Colles

semaine 14 : 13 décembre - 18 décembre

I. Questions de cours

Exercice 1
Loi du min / loi du max de deux v.a.r. (discrètes) indépendantes. Énoncé et démonstration.

Exercice 2
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $(3I+N)^n$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3
Formule de Cauchy-Schwarz. Énoncé et démonstration (on ne demande pas de traiter le cas d'égalité).

II. Autres exercices

Exercice 4
Soient N et X deux variables aléatoires discrètes définies sur le même univers Ω, telles que $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$, et pour tout $k \in N(\Omega)$, la loi conditionnelle de X sachant $[N = k]$ est la loi uniforme sur $\{0, 1, ..., k\}$.
On note, pour $k \in \mathbb{N}$, $p_k = \mathbb{P}([N = k])$.

1) ***a.*** Déterminer la loi du couple (X, N) en fonction de la loi de N.

b. Donner, sous la forme d'une somme faisant intervenir les p_k, la probabilité $\mathbb{P}([X = i])$, pour $i \in \mathbb{N}$.

c. Montrer que $(N - X)(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et que $N - X$ suit la même loi que X.

2) On suppose dans cette question qu'il existe $n \geqslant 2$ tel que :

- $\forall k \geqslant n + 1,\ p_k = 0$,
- $\forall k \leqslant n,\ p_k > 0$.

a. Justifier l'existence des variances de N et de X et de la covariance de N et X.

b. Trouver une relation entre $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{E}(X)$, puis entre $\mathbb{V}(N)$ et $\text{Cov}(N, X)$.

c. Calculer $\text{Cov}(N, N - 2X)$. Les variables N et $N - 2X$ sont-elles indépendantes ?

3) On suppose dans cette question que $p_0 = p_1 = 0$ et : $\forall k \geqslant 2, p_k = \dfrac{1}{k(k-1)}$.

a. Déterminer explicitement la loi du couple (X, N) et la loi de X.

b. Les variables X et N admettent-elles une espérance ?

c. Montrer que les espérances $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$ et $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{N+1}\right)$ existent et les calculer.

Exercice 5
Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$. On dispose d'un paquet de n cartes C_1, C_2, ..., C_n que l'on distribue intégralement, les unes après les autres entre n joueurs J_1, J_2, ..., J_n selon le protocole suivant :

- la première carte C_1 est donnée à J_1 ;
- la deuxième carte C_2 est donnée de façon équiprobable entre J_1 et J_2 ;
- la troisième carte C_3 est donnée de façon équiprobable entre J_1, J_2 et J_3 ;
- et ainsi de suite, jusqu'à la dernière carte C_n qui est donc distribuée de façon équiprobable entre les joueurs J_1, ..., J_n.

On suppose l'expérience modélisée sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de joueurs qui n'ont reçu aucune carte à la fin de la distribution.

1. Déterminer $X_n(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}([X_n = 0])$ et $\mathbb{P}([X_n = n-1])$.

2. Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note B_i la v.a.r. qui vaut 1 si J_i n'a reçu aucune carte à la fin de la distribution et vaut 0 sinon.
Déterminer la loi de B_i. Exprimer la v.a.r. X_n en fonction des v.a.r. B_i et en déduire l'espérance de X_n.

3. En faisant le moins de calculs possibles, donner la loi de X_4.

4. ***a)*** Montrer que pour i et j dans $[\![1, n]\!]$ tels que $i < j$, on a :

$$\mathbb{P}([B_i = 1] \cap [B_j = 1]) = \frac{(i-1)(j-2)}{n(n-1)}$$

En déduire la covariance des v.a.r. B_j et B_j.

b) Montrer que : $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{n+1}{12}$.

Exercice 6
On considère une urne contenant $n+1$ boules numérotées de 0 à n.
On y effectue une suite de tirages d'une boule à la fois avec remise.
On définit la suite de variables aléatoires $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

- X_1 est la variable aléatoire certaine égale à 1 ;
- pour $p \geqslant 2$, X_p prend la valeur 1 si le numéro obtenu au $p^{\text{ème}}$ tirage n'a pas déjà été obtenu au cours des tirages précédents et X_p prend la valeur 0 dans le cas contraire.

1) Déterminer la loi de X_2.

2) Montrer que X_p suit la loi de Bernoulli de paramètre $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{p-1}$.

3) ***a.*** Montrer que :

$$\forall i < j,\ \mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \frac{(n-1)^{i-1} n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$$

b. En déduire la loi du produit $X_i X_j$.

4) Soit $N \geqslant 2$. On note Z_N la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des N premiers tirages. Exprimer Z_N en fonction de X_k et en déduire son espérance.

Exercice 7

Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que $X(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$.
Pour tout $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, on pose :

$$a_{i,j} = \mathbb{P}\big([X=j] \cap [Y=i]\big) \quad \text{et} \quad b_{i,j} = \mathbb{P}_{[X=j]}\big([Y=i]\big)$$

1) On suppose qu'il existe un réel λ tel que :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2, a_{i,j} = \lambda \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}$$

- ***a.*** Calculer la valeur de λ.
- ***b.*** Déterminer les lois marginales de X et de Y.
- ***c.*** Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.
- ***d.*** Soit $Z = X - 1$. Reconnaître dans la loi de Z une loi usuelle.
  En déduire l'espérance et la variance de X.

2) On suppose à présent que :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2, \ a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & \text{si } |i+j-n-2| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- ***a.*** Déterminer α.
- ***b.*** Déterminer les lois marginales de X et de Y.
  Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 8

Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire successivement et sans remise 2 jetons de ce sac.
On note X le numéro du premier jeton tiré, et Y le numéro du second jeton tiré.

- ***a.*** Déterminer la loi du couple (X, Y).
- ***b.*** Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
- ***c.*** Déterminer la covariance de X et Y.
- ***d.*** On note $Z = |X - Y|$.
  Déterminer la loi de Z, puis calculer l'espérance de Z.

Exercice 9
Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p (avec $0 < p < 1$) ; la proportion de boules blanches est $1-p$.
On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise.
On définit le couple de v.a.r. (X,Y) à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$ par :

$\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ [X=i] \cap [Y=j]$: « les i premières boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i+j+1)^{\text{ème}}$ est blanche ou les i premières boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i+j+1)^{\text{ème}}$ est verte »

1. *a)* Déterminer la loi de la v.a.r. X.
b) Montrer que la v.a.r. X admet une espérance et la calculer.

