Colles

semaine 15 : 3 janvier - 8 janvier

I. Questions de cours

Exercice 1
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $(3I - 2N)^n$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3
Valeurs propres de matrices semblables. Énoncé et démonstration.

II. Autres exercices

Exercice 4 `(EDHEC 2013)`

1. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que l'on a $A^2 \neq 0$ et calculer A^3.

b) Déterminer une base (a) de $\mathrm{Ker}(f)$ ainsi qu'une base (b, c) de $\mathrm{Im}(f)$.

c) Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$.

Dans la suite, on considère un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que : $g^2 \neq 0$ et $g^3 = 0$, ce qui signifie que $g \circ g$ n'est pas l'endomorphisme nul, mais que $g \circ g \circ g$ est l'endomorphisme nul.
En désignant par M la matrice de g dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$, on a donc :

$$M^2 \neq 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad M^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

On se propose de montrer, dans ce cas plus général, que $\mathrm{Im}(g^2) = \mathrm{Ker}(g)$.

1. *a)* Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de g.

b) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que 0 est effectivement la seule valeur propre de g.

c) En déduire, toujours en raisonnant par l'absurde, que g n'est pas diagonalisable.

2. ***a)*** Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$.

b) Montrer que $(\ u, g(u), g^2(u)\ )$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathscr{B}'$.

c) Donner la matrice N de g dans la base $\mathscr{B}'$.

d) Déterminer $\operatorname{Im} g$ et donner sa dimension. En déduire une base de $\operatorname{Ker}(g)$.
Pour finir, déterminer $\operatorname{Im}(g^2)$ puis conclure.

Exercice 5 `(EDHEC 2015)`
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. ***a)*** Déterminer la dimension de $\operatorname{Im}(f)$, puis montrer que la famille $(e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_5)$ est une base de $\operatorname{Im}(f)$.

b) En déduire la dimension de $\operatorname{Ker}(f)$ puis donner une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

2. On note $u = e_2 + e_3 + e_4$ et $v = e_1 + e_5$.

a) Écrire $f(u)$ et $f(v)$ comme combinaisons linéaires de e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, puis $f(u - v)$ et $f(u + 3v)$ comme combinaisons linéaires de u et v.

b) En déduire les valeurs propres de f et préciser les sous-espaces propres associés.

c) Établir que C est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice R inversible telles que $C = RDR^{-1}$.

3. ***a)*** Établir la relation suivante : $D(D + I)(D - 3I) = 0$.

b) En déduire que le polynôme P défini par $P(X) = X^3 - 2X^2 - 3X$ est un polynôme annulateur de C.

4. On admet que (principe de la division euclidienne), pour tout entier naturel n non nul, il existe un unique polynôme Qn et trois réels a_n, b_n et c_n tels que :

$$X^n = (X^3 - 2X^2 - 3X)\ Q_n(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n$$

a) En utilisant les racines de P, déterminer les valeurs de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

b) Déduire de ce qui précède l'expression, pour tout entier naturel n non nul, de C^n en fonction de C et C^2.

5. Compléter, à l'aide de matrices de type `zeros` et `ones`, les deux espaces laissés libres dans la commande `Scilab` suivante pour qu'elle permette de construire la matrice C.

```
C = [ones(1,5);---,---;ones(1,5)]
```

Exercice 6 `(EDHEC 2012)`

1. Montrer que, si f désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ diagonalisable, alors l'endomorphisme f^2 est aussi diagonalisable.
On rappelle que $f^2 = f \circ f$.
On se propose dans la suite de montrer que la réciproque de cette assertion est fausse.
Pour ce faire, on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$.
On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2. *a)* Déterminer la matrice A^2 puis établir que $A^4 = I$.
En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A.

b) Donner une base (u) de $\mathrm{Ker}(g - Id)$.

c) Déterminer $\mathrm{Ker}(g + Id)$.

d) En déduire que g n'est pas diagonalisable.

