = k]$ à l'aide des événements N_i et B_i.

b) Montrer que pour tout $k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}$.

c) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

2. ***a)*** Déterminer $Y(\Omega)$.

b) Déterminer la loi jointe du couple (X, Y).

c) En déduire la loi de Y.

d) Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

3. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$. Commenter son signe.

Exercice 16

Soient $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$.

a. Déterminer $S_n(\Omega)$.

b. Déterminer la loi de la variable aléatoire S_2.

c. Montrer par récurrence sur n, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de S_n est donnée par :

$$\forall k \geqslant n,\ \mathbb{P}\big([S_n = k]\big) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

d. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum \binom{k-1}{n-1} k\ (1-p)^k$ est convergente et a pour somme $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} k\ (1-p)^k = \dfrac{n(1-p)^n}{p^{n+1}}$

Exercice 17

Toutes les v.a.r. de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Montrer que la variable aléatoire 2^{-Z} admet une espérance. On la note $r(Z)$.

On suppose dans la suite de l'exercice que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}\big([Z = n]\big) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

2. ***a)*** Montrer que l'on définit ainsi une loi de probabilité et calculer $r(Z)$.

b) Montrer que pour tout $(n,q) \in \mathbb{N}^2$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{k+q}{q} = \binom{n+q+1}{q+1}$.

c) Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que Z et pour tout entier $q \geqslant 1$, on pose $S_q = \sum\limits_{i=1}^{q} X_i$.

Montrer que la loi de S_q est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([S_q = n]\big) = \binom{n+q-1}{q-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+q}$$

d) Calculer $r(S_q)$. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+q-1}{q-1} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^q$$

3. On suppose dans cette question que Z représente le nombre de lionceaux devant naître en 2014 d'un couple de lions. Chaque lionceau a la probabilité $1/2$ d'être mâle ou femelle, indépendamment des autres. On note F la variable aléatoire représentant le nombre de femelles devant naître en 2014.

Déterminer la loi de F.

Exercice 18

On considère trois boîtes et une infinité de jetons. On place successivement chacun des jetons, au hasard, dans l'une des trois boîtes.

On suppose que chaque boîte est vide au départ et a une capacité illimitée. On suppose également que la probabilité pour qu'un jeton soit placé dans une boîte donnée est $\frac{1}{3}$.

Soit Y le nombre aléatoire de jetons placés lorsque, pour la première fois, deux boîtes exactement sont occupées par au moins un jeton.

Soit Z le nombre de jetons placés lorsque, pour la première fois, les trois boîtes sont occupées, chacune, par au moins un jeton.

1. Déterminer $\mathbb{P}\big([Y = k]\big)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2. Déterminer l'espérance de Y.

3. Déterminer, pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\} \times \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[Y=k]}\big([Z = \ell]\big)$.

4. Donner la loi de la variable aléatoire Z.

5. Écrire en langage **Scilab** un programme qui simule cette expérience, et qui affiche la valeur de la variable Y.

Exercice 19

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.

On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne. On répète cette épreuve n fois (où n est un entier plus grand que 2). On réalise ainsi une succession de n tirages.

On note X la v.a.r. réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la v.a.r. réelle définie par :

× Y prend la valeur k si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au $k^{\text{ème}}$ tirage,

× Y prend la valeur 0 si les n boules tirées sont noires.

a. Déterminer la loi de X. Donner la valeur de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$.

b. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, déterminer la probabilité $\mathbb{P}\big([Y = k]\big)$, puis déterminer $\mathbb{P}\big([Y = 0]\big)$.

c. Vérifier : $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big([Y = k]\big) = 1$.

d. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Oraux HEC

Exercice avec préparation 1

1. Question de cours : Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On jette n fois de suite un dé pipé dont les 6 faces ne comportent que les nombres 1, 2 et 3, et on suppose que les résultats des lancers sont indépendants.

À chaque lancer, la probabilité d'obtenir 1 est p, celle d'obtenir 2 est q, et celle d'obtenir 3 est $1-p-q$, où p et q sont deux paramètres réels strictement positifs vérifiant $p+q<1$.

Soit X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de 1 (resp. 2) obtenus en n lancers consécutifs.

a) Quelles sont les lois respectives de X et Y ?

b) Déterminer la loi du couple (X, Y).

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

d) Déterminer le biais et le risque quadratique de l'estimateur $T_n = \dfrac{X}{n+1}$ du paramètre p.

