Colles

semaine 16 : 10 janvier - 15 janvier

I. Questions de cours

Exercice 1

a) Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$.

b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Rappeler les caractéristiques de la loi $\mathcal{U}(\llbracket a,b \rrbracket)$.

Exercice 2

a) Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$.

b) Soit $\lambda > 0$. Rappeler les caractéristiques de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Exercice 3

a) Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\, dt$.

b) Soit $m \in \mathbb{R}$ et soit $\sigma > 0$. Rappeler les caractéristiques de la loi $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$.

II. Autres exercices

Exercice 4

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Préciser f'.

2. Etudier les variations de f.

3. ***a)*** Montrer que, pour tout $x > 0$: $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} + \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\, dt$.

Encadrer cette dernière intégrale et en déduire que : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

b) Montrer que, pour tout $x > 0$: $\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt + \ln(x) = \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}\, dt$.

En déduire que : $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x)$.

c) Dresser le tableau de variations de f.

4. ***a)*** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge et calculer sa valeur.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, f(t)\, dt$ converge.

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de I_n.

Exercice 5

1. Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t-1}{t^3}\,dt$ *b)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\ln(1+t)-t}\,dt$ *c)* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\,e^t - t^2\,ln(t)\,e^{-t}}{t^3\,e^{2t}-1}\,dt$

2. *a)* Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$ en posant le changement de variable $u=\sqrt{x}$.

b) Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$ en posant le changement de variable $u=\sqrt{1+e^x}$.

3. On considère la fonction définie sur $]-\infty,+\infty[$ par $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{-x}^{x^2} \ln(1+t^2)\,dt$.

Démontrer que φ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,+\infty[$ et déterminer sa dérivée.

Exercice 6

On pose pour tout réel $x>0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $J_0(x)=1-e^{-x}$ et $J_n(x)=\displaystyle\frac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}\,dt$.

1. Calculer pour tout réel $x>0$, $J_1(x)$.

2. Établir pour tout réel $x>0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la relation : $J_n(x)=J_{n-1}(x)-\dfrac{1}{n!}x^n e^{-x}$.

3. En déduire pour tout réel $x>0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, une expression de $J_n(x)$ sous forme de somme.

4. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$ est convergente et calculer sa valeur.

5. On note : $I_n=\displaystyle\int_0^1 e^{n(x+\ln(1-x))}dx$.

À l'aide du changement de variable $t=n(1-x)$, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$I_n = n!\frac{e^n}{n^{n+1}}\,J_n(n)$$

Exercice 7

On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.

1. Justifier la convergence de $J_1=\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$. En déduire la convergence de I_1.

2. On pose, pour tout $a\in\mathbb{R}_+$, $J_n(a)=\displaystyle\int_0^a x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.

Trouver une relation de récurrence entre $J_n(a)$ et $J_{n-2}(a)$. En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, I_n converge et trouver une relation de récurrence liant I_n à I_{n-2}.

3. Calculer I_n, pour tout n impair.

En admettant que $I_0=\sqrt{2\pi}$, calculer I_n, pour tout n pair.

Exercice 8

On considère la fonction numérique F définie par : $F(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{1}{\sqrt{4+t^4}}\,dt$

1. Déterminer le domaine de définition de F et montrer que F est une fonction impaire.

2. Établir, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$: $\dfrac{x}{\sqrt{4+16x^4}} \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{4+x^4}}$.

En déduire la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. Justifier la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.

Exercice 9

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\, dx$.

1. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'intgérale I_n est convergente.

2. Pour tout $n \geqslant 1$, déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} I_k$. Montrer que :

$$\forall n \geqslant 1,\ S_n = \frac{1}{2} - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3\ (1+x^3)^n}\, dx$$

4. En déduire la nature de la série de terme général I_n, et sa somme en cas de convergence.

Exercice 10. *Interversion Limite/Intégrale ?*

Soit la suite de fonctions (f_n) définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = 2nx\mathrm{e}^{-nx^2}$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\, dt$.

1. Calculer pour tout $t \in [0,1]$ la limite de $f_n(t)$ lorsque n tend vers l'infini.

2. Calculer I_n. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$?

3. A-t-on l'égalité suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\, dt = \int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\, dt$?

Exercice 11

On note $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)\, dx$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que I_n est convergente. Calculer I_n en fonction de n.

2) En déduire que (I_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 12

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx$.