3. *a)* Résoudre l'équation, $A^2X = -X$, d'inconnue le vecteur X élément de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et en déduire une base (v, w) de $\mathrm{Ker}(g^2 + Id)$.

b) Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) Écrire la matrice de g^2 dans la base (u, v, w) et conclure.

Exercice 7 `(EML 2013)`

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

1. Est-ce que A est diagonalisable dans $M_4(\mathbb{R})$?

2. Déterminer les valeurs propres de A et, pour chaque valeur propre de A, déterminer une base du sous-espace propre associé.

3. En déduire une matrice diagonale $D \in M_4(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux rangés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible $P \in M_4(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux tous égaux à 1, telles que $A = PDP^{-1}$, et calculer P^{-1}.
On appelle commutant de A, et on note C_A, l'ensemble des matrices M de $M_4(\mathbb{R})$ telles que :
$$AM = MA$$
On appelle commutant de D, et on note C_D, l'ensemble des matrices N de $M_4(\mathbb{R})$ telles que :
$$DN = ND$$

4. Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $M_4(\mathbb{R})$.

5. Soit $M \in M_4(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$. Montrer :
$$M \in C_A \Leftrightarrow N \in C_D$$

6. Déterminer C_D, en utilisant les coefficients des matrices.

7. En déduire : $C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$.

8. Déterminer une base de C_A et la dimension de C_A.

Exercice 8 (EML 2012)

On considère les matrices carrées d'ordre 2 suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Partie I : Étude de la matrice B

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de B.
Est-ce que B est diagonalisable ?

2. Déterminer une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, telles que $B = PDP^{-1}$

3. Vérifier que $D^2 = 5D - 4I$ et exprimer B^2 comme combinaison linéaire de B et I.

4. Montrer que B est inversible et exprimer B^{-1} comme combinaison linéaire de B et I.

Partie II : Étude d'un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

On considère l'application définie sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par : $h : M \mapsto AMB$.

1. Vérifier que h est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que h est bijectif et exprimer h^{-1} sous une forme analogue à celle donnée pour h.

3. On se propose dans cette question de déterminer les valeurs propres de h.

a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}, M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $N = MP$, ou P est la matrice définie dans la question **I2.**
Montrer : $h(M) = \lambda M \Leftrightarrow AND = \lambda N$, où D est la matrice définie dans la question **I2.**

b) Déterminer les réels λ pour lesquels il existe une matrice N de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A\ N\ D = \lambda N$. À cet effet, on pourra noter $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

c) En déduire les valeurs propres de h.
Montrer que h est diagonalisable et, donner une matrice diagonale représentant h.

d) On note e l'endomorphisme identité de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on note 0 l'endomorphisme nul de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$
Montrer : $(h - e) \circ (h + e) \circ (h - 4e) \circ (h + 4e) = 0$.

Exercice 9 (EML 2011)

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Partie I : Détermination d'une racine carrée de A

1. Sans calcul, justifier que A est diagonalisable et non inversible. Déterminer le rang de A.

2. Montrer que 0, 1 et 4 sont les trois valeurs propres de A et déterminer les sous-espaces propres associés.

3. En déduire une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, telles que : $A = PDP^{-1}$.

4. Calculer P^{-1}.

5. Montrer qu'il existe une matrice diagonale Δ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, telle que $\Delta^2 = D$, et déterminer Δ.

6. On note $R = P\Delta P^{-1}$. Montrer $R^2 = A$ et calculer R.

Partie II : Étude d'endomorphismes

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et on considère les endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans $\mathscr{B}$ sont respectivement A et R.
On note $\mathscr{C} = (u_1, u_2, u_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ telle que P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathcal{C}$.

1. Déterminer les matrices de f et g dans la base $\mathscr{C}$.

2. ***a)*** Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}\,(f)$.

b) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$.

3. ***a)*** Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}\,(g)$.

b) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Im}(g)$.

4. Trouver au moins un automorphisme h de $\mathbb{R}^3$ tel que $g = f \circ h$.
On déterminera h par sa matrice H dans la base $\mathscr{C}$, puis on exprimera la matrice de h dans la base $\mathscr{B}$ à l'aide de H et de P.