2. Déterminer la loi du couple (X,Y)

3. En déduire la loi de la v.a.r. Y.

4. *a)* Établir que si $p \neq \frac{1}{2}$, les v.a.r. X et Y ne sont pas indépendantes.
b) Démontrer que si $p = \frac{1}{2}$, les v.a.r. X et Y sont indépendantes.

Exercice 10
Toutes les v.a.r. considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soient λ et p deux réels tels que $\lambda > 0$ et $0 < p < 1$.
On considère le couple de variables aléatoires (X,Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, de loi définie par :

$$\forall\ (k,n) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}([X=n] \cap [Y=k]) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\, \lambda^n\, p^k\, (1-p)^{n-k}}{k!\,(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^2$.

2. Déterminer la loi marginale de la variable aléatoire X, puis celle de la variable aléatoire Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

3. Déterminer la loi conditionnelle de la variable aléatoire Y, sachant que $[X=n]$ est réalisé.

4. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X - Y$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire Z.

5. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 11
Soient X et Y deux variables de Bernoulli de même paramètre p $(0 < p < 1)$ et indépendantes.

a. On considère les variables aléatoires $S = X+Y$ et $D = X-Y$.
Déterminer la loi du couple (S,D).

b. Déterminer les lois marginales du couple (S,D).

c. Calculer les espérances $\mathbb{E}(S)$ et $\mathbb{E}(D)$.

d. Les variables S et D sont-elles indépendantes ?

e. Calculer la covariance de S et D.

Exercice 12
On considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire et on procède à l'expérience suivante : on effectue des tirages successifs d'une boule de cette urne et à chaque pas du tirage on replace dans l'urne la boule tirée en ajoutant une boule supplémentaire de la même couleur que la boule obtenue. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

a. Quel est l'ensemble des valeurs prises par X_n ?

b. Déterminer la loi de X_1, de X_2.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer, pour tout $k \in X_n(\Omega)$, la loi de X_{n+1} conditionnelle à $[X_n = k]$.

d. Démontrer, en raisonnant par récurrence, que X_n suit la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

Exercice 13
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.
On effectue deux tirages d'une boule avec remise.
On note X (respectivement Y) le plus grand (respectivement le plus petit) des numéros tirés.

a. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).

b. Déterminer les lois mariginales de X et Y.

c. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.

d. Calculer la covariance de X et Y.
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

e. Calculer la variance de $X + Y$.

Exercice 14
Une urne contient n boules noires (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et deux boules blanches. On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule, sans remise. On note :

× X la v.a.r. égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

× Y la v.a.r. égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la seconde boule blanche.

× Pour tout $i \in [\![1, n+2]\!]$, N_i (resp. B_i) l'événement « le $i^{\text{ème}}$ tirage amène une boule noire (resp. blanche) ».

1. ***a)*** Préciser $X(\Omega)$. Décrire, pour tout $k \in X(\Omega)$, l'événement $[X = k]$ à l'aide des événements N_i et B_i.

b) Montrer que pour tout $k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}$.

c) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

2. ***a)*** Déterminer $Y(\Omega)$.

b) Déterminer la loi jointe du couple (X, Y).

c) En déduire la loi de Y.

d) Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

3. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Commenter son signe.

Exercice 15

Soient $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$.

a. Déterminer $S_n(\Omega)$.

b. Déterminer la loi de la variable aléatoire S_2.

c. Montrer par récurrence sur n, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de S_n est donnée par :

$$\forall k \geqslant n,\ \mathbb{P}\big([S_n = k]\big) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

d. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum \binom{k-1}{n-1} k\ (1-p)^k$ est convergente et a pour somme $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} k\ (1-p)^k = \dfrac{n(1-p)^n}{p^{n+1}}$

Exercice 16

Toutes les v.a.r. de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Montrer que la variable aléatoire 2^{-Z} admet une espérance. On la note $r(Z)$.

On suppose dans la suite de l'exercice que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}\big([Z = n]\big) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

2. ***a)*** Montrer que l'on définit ainsi une loi de probabilité et calculer $r(Z)$.

b) Montrer que pour tout $(n,q) \in \mathbb{N}^2$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{k+q}{q} = \binom{n+q+1}{q+1}$.

c) Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que Z et pour tout entier $q \geqslant 1$, on pose $S_q = \sum\limits_{i=1}^{q} X_i$.

Montrer que la loi de S_q est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([S_q = n]\big) = \binom{n+q-1}{q-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+q}$$

d) Calculer $r(S_q)$. En déduire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+q-1}{q-1} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^q$$

3. On suppose dans cette question que Z représente le nombre de lionceaux devant naître en 2014 d'un couple de lions. Chaque lionceau a la probabilité $1/2$ d'être mâle ou femelle, indépendamment des autres. On note F la variable aléatoire représentant le nombre de femelles devant naître en 2014.

Déterminer la loi de F.

Exercice 17

On considère trois boîtes et une infinité de jetons. On place successivement chacun des jetons, au hasard, dans l'une des trois boîtes.

On suppose que chaque boîte est vide au départ et a une capacité illimitée. On suppose également que la probabilité pour qu'un jeton soit placé dans une boîte donnée est $\frac{1}{3}$.

Soit Y le nombre aléatoire de jetons placés lorsque, pour la première fois, deux boîtes exactement sont occupées par au moins un jeton.

Soit Z le nombre de jetons placés lorsque, pour la première fois, les trois boîtes sont occupées, chacune, par au moins un jeton.

1. Déterminer $\mathbb{P}\big([Y=k]\big)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2. Déterminer l'espérance de Y.

3. Déterminer, pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\} \times \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[Y=k]}\big([Z=\ell]\big)$.

4. Donner la loi de la variable aléatoire Z.

5. Écrire en langage **Scilab** un programme qui simule cette expérience, et qui affiche la valeur de la variable Y.

Exercice 18

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.

On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne. On répète cette épreuve n fois (où n est un entier plus grand que 2). On réalise ainsi une succession de n tirages.