1. Calculer I_0, puis trouver une relation entre I_n et I_{n+1}.

2. En déduire I_n en fonction de n.

Exercice 13

On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln(x)}{1-x}\, dx$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n \ln(x)}{1-x}\, dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 x^n \ln(x)\, dx$$

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente.

3. Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, $-1 \leqslant \dfrac{x\ln(x)}{1-x} \leqslant 0$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{n} \leqslant I_n \leqslant 0$, puis la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Montrer que l'intégrale J_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$, et calculer sa valeur.

5. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} J_k$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I = -\sum\limits_{k=2}^{n+1} \dfrac{1}{k^2} + I_{n+1}$.

Exercice 14

1. Soit f la fonction définie par $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1-t}$.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$ converge.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in]0,1[$:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k \ln(t) + \frac{t^{n+1} \ln(t)}{1-t}$$

c) Montrer que la fonction $g : t \mapsto \dfrac{t \ln(t)}{1-t}$ définie sur $]0,1[$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$.

d) En déduire une expression de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\, dt$ sous la forme d'une série de Riemann.

2. Pour tout $x \in]-\infty,1]$, on pose : $L(x) = -\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt$.

a) Montrer que la fonction L est bien définie sur $]-\infty,1]$.

b) Exprimer $L(1)$ à l'aide d'un résultat précédent.

3. *a)* Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $L(x) = -\ln(1-x)\ln(x) + L(1) - L(1-x)$.

b) Déterminer la valeur de $L\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

4. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $L(x) + L(-x) = \dfrac{1}{2}\, L(x^2)$.

Exercice 15

Soit f une fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de classe C^∞ sur $[0,1]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\, dx$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge, puis déterminer sa limite.

2. On suppose que $f(1) \neq 0$. Trouver un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

3. On suppose que $f(1) = 0$. Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

4. Soit h une fonction continue sur $[0,1]$.

a) En utilisant la continuité de h au point 1, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n \int_0^1 x^n \big(h(x) - h(1)\big) dx \right) = 0$$

b) En déduire que la suite $\left(n \displaystyle\int_0^1 x^n h(x)\, dx \right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et exprimer sa limite à l'aide de la fonction h.

Exercice 16 (ESCP 2016 - ORAL - 1.07)
Soit λ un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$P_n(\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \qquad \text{et} \qquad I_n = \int_0^1 (1-x)^n \, \mathrm{e}^{nx} \, dx$$

1. ***a)*** Montrer : $1 - P_n(\lambda) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^{\lambda} x^n \, \mathrm{e}^{-x} \, dx$.

b) Déterminer une relation entre $P_n(n)$ et I_n.

2. Pour tout $x \in \,]0,1[$, on pose $\psi(x) = -\dfrac{x + \ln(1-x)}{x^2}$.
Montrer que ψ admet un prolongement de classe C^1 sur $[0,1[$, prolongement que l'on note encore ψ.
Montrer que ψ réalise une bijection de $[0,1[$ sur un intervalle à préciser.

3. Pour $\sigma \in \,]0,1[$, on pose $\delta = \psi^{-1}\left(\dfrac{1}{2\,\sigma^2}\right)$.

a) Montrer que pour tout $x \in \,]0,1[$, $\big((1-x)\mathrm{e}^x\big)^n = \mathrm{e}^{-nx^2\psi(x)}$.

b) Montrer : $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \displaystyle\int_0^{\delta\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2/2} \, dx \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

c) En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers l'infini.

d) Montrer que $1 - P_n(n)$ est équivalent à $\dfrac{n^n}{n!} \, \mathrm{e}^{-n} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ lorsque n tend vers l'infini.

4. En utilisant le théorème limite central, déterminer un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 17

1. Déterminer les réels x pour lesquels $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^x}$ converge.

On note alors $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^x}$.

2. Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En évaluant $F(n) - F(n+1)$, déterminer à l'aide d'une intégration par parties, une relation de récurrence entre $F(n)$ et $F(n+1)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $F(-n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1}$.

5. Étudier les variations de la fonction F sur son domaine de définition.

6. ***a)*** Pour $x < 0$ fixé, étudier les variations de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^x}$ sur $[0,1]$.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} F(x)$.

7. ***a)*** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{xt^2}{2}} \, dt$.

b) En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

Exercice 18 (ECRICOME 2020)
Pour tout entier naturel non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geqslant 0,\ f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt$$

Partie A : Étude de la fonction f_n

Dans cette partie, on fixe un entier naturel n non nul.