Exercice 10 (`HEC 2007`)

1. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) ; soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice associée T relativement à cette base s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les valeurs propres de t. Déterminer les sous-espaces propres de t associés, et donner une base de chacun d'entre eux.
L'endomorphisme t est-il diagonalisable ? Est-il bijectif ?

L'objet des questions suivantes est une généralisation des résultats précédents.

2. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n+1}$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_{2n+1})$.
Soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n+1}$ défini par :

× pour tout i de $[\![1, 2n+1]\!]$, avec $i \neq n+1$: $t(e_i) = e_1$.

× $t(e_{n+1}) = e_1 + e_2 + \cdots + e_{2n+1}$.

a) Déterminer la matrice T associée à l'endomorphisme t relativement à la base $(e_1, e_2, \ldots, e_{2n+1})$.

b) Déterminer le rang de t, ainsi que la dimension du noyau de t.

c) Justifier que 0 est valeur propre de t. Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0, ainsi qu'une base de ce sous-espace.

3. Montrer que $\mathrm{Im}\,(t \circ t) \subset \mathrm{Im}\,(t)$, où $\mathrm{Im}\,(u)$ désigne l'image d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^{2n+1}$.

4. Soit $\tilde{t}$ l'endomorphisme défini sur $\mathrm{Im}\,(t)$ par : pour tout x de $\mathrm{Im}\,(t)$, $\tilde{t}\,(x) = t\,(x)$.
Établir que $\mathscr{B} = \left(e_1,\ \sum\limits_{i=1}^{2n+1} e_i\right)$ constitue une base de $\mathrm{Im}\,(t)$. Écrire la matrice associée à $\tilde{t}$ relativement à la base $\mathscr{B}$.

5. ***a)*** Soit λ une valeur propre non nulle de t, et x un vecteur propre associé à λ.
Montrer que x appartient à $\mathrm{Im}\,(t)$.

b) En déduire toutes les valeurs propres de t. L'endomorphisme t est-il diagonalisable ?

Exercice 11 (HEC 2017)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrés à n lignes et n colonnes à coefficients réels et B_n l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 1.

1. *Exemple 1.* Soit A la matrice de B_2 définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer la matrice A^2.

b) Quelles sont les valeurs propres de A ?

c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. *Exemple 2.* Soit B la matrice de B_3 définie par : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère les instructions et la sortie (`ans`) **Scilab** suivantes :

```
B = [0,1,0;1,0,0;0,0,1]
P = [1,1,0;1,-1,0;0,0,1]
inv(P) ⋆ B ⋆ P
```

```
ans  =
    1.   0.   0.
    0. - 1.   0.
    0.   0.   1.
```

a) Déduire les valeurs propres de B de la séquence **Scilab** précédente.

b) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de B.

3. ***a)*** Combien existe-t-il de matrices appartenant à B_n ?

b) Combien existe-t-il de matrices de B_n dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1 ?

4. Dans cette question, n est un entier supérieur ou égal à 2.
Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. On note :

- id l'endomorphisme identité de E ;
- F le noyau de l'endomorphisme $(u + \mathrm{id})$ et G le noyau de l'endomorphisme $(u - \mathrm{id})$;
- p la dimension de F et q la dimension de G.

On suppose que $u \circ u = \mathrm{id}$.

a) Justifier que l'image de $(u - \mathrm{id})$ est incluse dans F.

b) En déduire l'inégalité : $p + q \geqslant n$.
On suppose désormais que $1 \leqslant p < q$.
Soit $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une base de F et $(g_1, g_2, \ldots, g_q)$ une base de G.

c) Justifier que $(f_1, f_2, \ldots, f_p,\ g_1, g_2, \ldots, g_q)$ est une base de E.

d) Calculer $u(g_1 - f_1)$ et $u(g_1 + f_1)$.

e) Trouver une base de E dans laquelle la matrice de u appartient à B_n.