On note X la v.a.r. réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la v.a.r. réelle définie par :

× Y prend la valeur k si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au $k^{\text{ème}}$ tirage,

× Y prend la valeur 0 si les n boules tirées sont noires.

a. Déterminer la loi de X. Donner la valeur de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$.

b. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, déterminer la probabilité $\mathbb{P}\big([Y=k]\big)$, puis déterminer $\mathbb{P}\big([Y=0]\big)$.

c. Vérifier : $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big([Y=k]\big) = 1$.

d. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Oraux HEC

Exercice 19

1. Question de cours : Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On jette n fois de suite un dé pipé dont les 6 faces ne comportent que les nombres 1, 2 et 3, et on suppose que les résultats des lancers sont indépendants.

À chaque lancer, la probabilité d'obtenir 1 est p, celle d'obtenir 2 est q, et celle d'obtenir 3 est $1-p-q$, où p et q sont deux paramètres réels strictement positifs vérifiant $p+q<1$.

Soit X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de 1 (resp. 2) obtenus en n lancers consécutifs.

a) Quelles sont les lois respectives de X et Y ?

b) Déterminer la loi du couple (X, Y).

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

d) Déterminer le biais et le risque quadratique de l'estimateur $T_n = \dfrac{X}{n+1}$ du paramètre p.

3. On suppose dans cette question que le nombre de lancers effectués avec ce dé est une variable aléatoire N suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Soit X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de 1 (resp. 2) obtenus en N lancers consécutifs.

a) Déterminer les lois de X et Y respectivement.

b) Vérifier que X et Y sont indépendantes.

c) $T = \dfrac{X}{N+1}$ est-il un estimateur sans biais du paramètre p ?

Exercice 20

1. Question de cours : Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes. Lien entre indépendance et covariance.
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes finies à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On suppose que $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ et $Y(\Omega) \subset [\![0, m]\!]$, où n et m sont deux entiers de $\mathbb{N}^*$.
Pour tout couple $(i, j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, m]\!]$, on pose : $p_{i,j} = \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$.
Soit F_X et F_Y les deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par : $F_X(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X = i])x^i$ et $F_Y(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} \mathbb{P}([Y = j])x^j$.
Soit $Z = (X, Y)$ et G_Z la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $G_Z(x, y) = \sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{m} p_{i,j} x^i y^j$.

2. Donner la valeur de $G_Z(1, 1)$ et exprimer les espérances de X, Y et XY, puis la covariance de (X, Y) à l'aide des dérivées partielles premières et secondes de G_Z au point $(1, 1)$.

3. Soit f une fonction polynomiale de deux variables définies sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = \sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{m} a_{i,j} x^i y^j$ avec $a_{i,j} \in \mathbb{R}$.
On suppose que pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) = 0$.

a) Montrer que pour tout $(i, j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, m]\!]$, on a $a_{i,j} = 0$.

b) En déduire que X et Y sont indépendantes, si et seulement si, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $G_Z(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$. (on pourra poser : $a_{i,j} = p_{i,j} - \mathbb{P}([X=i])\mathbb{P}([Y=j])$).

4. Une urne contient des jetons portant chacun une des lettres A, B ou C. La proportion des jetons portant la lettre A est p, celle des jetons portant la lettre B est q et celle des jetons portant la lettre C est r, où p, q et r sont trois réels strictement positifs vérifiant $p+q+r=1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages d'un jeton avec remise dans cette urne. On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de jetons tirés portant la lettre A (resp. B) à l'issue de ces n tirages.

a) Quelles sont les lois de X et Y respectivement ? Déterminer F_X et F_Y.

b) Déterminer la loi de Z. En déduire G_Z.

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

d) Calculer la covariance de (X,Y). Le signe de cette covariance était-il prévisible ?

Exercice 21

1. Question de cours :
Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Lois marginales. Lois conditionnelles.

Soit c un réel strictement positif et soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, telles que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = c\frac{i+j}{i!j!}$$

2. **a)** Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}([X=i]) = c\dfrac{(i+1)}{i!}$ e.
En déduire la valeur de c.

b) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

3. **a)** Déterminer la loi de $X+Y-1$.

b) En déduire la variance de $X+Y$.

c) Calculer la covariance de X et de $X+5Y$.
Les variables aléatoires X et $X+5Y$ sont-elles indépendantes ?

4. On pose : $Z = \dfrac{1}{X+1}$.

a) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

b) Déterminer pour $i \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X=i]$.

c) Pour $A \in \mathscr{A}$, on pose : $g_A(Y) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} kP_A([Y=k])$.
Établir l'existence d'une fonction affine f telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$g_{[X=X(\omega)]}(Y) = f(Z(\omega))$$

Exercice 22

1. Question de cours

a) Définition et propriétés de la loi géométrique.

b) Compléter la ligne de code **Scilab** contenant des points d'interrogation pour que la fonction `geo` suivante fournisse une simulation de la loi géométrique dont le paramètre est égal à l'argument p de la fonction.

```
function x = geo(p)
    x = 1;
    while rand() ???
        x = x + 1;
    end;
endfunction
```

Une urne contient trois jetons numérotés 1, 2 et 3. On effectue dans cette urne, une suite de tirages d'un jeton avec remise.

2. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux numéros successifs distincts.

a) Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Y-1$.

b) Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ et la variance $\mathbb{V}(Y)$ de la variable aléatoire Y.

3. On note Z la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, les trois numéros.

a) Soit deux entiers $k \geqslant 2$ et $\ell \geqslant 3$.
Calculer $\mathbb{P}([Y=k] \cap [Z=\ell])$ selon les valeurs de k et ℓ.

b) En déduire que, pour tout entier $\ell \geqslant 3$, on a : $\mathbb{P}([Z=\ell]) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2^{\ell-2}-1}{3^{\ell-2}}\right)$.

c) Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

4. D'une manière plus générale, calculer l'espérance de la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, tous les numéros, dans l'hypothèse où l'urne contient au départ n jetons, numérotés de 1 à n.

Exercice 23

Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. Les proportions respectives de ces boules sont p_1 pour les blanches, p_2 pour les noires et p_3 pour les rouges ($p_1+p_2+p_3=1$).
On effectue dans cette urne des tirages successifs indépendants avec remise. Les proportions de boules restent ainsi les mêmes au cours de l'expérience.
On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Question de cours : Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Lois marginales.