1. Démontrer que la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \geqslant 0,\ f_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}$$

2. Étudier les variations de f_n.

3. Démontrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et calculer sa dérivée seconde.
En déduire que f_n est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

4. ***a)*** Démontrer : $\forall t \geqslant 1,\ t^{2n}-1 \ \geqslant\ n\,(t^2-1)$.

b) Montrer alors : $\forall x \geqslant 1,\ f_n(x) \ \geqslant\ f_n(1) + \dfrac{n}{2}\,(x-1)^2$.

c) En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. Calculer $f_n(0)$, puis démontrer : $f_n(1) < 0$.

6. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1.
On note x_n cette solution.

Partie B : Étude d'une suite implicite

On étudie dans cette partie le comportement de la suite (x_n), où pour tout entier naturel n non nul, x_n est l'unique solution strictement positive de l'équation : $f_n(x) = 0$.
On admettra :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \geqslant \frac{2n+2}{2n+1}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) \ =\ x^{2n+1}\ \left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

8. ***a)*** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1}$, $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n) \geqslant 0$.

c) Montrer alors que la suite (x_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.

9. ***a)*** Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$: $-\ln(2) \leqslant f_n(1) \leqslant 0$.

b) À l'aide de l'inégalité démontrée à la question ***4.b)*** de la partie ***A***, montrer alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant x_n - 1 \leqslant \sqrt{\frac{2\,\ln(2)}{n}}$$

Quelle est la limite de x_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 19 `(EML S 2014)`
On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues, E_1 le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On remarquera que E_1 est inclus dans E.
On note, pour tout élément f de E, $T(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$T(f)(x) \ = \ \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t)\ dt$$

Partie I : Propriétés générales de T

1. Établir que, pour tout élément f de E, $T(f)$ appartient à E_1 et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\big(T(f)\big)'(x) \ = \ \frac{1}{2}\big(f(x+1) - f(x-1)\big)$$

On note $T : E \to E$ l'application qui, à f, associe $T(f)$.

2. Montrer que T est un endomorphisme de E.

3. Est-ce que T est surjectif ?

4. Soit $f \in E$. Montrer que, si f est paire (respectivement impaire), alors $T(f)$ est paire (respectivement impaire).
À cet effet, on pourra utiliser le changement de variable $u = -t$ dans une intégrale.

5. Soit $f \in E$.

a) On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge.
On introduit alors la fonction $R : x \mapsto \displaystyle\int_{x}^{+\infty} f(t)\ dt$. Montrer : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} R(x) = 0$.

b) Montrer que, si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge, alors $T(f)(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.

Partie II : Un exemple

On note, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $f_a : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_a(t) = \mathrm{e}^{at} \end{array}$

6. Calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $T(f_a)(x)$.
On note : $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & \varphi(a) = \left\{ \begin{array}{cl} \dfrac{\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a}}{2a} & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{array} \right. \end{array}$

7. Établir : $\forall a \in \mathbb{R}$, $T(f_a) = \varphi(a)\, f_a$.

8. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
Calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\varphi'(a)$. *On admet que φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$.*
Étudier, selon $a \in \mathbb{R}$, le signe de $\mathrm{e}^a\,(a-1) + \mathrm{e}^{-a}\,(a+1)$.
En déduire les variations de φ et tracer l'allure de sa représentation graphique.

9. En déduire que, pour tout $\lambda \in [1, +\infty[$, il existe $f \in E \setminus \{0\}$ tel que : $T(f) = \lambda\, f$.

Exercice 20 (EML S 2020)
Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note $\mathscr{B}_n = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$ converge.

2. Pour tout k de $\mathbb{N}$, on pose $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$.

a) Pour tout k de $\mathbb{N}$, déterminer à l'aide d'une intégration par parties une relation entre les intégrales I_{k+1} et I_k.

b) En déduire : $\forall k \in \mathbb{N},\ I_k = k!$.

Exercice 21 (EML 2009)
On note (a, b) un couple de réels strictement positifs.

1. Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\ dx$ converge.