Exercice 12 (HEC 2018)
Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
- On note $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$ et $0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}$ l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$.
- On pose $f^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ et : $\forall j \in \mathbb{N},\ f^{j+1} = f \circ f^j$.
- On suppose que f^n est l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$: $\boxed{f^n = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}}$

1. Soit M la matrice définie par : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le spectre de M. La matrice M est-elle diagonalisable ?

b) Préciser le rang des matrices M et M^2 respectivement.

c) Quels sont les polynômes annulateurs de M dont le degré est égal à 3 ?

2. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on note F_j l'image de l'endomorphisme f^j et r_j son rang :
$$F_j = \mathrm{Im}(f^j) \quad \text{et} \quad r_j = \dim(F_j)$$
Pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, on note g_j la restriction de f à F_j, c'est à dire l'application linéaire de F_j dans $\mathbb{R}^n$ définie par : $\forall x \in F_j,\ g_j(x) = f(x)$.

a) Calculer r_0 et r_n.

b) Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$.

(i) Déterminer le rang de g_j.

(ii) Justifier l'égalité : $r_j - r_{j+1} = \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap F_j)$.

c) Établir les inégalités : $n \geqslant r_0 - r_1 \geqslant r_1 - r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_{n-1} - r_n \geqslant 0$.

Exercice 13 (HEC 2001)
On note m un paramètre réel et on considère les matrices H_m définies par :
$$H_m = \begin{pmatrix} -1-m & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}$$
On note h_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice H_m dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. On suppose dans cette question que $m = 2$.

a) Déterminer les valeurs propres de la matrice H_2 et les sous-espaces propres associés.

b) La matrice H_2 est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une base de vecteurs propres.

2. Étudier de même les valeurs propres et les sous-espaces propres de H_0.
Cette matrice est-elle diagonalisable ?

3. *a)* Montrer qu'il existe un réel a, qu'on déterminera, qui est valeur propre de la matrice H_m pour toutes les valeurs du paramètre m.

b) Déterminer, pour chaque valeur de m, le sous-espace propre associé à la valeur propre a. Montrer qu'on peut trouver un vecteur non nul v_1 appartenant à tous ces sous-espaces.

4. Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$.
Déterminer les vecteurs $h_m(v_2)$ et $h_m(v_3)$ et montrer que ces vecteurs appartiennent à F pour tout m réel.

5. En se placant dans la base de $\mathbb{R}^3$ formée des vecteurs v_1, v_2 et v_3, déterminer les valeurs de m pour lesquelles la matrice H_m est diagonalisable.

Exercice 14 (`EML 2019`)
L'objectif de cet exercice est d'étudier des exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes entre elles.

PARTIE A : Premier exemple

On considère la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
Justifier que A est inversible et diagonalisable.

2. Déterminer une matrice D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale où les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, et une matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que : $A = P\,D\,P^{-1}$.
Expliciter la matrice D^{-1}.

3. On note $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer Q^2 et $Q\,D\,Q$.

4. En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

PARTIE B : Deuxième exemple

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x, -z, y+2z)$$

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère également les vecteurs u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^3$ définis par : $u_1 = (1,0,0)$ et $u_2 = (0,1,-1)$.

5. Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible.

6. ***a.*** Vérifier que 1 est valeur propre de f et (u_1, u_2) est une base du sous-espace propre associée.

b. Déterminer un vecteur u_3 de $\mathbb{R}^3$ tel que : $f(u_3) - u_3 = u_2$.

c. Montrer que la famille $\mathscr{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On admet que $\mathscr{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est également une base de $\mathbb{R}^3$.

7. ***a.*** Écrire la matrice M_1 de f dans la base $\mathscr{B}_1$ et la matrice M_2 de f dans la base $\mathscr{B}_2$.

b. Justifier que les matrices M_1 et M_2 sont semblables, et calculer $M_1 M_2$.

8. En déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.

PARTIE C : Troisième exemple

On considère la matrice T de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose : $N = T - I_3$.