2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note Z_k la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si une boule blanche est tirée au $k^{\text{ème}}$ tirage, -1 si une boule noire est tirée au $k^{\text{ème}}$ tirage et 0 si une boule rouge est tirée au $k^{\text{ème}}$ tirage. On note $S_k = Z_1 + \cdots + Z_k$.

a) Trouver la loi de probabilité de S_1. Calculer son espérance et sa variance.
En déduire l'espérance et la variance de S_k.

b) Pour tout réel t strictement positif et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on pose $g_k(t) = \mathbb{E}\big(t^{S_k}\big)$.
Expliciter $g_k(t)$ en fonction de t et de k.

c) Montrer que $g_k'(1) = \mathbb{E}(S_k)$ et retrouver le résultat de la question (a).

3. *a)* On note X_1 la variable aléatoire représentant le numéro du tirage auquel une boule blanche sort pour la première fois. Trouver la loi de probabilité de X_1. Calculer son espérance et sa variance.

b) Sachant que l'événement $[X_1 = k]$ est réalisé, quelle est la probabilité de tirer une boule rouge à chacun des $k-1$ premiers tirages ?

c) On note W la variable aléatoire représentant le nombre de boules rouges tirées avant l'obtention de la première boule blanche. Quelle est la loi conditionnelle de W sachant $[X_1 = k]$?

d) En déduire la loi de W (sous forme d'une somme qu'on ne cherchera pas à calculer).

4. On note Y_1 la variable représentant le numéro du tirage auquel une boule noire sort pour la première fois.

a) Trouver, pour tout couple d'entiers strictement positifs (k, l), la probabilité de l'évènement :

$$[X_1 = k] \cap [Y_1 = l]$$

(on pourra distinguer selon que $k > l,\ k = l$ ou $k < l$)
Les variables aléatoires X_1 et Y_1 sont-elles indépendantes ?

b) On se place, pour cette question, dans le cas particulier où $p_3 = 0$ (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de boule rouge). Calculer alors la covariance de X_1 et Y_1.

Exercice 24

1. Question de cours : Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes ; lois marginales et lois conditionnelles.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Soit p un réel de $]0, 1[$. On pose : $q = 1 - p$.
On suppose que :

× X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$;
× $Y(\Omega) = \mathbb{N}$;
× pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est une loi binomiale de paramètres n et p.

2. Déterminer la loi du couple (X, Y).

3. Montrer que Y suit une loi de Poisson de paramètre λp.

4. Déterminer la loi de $X - Y$.

5. *a)* Établir l'indépendance des variables aléatoires Y et $X - Y$.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.

Exercice 25

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et p et q deux réels de $]0; 1[$ tels que $p + q = 1$.
On considère deux v.a.r. discrètes X et Y définies sur une espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

La loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}\big(\,[X = j] \cap [Y = k]\,\big) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} p^k\, q^{n-k} & \text{si } k = j \text{ et } j \neq 0 \\ \dfrac{q^n}{n} & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq j \text{ et } j \neq 0 \end{cases}$$

1. Question de cours : Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Lois marginales, lois conditionnelles.

2. ***a)*** Déterminer les lois marginales de X et Y respectivement.

b) Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

3. Soit j un entier tel que $0 \leqslant j \leqslant n$.

a) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = j]$.

b) Si A est un événement de probabilité non nulle, on note $\mathbb{E}_A(Y)$ l'espérance de Y, si elle existe, pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A$.
Déterminer $\mathbb{E}_{[X=j]}(Y)$.

4. ***a)*** Montrer que, pour tout $q \in \,]0; 1[$, on a :

$$\mathbb{P}\big(\,[X = 1] \cap [Y = 1]\,\big) \neq \mathbb{P}\big(\,[X = 1]\,\big) \times \mathbb{P}\big(\,[Y = 1]\,\big)$$

Conclure.

b) Calculer $\text{Cov}(X, Y)$. Montrer qu'il existe une valeur de q pour laquelle $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

c) Conclure.

Exercice 26 (EDHEC 2015)
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. ***a)*** Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, puis montrer que la famille $(e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_5)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

b) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ puis donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

2. On note $u = e_2 + e_3 + e_4$ et $v = e_1 + e_5$.

a) Écrire $f(u)$ et $f(v)$ comme combinaisons linéaires de e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, puis $f(u - v)$ et $f(u + 3v)$ comme combinaisons linéaires de u et v.

b) En déduire les valeurs propres de f et préciser les sous-espaces propres associés.

c) Établir que C est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice R inversible telles que $C = RDR^{-1}$.

3. ***a)*** Établir la relation suivante : $D(D + I)(D - 3I) = 0$.

b) En déduire que le polynôme P défini par $P(X) = X^3 - 2X^2 - 3X$ est un polynôme annulateur de C.

4. On admet que (principe de la division euclidienne), pour tout entier naturel n non nul, il existe un unique polynôme Qn et trois réels a_n, b_n et c_n tels que :

$$X^n = (X^3 - 2X^2 - 3X)\ Q_n(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n$$

a) En utilisant les racines de P, déterminer les valeurs de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

b) Déduire de ce qui précède l'expression, pour tout entier naturel n non nul, de C^n en fonction de C et C^2.

5. Compléter, à l'aide de matrices de type `zeros` et `ones`, les deux espaces laissés libres dans la commande `Scilab` suivante pour qu'elle permette de construire la matrice C.

```
C = [ones(1,5);---,---;ones(1,5)]
```

Exercice 27 (EDHEC 2013)

1. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que l'on a $A^2 \neq 0$ et calculer A^3.

b) Déterminer une base (a) de $\mathrm{Ker}(f)$ ainsi qu'une base (b, c) de $\mathrm{Im}(f)$.

c) Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$.

Dans la suite, on considère un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que : $g^2 \neq 0$ et $g^3 = 0$, ce qui signifie que $g \circ g$ n'est pas l'endomorphisme nul, mais que $g \circ g \circ g$ est l'endomorphisme nul.
En désignant par M la matrice de g dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$, on a donc :

$$M^2 \neq 0 \quad \text{et} \quad M^3 = 0$$

On se propose de montrer, dans ce cas plus général, que $\mathrm{Im}(g^2) = \mathrm{Ker}(g)$.