3. On suppose dans cette question que le nombre de lancers effectués avec ce dé est une variable aléatoire N suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Soit X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de 1 (resp. 2) obtenus en N lancers consécutifs.

a) Déterminer les lois de X et Y respectivement.

b) Vérifier que X et Y sont indépendantes.

c) $T = \dfrac{X}{N+1}$ est-il un estimateur sans biais du paramètre p ?

Exercice avec préparation 2

1. Question de cours : Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes. Lien entre indépendance et covariance.
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes finies à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On suppose que $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ et $Y(\Omega) \subset [\![0, m]\!]$, où n et m sont deux entiers de $\mathbb{N}^*$.
Pour tout couple $(i, j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, m]\!]$, on pose : $p_{i,j} = \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$.
Soit F_X et F_Y les deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par : $F_X(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X = i])x^i$ et

$F_Y(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} \mathbb{P}([Y = j])x^j$.

Soit $Z = (X, Y)$ et G_Z la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $G_Z(x, y) = \sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{m} p_{i,j} x^i y^j$.

2. Donner la valeur de $G_Z(1, 1)$ et exprimer les espérances de X, Y et XY, puis la covariance de (X, Y) à l'aide des dérivées partielles premières et secondes de G_Z au point $(1, 1)$.

3. Soit f une fonction polynomiale de deux variables définies sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = \sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{m} a_{i,j} x^i y^j$ avec $a_{i,j} \in \mathbb{R}$.
On suppose que pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) = 0$.

a) Montrer que pour tout $(i, j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, m]\!]$, on a $a_{i,j} = 0$.

b) En déduire que X et Y sont indépendantes, si et seulement si, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $G_Z(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$. (on pourra poser : $a_{i,j} = p_{i,j} - \mathbb{P}([X = i])\mathbb{P}([Y = j])$).

4. Une urne contient des jetons portant chacun une des lettres A, B ou C. La proportion des jetons portant la lettre A est p, celle des jetons portant la lettre B est q et celle des jetons portant la lettre C est r, où p, q et r sont trois réels strictement positifs vérifiant $p + q + r = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages d'un jeton avec remise dans cette urne. On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de jetons tirés portant la lettre A (resp. B) à l'issue de ces n tirages.

a) Quelles sont les lois de X et Y respectivement ? Déterminer F_X et F_Y.

b) Déterminer la loi de Z. En déduire G_Z.

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

d) Calculer la covariance de (X, Y). Le signe de cette covariance était-il prévisible ?

Exercice avec préparation 3

1. Question de cours :
Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Lois marginales. Lois conditionnelles.

Soit c un réel strictement positif et soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, telles que :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = c\frac{i + j}{i!j!}$$

2. a) Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}([X = i]) = c\dfrac{(i + 1)}{i!}$ e.
En déduire la valeur de c.

b) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

3. a) Déterminer la loi de $X + Y - 1$.

b) En déduire la variance de $X + Y$.

c) Calculer la covariance de X et de $X + 5Y$.
Les variables aléatoires X et $X + 5Y$ sont-elles indépendantes ?

4. On pose : $Z = \dfrac{1}{X + 1}$.

a) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

b) Déterminer pour $i \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = i]$.

c) Pour $A \in \mathscr{A}$, on pose : $g_A(Y) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} kP_A([Y = k])$.
Établir l'existence d'une fonction affine f telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$g_{[X=X(\omega)]}(Y) = f(Z(\omega))$$

Exercice avec préparation 4

1. Question de cours

a) Définition et propriétés de la loi géométrique.

b) Compléter la ligne de code **Scilab** contenant des points d'interrogation pour que la fonction `geo` suivante fournisse une simulation de la loi géométrique dont le paramètre est égal à l'argument p de la fonction.

```
function x = geo(p)
    x = 1;
    while rand() ???
        x = x + 1;
    end;
endfunction
```

Une urne contient trois jetons numérotés 1, 2 et 3. On effectue dans cette urne, une suite de tirages d'un jeton avec remise.

2. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux numéros successifs distincts.

a) Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Y - 1$.

b) Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ et la variance $\mathbb{V}(Y)$ de la variable aléatoire Y.

3. On note Z la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, les trois numéros.

a) Soit deux entiers $k \geqslant 2$ et $\ell \geqslant 3$.
Calculer $\mathbb{P}([Y = k] \cap [Z = \ell])$ selon les valeurs de k et ℓ.

b) En déduire que, pour tout entier $\ell \geqslant 3$, on a : $\mathbb{P}([Z = \ell]) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2^{\ell-2} - 1}{3^{\ell-2}}\right)$.

c) Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

4. D'une manière plus générale, calculer l'espérance de la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, tous les numéros, dans l'hypothèse où l'urne contient au départ n jetons, numérotés de 1 à n.