9. Justifier que la matrice T est inversible. Est-elle diagonalisable ?

10. ***a.*** Calculer N^3 puis $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2)$.

b. En déduire une expression de T^{-1} en fonction de I_3, N et N^2.

11. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N.

a. Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que : $g \circ g(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ et $g \circ g \circ g(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

b. Montrer que la famille $\mathscr{B}_3 = (g \circ g(u), g(u), u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c. Écrire la matrice de g dans la base $\mathscr{B}_3$.

d. Calculer $N^2 - N$ et en déduire que les matrices N et $N^2 - N$ sont semblables.

12. Montrer que les matrices T et T^{-1} sont semblables.

Exercice 15 (`ECRICOME 2019`)
On considère dans cet exercice l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, dont on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie A

1. ***a)*** Calculer A^2 puis vérifier que A^3 est la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Justifier que 0 est l'unique valeur propre possible de f.

c) Déterminer une base et la dimension du noyau de f.

d) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Soient $e'_1 = (-1, -1, 1)$, $e'_2 = (2, -1, 1)$ et $e'_3 = (-1, 2, 1)$.

a) Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.

b) Démontrer que la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$ est la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On pose : $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On note h l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans base $\mathscr{B}$ est M.

a) Déterminer deux réels α et β tels que $M = \alpha A + \beta I$ (I est la matrice identité d'ordre 3).

b) Déterminer la matrice M' de h dans la base $\mathscr{B}'$.

c) En déduire que M est inversible.

d) À l'aide de la question ***1.a)***, calculer $(M - I)^3$.
En déduire l'expression de M^{-1} en fonction des matrices I, M et M^2.

e) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer M^n pour tout entier naturel n, en fonction des matrices I, A et A^2. Cette formule est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Partie B

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme g de E vérifiant $g \circ g = f$.
On suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice V carrée d'ordre 3 telle que :

$$V^2 = T$$

On note g l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}'$ est V.

4. Montrer : $VT = TV$. En déduire : $g \circ f = f \circ g$.

5. ***a)*** Montrer que $g(e'_1)$ appartient au noyau de f.
En déduire qu'il existe un réel a tel que : $g(e'_1) = a \cdot e'_1$.

b) Montrer que $g(e'_2) - a \cdot e'_2$ appartient aussi au noyau de f.
En déduire qu'il existe un réel b tel que : $g(e'_2) = b \cdot e'_1 + a \cdot e'_2$.

c) Montrer : $f \circ g(e'_3) = g \circ f(e'_3) = a \cdot e'_2 + b \cdot e'_1$.
En déduire que $g(e'_3) - a \cdot e'_3 - b \cdot e'_2$ appartient au noyau de f.

d) En déduire qu'il existe un réel c tel que : $V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

6. Calculer V^2 en fonction de a, b et c, puis en utilisant l'hypothèse $V^2 = T$, obtenir une contradiction.

Exercice 16 (ECRICOME 2020)
Dans cet exercice, on désigne par $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3, et on note I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Soit a un réel ; on pose $M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie A : Étude du cas où $a = 1$

Dans toute cette partie, on suppose que $a = 1$.

1. Expliciter la matrice M, puis calculer $(M - I_3)^2$.

2. En déduire l'unique valeur propre possible de M.

3. La matrice M est-elle inversible ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie B : Étude du cas où $a = 0$

Dans cette partie, on suppose que $a = 0$.

4. Démontrer que 1 est une valeur propre de M, et donner une base et la dimension du sous-espace propre associé.

5. Démontrer que M n'est pas inversible.

6. En utilisant les deux questions précédentes, déterminer l'ensemble des valeurs propres de M, et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie C : Étude du cas où a est différent de 0 et de 1

Dans cette partie, on suppose que a est différent de 0 et de 1.
On pose $E = \mathbb{R}^3$, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice M.
Soit $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 0)$.

7. Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de E.