1. ***a)*** Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de g.

b) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que 0 est effectivement la seule valeur propre de g.

c) En déduire, toujours en raisonnant par l'absurde, que g n'est pas diagonalisable.

2. ***a)*** Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$.

b) Montrer que $(\ u, g(u), g^2(u)\ )$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathscr{B}'$.

c) Donner la matrice N de g dans la base $\mathscr{B}'$.

d) Déterminer $\mathrm{Im}\, g$ et donner sa dimension. En déduire une base de $\mathrm{Ker}(g)$.
Pour finir, déterminer $\mathrm{Im}(g^2)$ puis conclure.

Exercice 28 (EDHEC 2012)

1. Montrer que, si f désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ diagonalisable, alors l'endomorphisme f^2 est aussi diagonalisable.
On rappelle que $f^2 = f \circ f$.
On se propose dans la suite de montrer que la réciproque de cette assertion est fausse.
Pour ce faire, on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$.
On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2. *a)* Déterminer la matrice A^2 puis établir que $A^4 = I$.
En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A.

b) Donner une base (u) de $\mathrm{Ker}(g - Id)$.

c) Déterminer $\mathrm{Ker}(g + Id)$.

d) En déduire que g n'est pas diagonalisable.

3. *a)* Résoudre l'équation, $A^2X = -X$, d'inconnue le vecteur X élément de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et en déduire une base (v, w) de $\mathrm{Ker}(g^2 + Id)$.

b) Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) Écrire la matrice de g^2 dans la base (u, v, w) et conclure.

Exercice 29 (EML 2013)

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

1. Est-ce que A est diagonalisable dans $M_4(\mathbb{R})$?

2. Déterminer les valeurs propres de A et, pour chaque valeur propre de A, déterminer une base du sous-espace propre associé.

3. En déduire une matrice diagonale $D \in M_4(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux rangés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible $P \in M_4(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux tous égaux à 1, telles que $A = PDP^{-1}$, et calculer P^{-1}.
On appelle commutant de A, et on note C_A, l'ensemble des matrices M de $M_4(\mathbb{R})$ telles que :
$$AM = MA$$
On appelle commutant de D, et on note C_D, l'ensemble des matrices N de $M_4(\mathbb{R})$ telles que :
$$DN = ND$$

4. Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $M_4(\mathbb{R})$.

5. Soit $M \in M_4(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$. Montrer :
$$M \in C_A \Leftrightarrow N \in C_D$$

6. Déterminer C_D, en utilisant les coefficients des matrices.

7. En déduire : $C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$.

8. Déterminer une base de C_A et la dimension de C_A.

Exercice 30 (EML 2012)

On considère les matrices carrées d'ordre 2 suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Partie I : Étude de la matrice B

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de B.
Est-ce que B est diagonalisable ?

2. Déterminer une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, telles que $B = PDP^{-1}$

3. Vérifier que $D^2 = 5D - 4I$ et exprimer B^2 comme combinaison linéaire de B et I.

4. Montrer que B est inversible et exprimer B^{-1} comme combinaison linéaire de B et I.

Partie II : Étude d'un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

On considère l'application définie sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par : $h : M \mapsto AMB$.

1. Vérifier que h est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que h est bijectif et exprimer h^{-1} sous une forme analogue à celle donnée pour h.

3. On se propose dans cette question de déterminer les valeurs propres de h.

- ***a)*** Soient $\lambda \in \mathbb{R}, M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
  On note $N = MP$, ou P est la matrice définie dans la question **I2.**
  Montrer : $h(M) = \lambda M \Leftrightarrow AND = \lambda N$, où D est la matrice définie dans la question **I2.**
- ***b)*** Déterminer les réels λ pour lesquels il existe une matrice N de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A\ N\ D = \lambda N$. À cet effet, on pourra noter $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.
- ***c)*** En déduire les valeurs propres de h.
  Montrer que h est diagonalisable et, donner une matrice diagonale représentant h.
- ***d)*** On note e l'endomorphisme identité de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on note 0 l'endomorphisme nul de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$
  Montrer : $(h - e) \circ (h + e) \circ (h - 4e) \circ (h + 4e) = 0$.

Exercice 31 (EML 2011)

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Partie I : Détermination d'une racine carrée de A

1. Sans calcul, justifier que A est diagonalisable et non inversible. Déterminer le rang de A.

2. Montrer que 0, 1 et 4 sont les trois valeurs propres de A et déterminer les sous-espaces propres associés.

3. En déduire une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, telles que : $A = PDP^{-1}$.

4. Calculer P^{-1}.

5. Montrer qu'il existe une matrice diagonale Δ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, telle que $\Delta^2 = D$, et déterminer Δ.

6. On note $R = P\Delta P^{-1}$. Montrer $R^2 = A$ et calculer R.

Partie II : Étude d'endomorphismes

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et on considère les endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans $\mathscr{B}$ sont respectivement A et R.
On note $\mathscr{C} = (u_1, u_2, u_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ telle que P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathcal{C}$.

1. Déterminer les matrices de f et g dans la base $\mathscr{C}$.

2. ***a)*** Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}\,(f)$.

b) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$.

3. ***a)*** Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}\,(g)$.

b) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Im}(g)$.

4. Trouver au moins un automorphisme h de $\mathbb{R}^3$ tel que $g = f \circ h$.
On déterminera h par sa matrice H dans la base $\mathscr{C}$, puis on exprimera la matrice de h dans la base $\mathscr{B}$ à l'aide de H et de P.

Exercice 32 (`HEC 2007`)

1. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) ; soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice associée T relativement à cette base s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les valeurs propres de t. Déterminer les sous-espaces propres de t associés, et donner une base de chacun d'entre eux.
L'endomorphisme t est-il diagonalisable ? Est-il bijectif ?

L'objet des questions suivantes est une généralisation des résultats précédents.

2. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n+1}$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_{2n+1})$.
Soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n+1}$ défini par :

× pour tout i de $[\![1, 2n+1]\!]$, avec $i \neq n+1$: $t\,(e_i) = e_1$.