Exercice avec préparation 5

Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. Les proportions respectives de ces boules sont p_1 pour les blanches, p_2 pour les noires et p_3 pour les rouges ($p_1 + p_2 + p_3 = 1$).
On effectue dans cette urne des tirages successifs indépendants avec remise. Les proportions de boules restent ainsi les mêmes au cours de l'expérience.
On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Question de cours : Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Lois marginales.

2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note Z_k la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si une boule blanche est tirée au $k^{\text{ème}}$ tirage, -1 si une boule noire est tirée au $k^{\text{ème}}$ tirage et 0 si une boule rouge est tirée au $k^{\text{ème}}$ tirage. On note $S_k = Z_1 + \cdots + Z_k$.

a) Trouver la loi de probabilité de S_1. Calculer son espérance et sa variance.
En déduire l'espérance et la variance de S_k.

b) Pour tout réel t strictement positif et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on pose $g_k(t) = \mathbb{E}\big(t^{S_k}\big)$.
Expliciter $g_k(t)$ en fonction de t et de k.

c) Montrer que $g_k'(1) = \mathbb{E}(S_k)$ et retrouver le résultat de la question (a).

3. *a)* On note X_1 la variable aléatoire représentant le numéro du tirage auquel une boule blanche sort pour la première fois. Trouver la loi de probabilité de X_1. Calculer son espérance et sa variance.

b) Sachant que l'événement $[X_1 = k]$ est réalisé, quelle est la probabilité de tirer une boule rouge à chacun des $k-1$ premiers tirages ?

c) On note W la variable aléatoire représentant le nombre de boules rouges tirées avant l'obtention de la première boule blanche. Quelle est la loi conditionnelle de W sachant $[X_1 = k]$?

d) En déduire la loi de W (sous forme d'une somme qu'on ne cherchera pas à calculer).

4. On note Y_1 la variable représentant le numéro du tirage auquel une boule noire sort pour la première fois.

a) Trouver, pour tout couple d'entiers strictement positifs (k, l), la probabilité de l'évènement :

$$[X_1 = k] \cap [Y_1 = l]$$

(on pourra distinguer selon que $k > l$, $k = l$ ou $k < l$)

Les variables aléatoires X_1 et Y_1 sont-elles indépendantes ?

b) On se place, pour cette question, dans le cas particulier où $p_3 = 0$ (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de boule rouge). Calculer alors la covariance de X_1 et Y_1.

Exercice avec préparation 6

1. Question de cours : Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes ; lois marginales et lois conditionnelles.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Soit p un réel de $]0, 1[$. On pose : $q = 1 - p$.

On suppose que :

- × X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$;
- × $Y(\Omega) = \mathbb{N}$;
- × pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est une loi binomiale de paramètres n et p.

2. Déterminer la loi du couple (X, Y).

3. Montrer que Y suit une loi de Poisson de paramètre λp.

4. Déterminer la loi de $X - Y$.

5. *a)* Établir l'indépendance des variables aléatoires Y et $X - Y$.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.

Exercice avec préparation 7

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et p et q deux réels de $]0; 1[$ tels que $p + q = 1$.

On considère deux v.a.r. discrètes X et Y définies sur une espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

La loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}\big(\,[X = j] \cap [Y = k]\,\big) = \begin{cases} \dbinom{n}{k}\, p^k\, q^{n-k} & \text{si } k = j \text{ et } j \neq 0 \\[2mm] \dfrac{q^n}{n} & \text{si } j = 0 \\[2mm] 0 & \text{si } k \neq j \text{ et } j \neq 0 \end{cases}$$

1. Question de cours : Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Lois marginales, lois conditionnelles.

2. ***a)*** Déterminer les lois marginales de X et Y respectivement.

b) Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

3. Soit j un entier tel que $0 \leqslant j \leqslant n$.

a) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = j]$.

b) Si A est un événement de probabilité non nulle, on note $\mathbb{E}_A(Y)$ l'espérance de Y, si elle existe, pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A$.
Déterminer $\mathbb{E}_{[X=j]}(Y)$.

4. ***a)*** Montrer que, pour tout $q \in \,]0; 1[$, on a :

$$\mathbb{P}\big(\,[X = 1] \cap [Y = 1]\,\big) \neq \mathbb{P}\big(\,[X = 1]\,\big) \times \mathbb{P}\big(\,[Y = 1]\,\big)$$

Conclure.

b) Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Montrer qu'il existe une valeur de q pour laquelle $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

c) Conclure.