8. Calculer $f(u)$, $f(v)$.

9. Calculer $f(w)$ et trouver deux réels α et β tels que $f(w) = \alpha v + \beta w$.

10. Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$, que l'on notera T.

11. En déduire l'ensemble des valeurs propres de M, et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 17
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

1. ***a)*** Démontrer : $(A - 2\,I_3)^2\,A = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

b) En déduire les valeurs propres possibles de f.

c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
On précisera la dimension des sous-espaces propres.
En particulier, on écrira : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(w)$ où w est un vecteur de première coordonnée 1.

d) L'endomorphisme f est-il bijectif ?
L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Pour tout endomorphisme $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, on rappelle que l'on note g^2 l'endomorphisme défini par :

$$g^2 = g \circ g$$

a) Démontrer : $\mathrm{Ker}\big(f - 2\,\mathrm{id}\big) \subset \mathrm{Ker}\big((f - 2\,\mathrm{id})^2\big)$.

b) Démontrer : $\mathrm{Ker}\big((f - 2\,\mathrm{id})^2\big) = \mathrm{Vect}\,(u, v)$ où $u = (0, 1, 0)$ et $v = (1, 0, 1)$.

3. ***a)*** Démontrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Dans la suite, on notera $\mathscr{B}'$ cette base.

b) On note $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$. Déterminer T.

c) On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
Déterminer l'inverse de P.

d) Rappeler la formule liant les matrices A, T et P.

4. ***a)*** On note : $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exprimer T en fonction de J et N.

b) À l'aide de la formule du binôme, déterminer T^n en fonction de J et N.

5. ***a)*** Démontrer que A est inversible et déterminer son inverse.

b) La formule démontrée en ***4.c)*** est-elle valable pour $n = -1$?

Exercice 18
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

1. ***a)*** Démontrer : $(A + I_3)^2 \,(A - I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

b) En déduire les valeurs propres possibles de f.

c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
On précisera la dimension des sous-espaces propres.
En particulier, on écrira : $\text{Ker}(f - \text{id}) = \text{Vect}\,(w)$ où w est un vecteur de première coordonnée 1.

d) L'endomorphisme f est-il bijectif ?
L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Pour tout endomorphisme $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, on rappelle que l'on note g^2 l'endomorphisme défini par :

$$g^2 = g \circ g$$

a) Démontrer : $\text{Ker}\big(f + \text{id}\big) \subset \text{Ker}\big((f + \text{id})^2\big)$.

b) Démontrer : $\text{Ker}\big((f + \text{id})^2\big) = \text{Vect}\,(u, v)$ où $u = (0, 0, 1)$ et $v = (1, 0, 1)$.

3. ***a)*** Démontrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Dans la suite, on notera $\mathscr{B}'$ cette base.

b) On note $T = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$. Déterminer T.

c) On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
Déterminer l'inverse de P.

d) Rappeler la formule liant les matrices A, T et P.

4. ***a)*** On note : $J = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exprimer T en fonction de J et N.

b) À l'aide de la formule du binôme, déterminer T^n en fonction de J et N.

5. ***a)*** Démontrer que A est inversible et déterminer son inverse.

b) La formule démontrée en ***4.c)*** est-elle valable pour $n = -1$?

Exercice 19

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

1. a) Démontrer : $(A - I_3)^2\,(A + 2\,I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

b) En déduire les valeurs propres possibles de f.

c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
On précisera la dimension des sous-espaces propres.
En particulier, on écrira : $\mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\,(w)$ où w est un vecteur de $1^{\text{ère}}$ coordonnée 1.

d) L'endomorphisme f est-il bijectif ?
L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Pour tout endomorphisme $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, on rappelle que l'on note g^2 l'endomorphisme défini par :

$$g^2 = g \circ g$$

a) Démontrer : $\mathrm{Ker}\big(f - \mathrm{id}\big) \subset \mathrm{Ker}\big((f - \mathrm{id})^2\big)$.

b) Démontrer : $\mathrm{Ker}\big((f - \mathrm{id})^2\big) = \mathrm{Vect}\,(u, v)$ où $u = (1, 0, 1)$ et $v = (0, 0, 1)$.