× $t\,(e_{n+1}) = e_1 + e_2 + \cdots + e_{2n+1}$.

a) Déterminer la matrice T associée à l'endomorphisme t relativement à la base $(e_1, e_2, \ldots, e_{2n+1})$.

b) Déterminer le rang de t, ainsi que la dimension du noyau de t.

c) Justifier que 0 est valeur propre de t. Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0, ainsi qu'une base de ce sous-espace.

3. Montrer que $\mathrm{Im}\,(t \circ t) \subset \mathrm{Im}\,(t)$, où $\mathrm{Im}\,(u)$ désigne l'image d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^{2n+1}$.

4. Soit $\tilde{t}$ l'endomorphisme défini sur $\mathrm{Im}\,(t)$ par : pour tout x de $\mathrm{Im}\,(t)$, $\tilde{t}\,(x) = t\,(x)$.
Établir que $\mathscr{B} = \left(e_1, \ \sum\limits_{i=1}^{2n+1} e_i \right)$ constitue une base de $\mathrm{Im}\,(t)$. Écrire la matrice associée à $\tilde{t}$ relativement à la base $\mathscr{B}$.

5. ***a)*** Soit λ une valeur propre non nulle de t, et x un vecteur propre associé à λ.
Montrer que x appartient à $\mathrm{Im}\,(t)$.

b) En déduire toutes les valeurs propres de t. L'endomorphisme t est-il diagonalisable ?

Exercice 33 (HEC 2017)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrés à n lignes et n colonnes à coefficients réels et B_n l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 1.

1. *Exemple 1.* Soit A la matrice de B_2 définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer la matrice A^2.

b) Quelles sont les valeurs propres de A ?

c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. *Exemple 2.* Soit B la matrice de B_3 définie par : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère les instructions et la sortie (ans) **Scilab** suivantes :

```
B = [0,1,0;1,0,0;0,0,1]
P = [1,1,0;1,-1,0;0,0,1]
inv(P) * B * P
```

```
ans  =
    1.   0.   0.
    0. - 1.   0.
    0.   0.   1.
```

a) Déduire les valeurs propres de B de la séquence **Scilab** précédente.

b) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de B.

3. *a)* Combien existe-t-il de matrices appartenant à B_n ?

b) Combien existe-t-il de matrices de B_n dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1 ?

4. Dans cette question, n est un entier supérieur ou égal à 2.
Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. On note :

- id l'endomorphisme identité de E ;
- F le noyau de l'endomorphisme $(u + \mathrm{id})$ et G le noyau de l'endomorphisme $(u - \mathrm{id})$;
- p la dimension de F et q la dimension de G.

On suppose que $u \circ u = \mathrm{id}$.

a) Justifier que l'image de $(u - \mathrm{id})$ est incluse dans F.

b) En déduire l'inégalité : $p + q \geqslant n$.
On suppose désormais que $1 \leqslant p < q$.
Soit $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une base de F et $(g_1, g_2, \ldots, g_q)$ une base de G.

c) Justifier que $(f_1, f_2, \ldots, f_p,\ g_1, g_2, \ldots, g_q)$ est une base de E.

d) Calculer $u(g_1 - f_1)$ et $u(g_1 + f_1)$.

e) Trouver une base de E dans laquelle la matrice de u appartient à B_n.

Exercice 34 (HEC 2018)
Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

- On note $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$ et $0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}$ l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$.
- On pose $f^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ et : $\forall j \in \mathbb{N},\ f^{j+1} = f \circ f^j$.
- On suppose que f^n est l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$: $\boxed{f^n = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}}$

1. Soit M la matrice définie par : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le spectre de M. La matrice M est-elle diagonalisable ?

b) Préciser le rang des matrices M et M^2 respectivement.

c) Quels sont les polynômes annulateurs de M dont le degré est égal à 3 ?

2. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on note F_j l'image de l'endomorphisme f^j et r_j son rang :

$$F_j = \mathrm{Im}(f^j) \quad \text{et} \quad r_j = \dim(F_j)$$

Pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, on note g_j la restriction de f à F_j, c'est à dire l'application linéaire de F_j dans $\mathbb{R}^n$ définie par : $\forall x \in F_j,\ g_j(x) = f(x)$.

a) Calculer r_0 et r_n.

b) Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$.

(i) Déterminer le rang de g_j.

(ii) Justifier l'égalité : $r_j - r_{j+1} = \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap F_j)$.

c) Établir les inégalités : $n \geqslant r_0 - r_1 \geqslant r_1 - r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_{n-1} - r_n \geqslant 0$.

Exercice 35 (HEC 2001)
On note m un paramètre réel et on considère les matrices H_m définies par :

$$H_m = \begin{pmatrix} -1-m & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}$$

On note h_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice H_m dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. On suppose dans cette question que $m = 2$.

a) Déterminer les valeurs propres de la matrice H_2 et les sous-espaces propres associés.

b) La matrice H_2 est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une base de vecteurs propres.

2. Étudier de même les valeurs propres et les sous-espaces propres de H_0.
Cette matrice est-elle diagonalisable ?

3. *a)* Montrer qu'il existe un réel a, qu'on déterminera, qui est valeur propre de la matrice H_m pour toutes les valeurs du paramètre m.

b) Déterminer, pour chaque valeur de m, le sous-espace propre associé à la valeur propre a. Montrer qu'on peut trouver un vecteur non nul v_1 appartenant à tous ces sous-espaces.

4. Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$.
Déterminer les vecteurs $h_m(v_2)$ et $h_m(v_3)$ et montrer que ces vecteurs appartiennent à F pour tout m réel.

5. En se placant dans la base de $\mathbb{R}^3$ formée des vecteurs v_1, v_2 et v_3, déterminer les valeurs de m pour lesquelles la matrice H_m est diagonalisable.

Exercice 36 (EML 2019)
L'objectif de cet exercice est d'étudier des exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes entre elles.

PARTIE A : Premier exemple

On considère la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
Justifier que A est inversible et diagonalisable.

2. Déterminer une matrice D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale où les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, et une matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que : $A = P\,D\,P^{-1}$.
Expliciter la matrice D^{-1}.