3. a) Démontrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Dans la suite, on notera $\mathscr{B}'$ cette base.

b) On note $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$. Déterminer T.

c) On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
Déterminer l'inverse de P.

d) Rappeler la formule liant les matrices A, T et P.

4. a) On note : $J = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exprimer T en fonction de J et N.

b) À l'aide de la formule du binôme, déterminer T^n en fonction de J et N.

5. a) Démontrer que A est inversible et déterminer son inverse.

b) La formule démontrée en ***4.c)*** est-elle valable pour $n = -1$?

Oraux HEC

Exercice 20

1. Question de cours : Définition et représentation graphique de la fonction partie entière.
On note E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par les quatre fonctions f_0, f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = \mathrm{e}^x,\ f_3(x) = x\mathrm{e}^x.$$

2. On note : $\mathscr{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$.

a) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de F.

b) Montrer que toutes les fonctions de F sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

3. Soit Φ l'application définie par : pour tout $f \in F$, $\Phi(f) = f'$, où f' est la dérivée de f.

a) Justifier que Φ est un endomorphisme de F et écrire la matrice M de Φ dans la base $\mathscr{B}$.

b) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

c) Montrer que f_3 appartient à $\mathrm{Im}(\Phi)$ et résoudre dans F l'équation : $\Phi(f) = f_3$.

4. On note G l'ensemble des fonctions g de E telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x+1) - g(x) = 0.$$

a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et trouver $F \cap G$.

b) Trouver un élément de G qui n'appartienne pas à F.

5. Trouver toutes les fonctions de F vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) - f(x) = (\mathrm{e}-1)\, f'(x)$.

Exercice 21

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2. On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on note D et T les deux applications suivantes :

$$D : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & ad - bc \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad T : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & a + d \end{array} \right.$$

2. Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Exprimer $D(AB)$ en fonction de $D(A)$ et $D(B)$. Montrer que $T(AB) = T(BA)$.

b) En déduire que si A et B sont semblables, on a $D(A) = D(B)$ et $T(A) = T(B)$.

3. Déterminer $\mathrm{Ker}(D)$ et $\mathrm{Ker}(T)$. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(T)$?
Dorénavant, si $u \in \mathscr{L}(E)$ de matrice A dans une base $\mathscr{B}$ de E, on note :

$$D(u) = D(A) \quad \text{et} \quad T(u) = T(A)$$

4. On note id_E l'endomorphisme identité de E. Exprimer $u^2 = u \circ u$ en fonction de u et id_E.

5. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathcal{S}_0 = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ v - v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E)}\}$.
Montrer que $\mathcal{S}_0$ est un espace vectoriel contenant $\{P(u) \mid P \in \mathbb{R}[X]\}$.

6. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ avec $u \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. On pose : $\mathcal{S} = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ v - v \circ u = u\}$.

a) Montrer que si $\mathcal{S}$ est non vide, alors l'endomorphisme u ne peut être bijectif.
En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur u^2 pour que $\mathcal{S}$ soit non vide.

b) On suppose que $\mathcal{S}$ est non vide. Établir l'existence d'une base $\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2)$ de E dans laquelle la matrice M_u de u d'écrit $M_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et déterminer la forme générale de la matrice des éléments v de $\mathcal{S}$ dans cette même base.

c) On suppose que $\mathcal{S}$ est non vide. Montrer que $\mathcal{S} = \{v_0 + \alpha \mathrm{id}_E + \beta u, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ où v_0 est un endomorphisme non inversible de E à déterminer.

Exercice 22

1. Question de cours : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I.
Propriétés de l'application $x \in I \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$.
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.
Pour tout fonction $f \in E$, on note $T(f)$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)\, dt.$$

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, soit f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = \mathrm{e}^{ax}$. Déterminer $T(f_a)$.