3. On note $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer Q^2 et $Q\,D\,Q$.

4. En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

PARTIE B : Deuxième exemple

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x, -z, y+2z)$$

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère également les vecteurs u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^3$ définis par : $u_1 = (1,0,0)$ et $u_2 = (0,1,-1)$.

5. Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible.

6. *a.* Vérifier que 1 est valeur propre de f et (u_1, u_2) est une base du sous-espace propre associée.
b. Déterminer un vecteur u_3 de $\mathbb{R}^3$ tel que : $f(u_3) - u_3 = u_2$.
c. Montrer que la famille $\mathscr{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On admet que $\mathscr{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est également une base de $\mathbb{R}^3$.

7. *a.* Écrire la matrice M_1 de f dans la base $\mathscr{B}_1$ et la matrice M_2 de f dans la base $\mathscr{B}_2$.
b. Justifier que les matrices M_1 et M_2 sont semblables, et calculer M_1M_2.

8. En déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.

PARTIE C : Troisième exemple

On considère la matrice T de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose : $N = T - I_3$.

9. Justifier que la matrice T est inversible. Est-elle diagonalisable ?

10. *a.* Calculer N^3 puis $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2)$.
b. En déduire une expression de T^{-1} en fonction de I_3, N et N^2.

11. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N.
a. Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que : $g \circ g(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ et $g \circ g \circ g(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.
b. Montrer que la famille $\mathscr{B}_3 = (g \circ g(u), g(u), u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
c. Écrire la matrice de g dans la base $\mathscr{B}_3$.
d. Calculer $N^2 - N$ et en déduire que les matrices N et $N^2 - N$ sont semblables.

12. Montrer que les matrices T et T^{-1} sont semblables.

Exercice 37 (ECRICOME 2019)
On considère dans cet exercice l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, dont on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie A

1. ***a)*** Calculer A^2 puis vérifier que A^3 est la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Justifier que 0 est l'unique valeur propre possible de f.

c) Déterminer une base et la dimension du noyau de f.

d) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Soient $e'_1 = (-1, -1, 1)$, $e'_2 = (2, -1, 1)$ et $e'_3 = (-1, 2, 1)$.

a) Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.

b) Démontrer que la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$ est la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On pose : $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On note h l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans base $\mathscr{B}$ est M.

a) Déterminer deux réels α et β tels que $M = \alpha A + \beta I$ (I est la matrice identité d'ordre 3).

b) Déterminer la matrice M' de h dans la base $\mathscr{B}'$.

c) En déduire que M est inversible.

d) À l'aide de la question ***1.a)***, calculer $(M - I)^3$.
En déduire l'expression de M^{-1} en fonction des matrices I, M et M^2.

e) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer M^n pour tout entier naturel n, en fonction des matrices I, A et A^2. Cette formule est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Partie B

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme g de E vérifiant $g \circ g = f$.
On suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice V carrée d'ordre 3 telle que :

$$V^2 = T$$

On note g l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}'$ est V.

4. Montrer : $VT = TV$. En déduire : $g \circ f = f \circ g$.

5. ***a)*** Montrer que $g(e'_1)$ appartient au noyau de f.
En déduire qu'il existe un réel a tel que : $g(e'_1) = a \cdot e'_1$.

b) Montrer que $g(e'_2) - a \cdot e'_2$ appartient aussi au noyau de f.
En déduire qu'il existe un réel b tel que : $g(e'_2) = b \cdot e'_1 + a \cdot e'_2$.

c) Montrer : $f \circ g(e'_3) = g \circ f(e'_3) = a \cdot e'_2 + b \cdot e'_1$.
En déduire que $g(e'_3) - a \cdot e'_3 - b \cdot e'_2$ appartient au noyau de f.

d) En déduire qu'il existe un réel c tel que : $V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

6. Calculer V^2 en fonction de a, b et c, puis en utilisant l'hypothèse $V^2 = T$, obtenir une contradiction.

Exercice 38 (ECRICOME 2020)
Dans cet exercice, on désigne par $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3, et on note I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Soit a un réel ; on pose $M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie A : Étude du cas où $a = 1$

Dans toute cette partie, on suppose que $a = 1$.

1. Expliciter la matrice M, puis calculer $(M - I_3)^2$.

2. En déduire l'unique valeur propre possible de M.

3. La matrice M est-elle inversible ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie B : Étude du cas où $a = 0$

Dans cette partie, on suppose que $a = 0$.

4. Démontrer que 1 est une valeur propre de M, et donner une base et la dimension du sous-espace propre associé.

5. Démontrer que M n'est pas inversible.

6. En utilisant les deux questions précédentes, déterminer l'ensemble des valeurs propres de M, et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie C : Étude du cas où a est différent de 0 et de 1

Dans cette partie, on suppose que a est différent de 0 et de 1.
On pose $E = \mathbb{R}^3$, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice M.
Soit $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 0)$.

7. Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de E.

8. Calculer $f(u)$, $f(v)$.

9. Calculer $f(w)$ et trouver deux réels α et β tels que $f(w) = \alpha v + \beta w$.

10. Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$, que l'on notera T.

11. En déduire l'ensemble des valeurs propres de M, et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Oraux HEC

Exercice 39

1. Question de cours : Définition et représentation graphique de la fonction partie entière.
On note E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par les quatre fonctions f_0, f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = \mathrm{e}^x,\ f_3(x) = x\mathrm{e}^x.$$

2. On note : $\mathscr{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$.

a) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de F.

b) Montrer que toutes les fonctions de F sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

3. Soit Φ l'application définie par : pour tout $f \in F$, $\Phi(f) = f'$, où f' est la dérivée de f.

a) Justifier que Φ est un endomorphisme de F et écrire la matrice M de Φ dans la base $\mathscr{B}$.

b) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

c) Montrer que f_3 appartient à $\mathrm{Im}(\Phi)$ et résoudre dans F l'équation : $\Phi(f) = f_3$.

4. On note G l'ensemble des fonctions g de E telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x+1) - g(x) = 0.$$

a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et trouver $F \cap G$.

b) Trouver un élément de G qui n'appartienne pas à F.

5. Trouver toutes les fonctions de F vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) - f(x) = (\mathrm{e} - 1)\, f'(x)$.