3. a) Montrer que pour toute fonction $f \in E$, l'application $T(f)$ appartient à E et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer la fonction dérivée de la fonction $T(f)$.

b) On suppose que f est une fonction bornée de E. Montrer que $T(f)$ est bornée et établir l'existence d'un réel K tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|T(f)(x) - T(f)(y)| \leqslant K|x - y|$.

4. Soit T l'application de E dans E qui à $f \in E$, associe $T(f)$.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il surjectif ?

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Montrer que $T(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

c) Soit T_n la restriction à $\mathbb{R}_n[X]$ de l'endomorphisme T et $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. L'endomorphisme T_n est-il diagonalisable ? T_n est-il bijectif ?

Exercice 23

1. Question de cours : Définition d'un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.
Si $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_p[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}_p[X]$, alors $P(A)$ désigne la matrice $a_0\, I_n + a_1\, A + \cdots + a_p\, A^p$.

2. Soit A et Q deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose que la matrice Q est inversible, d'inverse notée Q^{-1}.
Soit P un polynôme à coefficients réels. Expliciter $P\big(Q^{-1}AQ\big)$ en fonction de $P(A)$, Q et Q^{-1}.

3. a) Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts et soit φ l'application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, associe le n-uplet $\big(P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)\big)$.
Montrer que l'application φ est bijective.

b) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n réels distincts non nuls et $T = (t_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $t_{i,i} = \lambda_i$.

Établir l'existence d'un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\lambda_i \; P(\lambda_i) = 1$$

Que vaut $T \times P(T)$? Conclure.

4. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ soit égale à $P(A)$.

Exercice 24
Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
On définit l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.
On pose $H_0(X) = 1$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $H_k(X) = \dfrac{X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)}{k!}$.
On note $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.

2. ***a)*** Montrer que φ est un endomorphisme non bijectif de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Justifier que la famille $\mathscr{B}' = (H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Déterminer la matrice M' de φ dans la base $\mathscr{B}'$.

d) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

3. Dans cette question, p est un entier fixé supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, soit f_i l'application de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall Q \in \mathbb{R}_p[X]$, $f_i(Q) = \sum\limits_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \dbinom{i}{k} Q(k)$.

a) Justifier que pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, l'application f_i est linéaire.

b) Soit $(i, j) \in [\![0, p]\!]^2$. Établir la relation : $f_i(H_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

c) Soit a_0, a_1, …, a_p les réels vérifiant : $X^p = a_0 H_0 + a_1 H_1 + \cdots + a_p H_p$.
Déduire de la question précédente, la relation : $\forall i \in [\![0, p]\!]$, $a_i = \sum\limits_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \dbinom{i}{k} k^p$.

Exercice 25
Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

1. Question de cours
Que peut-on dire du degré de la somme et du produit de deux polynômes ?

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et f l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, fait correspondre le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) \;=\; n\,X\,P(X) + X(1-X)P'(X), \text{ où } P' \text{ désigne la dérivée du polynôme } P$$

2. ***a)*** Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) L'endomorphisme f est-il bijectif ? Quel est son rang ?

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note H_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $H_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$.

a) Calculer pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f(H_k)(X)$.

b) Montrer que $\mathscr{B} = (H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Trouver les coordonnées du polynôme $(X+1)^n$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 26

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles à n lignes et n colonnes.
Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ la transposée de M.

1. *a)* Question de cours : théorème du rang.

b) Justifier que l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont la somme des coefficients est nulle est un espace vectoriel et préciser sa dimension.

2. Soit φ l'application qui à toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, associe la matrice $\varphi(M) = M + {}^tM$.
Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Dans cette question, et seulement dans cette question, on suppose que $n = 2$.
Pour tout $(i, j) \in [\![1, 2]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont nuls excepté celui de la $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.
On rappelle que la famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Écrire la matrice A de φ dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$.

b) Préciser le rang de φ.

c) Donner une base du noyau de φ.

4. On suppose désormais $n \geqslant 3$.

a) Déterminer $\varphi(\varphi(M))$, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de l'endomorphisme φ ?

b) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?