Exercice 40

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2. On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on note D et T les deux applications suivantes :

$$D : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & ad - bc \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad T : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & a + d \end{array} \right.$$

2. Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Exprimer $D(AB)$ en fonction de $D(A)$ et $D(B)$. Montrer que $T(AB) = T(BA)$.

b) En déduire que si A et B sont semblables, on a $D(A) = D(B)$ et $T(A) = T(B)$.

3. Déterminer $\mathrm{Ker}(D)$ et $\mathrm{Ker}(T)$. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(T)$?
Dorénavant, si $u \in \mathscr{L}(E)$ de matrice A dans une base $\mathscr{B}$ de E, on note :

$$D(u) = D(A) \quad \text{et} \quad T(u) = T(A)$$

4. On note id_E l'endomorphisme identité de E. Exprimer $u^2 = u \circ u$ en fonction de u et id_E.

5. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathcal{S}_0 = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ v - v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E)}\}$.
Montrer que $\mathcal{S}_0$ est un espace vectoriel contenant $\{P(u) \mid P \in \mathbb{R}[X]\}$.

6. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ avec $u \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. On pose : $\mathcal{S} = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ v - v \circ u = u\}$.

a) Montrer que si $\mathcal{S}$ est non vide, alors l'endomorphisme u ne peut être bijectif.
En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur u^2 pour que $\mathcal{S}$ soit non vide.

b) On suppose que $\mathcal{S}$ est non vide. Établir l'existence d'une base $\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2)$ de E dans laquelle la matrice M_u de u d'écrit $M_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et déterminer la forme générale de la matrice des éléments v de $\mathcal{S}$ dans cette même base.

c) On suppose que $\mathcal{S}$ est non vide. Montrer que $\mathcal{S} = \{v_0 + \alpha \mathrm{id}_E + \beta u, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ où v_0 est un endomorphisme non inversible de E à déterminer.

Exercice 41

1. Question de cours : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I.
Propriétés de l'application $x \in I \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$.
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.
Pour tout fonction $f \in E$, on note $T(f)$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)\, dt.$$

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, soit f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = \mathrm{e}^{ax}$. Déterminer $T(f_a)$.

3. *a)* Montrer que pour toute fonction $f \in E$, l'application $T(f)$ appartient à E et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer la fonction dérivée de la fonction $T(f)$.

b) On suppose que f est une fonction bornée de E. Montrer que $T(f)$ est bornée et établir l'existence d'un réel K tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|T(f)(x) - T(f)(y)| \leqslant K|x - y|$.

4. Soit T l'application de E dans E qui à $f \in E$, associe $T(f)$.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il surjectif ?

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Montrer que $T(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

c) Soit T_n la restriction à $\mathbb{R}_n[X]$ de l'endomorphisme T et $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. L'endomorphisme T_n est-il diagonalisable ? T_n est-il bijectif ?

Exercice 42

1. Question de cours : Définition d'un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.
Si $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_p[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}_p[X]$, alors $P(A)$ désigne la matrice $a_0\, I_n + a_1\, A + \cdots + a_p\, A^p$.

2. Soit A et Q deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose que la matrice Q est inversible, d'inverse notée Q^{-1}.
Soit P un polynôme à coefficients réels. Expliciter $P\big(Q^{-1}AQ\big)$ en fonction de $P(A)$, Q et Q^{-1}.

3. *a)* Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts et soit φ l'application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, associe le n-uplet $\big(P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)\big)$.
Montrer que l'application φ est bijective.

b) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n réels distincts non nuls et $T = (t_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $t_{i,i} = \lambda_i$.

Établir l'existence d'un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\lambda_i \ P(\lambda_i) = 1$$

Que vaut $T \times P(T)$? Conclure.

4. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ soit égale à $P(A)$.

Exercice 43

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
On définit l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.
On pose $H_0(X) = 1$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $H_k(X) = \dfrac{X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)}{k!}$.
On note $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.

2. ***a)*** Montrer que φ est un endomorphisme non bijectif de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Justifier que la famille $\mathscr{B}' = (H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Déterminer la matrice M' de φ dans la base $\mathscr{B}'$.

d) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

3. Dans cette question, p est un entier fixé supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, soit f_i l'application de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall Q \in \mathbb{R}_p[X]$, $f_i(Q) = \sum\limits_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \dbinom{i}{k} Q(k)$.

a) Justifier que pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, l'application f_i est linéaire.

b) Soit $(i, j) \in [\![0, p]\!]^2$. Établir la relation : $f_i(H_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

c) Soit a_0, a_1, $\ldots$, a_p les réels vérifiant : $X^p = a_0 H_0 + a_1 H_1 + \cdots + a_p H_p$.
Déduire de la question précédente, la relation : $\forall i \in [\![0, p]\!]$, $a_i = \sum\limits_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \dbinom{i}{k} k^p$.

Exercice 44

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

1. Question de cours
Que peut-on dire du degré de la somme et du produit de deux polynômes ?

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et f l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, fait correspondre le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) \ = \ n\, X\, P(X) + X(1-X)P'(X), \text{ où } P' \text{ désigne la dérivée du polynôme } P$$

2. ***a)*** Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) L'endomorphisme f est-il bijectif ? Quel est son rang ?

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note H_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $H_k(X) = X^k (1-X)^{n-k}$.

a) Calculer pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f(H_k)(X)$.

b) Montrer que $\mathscr{B} = (H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Trouver les coordonnées du polynôme $(X+1)^n$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 45

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles à n lignes et n colonnes.
Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ la transposée de M.

1. *a)* Question de cours : théorème du rang.

b) Justifier que l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont la somme des coefficients est nulle est un espace vectoriel et préciser sa dimension.

2. Soit φ l'application qui à toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, associe la matrice $\varphi(M) = M + {}^tM$.
Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Dans cette question, et seulement dans cette question, on suppose que $n = 2$.
Pour tout $(i, j) \in [\![1, 2]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont nuls excepté celui de la $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.
On rappelle que la famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Écrire la matrice A de φ dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$.

b) Préciser le rang de φ.

c) Donner une base du noyau de φ.

4. On suppose désormais $n \geqslant 3$.

a) Déterminer $\varphi(\varphi(M))$, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de l'endomorphisme φ ?

b) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?