2. *1.* Établir, pour tout (ϵ, X) appartenant à $[0, +\infty]^2$ tel que $\epsilon \leqslant X$:

$$\int_\epsilon^X \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{x}\ dx = \int_{a\epsilon}^{aX} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\ dy \quad \text{et} \quad \int_\epsilon^X \frac{\mathrm{e}^{-bx}}{x}\ dx = \int_{b\epsilon}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\ dy$$

(à cet effet, on pourra utiliser des changements de variable)

2. En déduire, pour tout (ϵ, X) appartenant à $[0, +\infty]^2$ tel que $\epsilon \leqslant X$:

$$\int_\epsilon^X \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\ dx = \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\ dy - \int_{aX}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\ dy$$

3. *a)* Montrer que l'application $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ y \mapsto h(y) = \begin{cases} \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-y}}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 1 & \text{si } y = 0 \end{cases}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

b) En déduire : $\displaystyle\int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\ dy \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

c) Établir, pour tout X de $[0, +\infty]$: $\displaystyle\int_0^X \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\ dx = \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \int_{aX}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\ dy$.

d) En déduire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\ dx = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

Exercice 22 (EML S 2010)
Dans tout le problème, J désigne l'intervalle $[-1, +\infty[$.
Le but du problème est l'étude de l'application f définie, pour tout x de J, par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\ dt$$

Préliminaires

1. Justifier la convergence des séries numériques suivantes : $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2},\ \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^2},\ \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

2. En admettant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

3. En déduire : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Partie I : Eléments d'étude de f.

4. Justifier, pour tout $x \in J$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt$.

5. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

6. Montrer : $\forall x \in J, 0 \leqslant f(x) \leq \dfrac{1}{x+1}$, et en déduire : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

7. ***a)*** Montrer : $\forall (x,y) \in J^2,\ \forall t \in]0,1], (x \leqslant y \ \rightarrow\ t^x \geqslant t^y)$.

b) En déduire que f est décroissante sur J.

8. Montrer : $\forall x \in J,\ f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x+1}$.

9. Déduire des résultats précédents : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.

10. Soit $x \in J$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = (-1)^{n+1}\ f(n+1+x) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$.

b) En déduire que la série numérique $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$ converge et que $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$.

11. ***a)*** Montrer : $\forall (x,y) \in J^2, \forall k \in \mathbb{N}^*, \left|\dfrac{1}{k+1+x} - \dfrac{1}{k+1+y}\right| \leqslant |x-y|\,\dfrac{1}{k^2}$,

puis : $\forall (x,y) \in J^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant |x-y| \left(\dfrac{1}{(x+1)(y+1)} + \dfrac{\pi^2}{6}\right)$.

b) En déduire que f est continue sur J.

12. Montrer : $f(x) \underset{x\to-1}{\sim} \dfrac{1}{x+1}$. En déduire la limite de f en -1.

Partie II : Dérivabilité de f

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, g_k l'application de classe $\mathcal{C}^2$ de J dans $\mathbb{R}$ définie pour tout x de J par :

$$g_k(x) = \frac{(-1)^k}{k+1+x}$$

13. Montrer : $\forall (x,y) \in J^2, \forall k \in \mathbb{N}^*, |g_k(x) - g_k(y) - (x-y)g_k'(x)| \leqslant \dfrac{|x-y|^2}{k^3}$.

14. ***a)*** Justifier la convergence des séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^3}$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} g_k'(x)$, pour tout $x \in J$.

b) En déduire que f est dérivable sur J et que : $\forall x \in J,\ f'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}$.

c) Déterminer $f'(0)$.

15. Tracer l'allure de la courbe représentative de f. On donne la valeur approchée : $\ln(2) \approx 0,69$.

Exercice 23 `(EML S 2017)`

On définit la fonction réelle H d'une variable réelle x par : $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\,dt$.

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

PARTIE I : Premières propriétés de la fonction H

1. Justifier que la fonction H est définie sur I.

2. Montrer que H est décroissante sur I.

3. ***a)*** Calculer $H(1)$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, à l'aide dune intégration par parties : $H(n) = 2n(H(n) - H(n+1))$.
En déduire une expression de $H(n+1)$ en fonction de n et de $H(n)$.

c) Écrire un programme **Scilab** qui, étant donné un entier n de $\mathbb{N}^*$, renvoie la valeur de $H(n)$.

d) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H(n) = \dfrac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}\Big((n-1)!\Big)^2}$.

PARTIE II : Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $\dfrac{1}{2}$

4. ***a)*** Montrer que la fonction $\varphi : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u}}{2}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Préciser $\varphi^{-1}(0)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi^{-1}(t)$.

b) À l'aide du changement de variables $t = \varphi(u)$, montrer :

$$\forall x \in I, H(x) = \frac{4^x}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u})^{2x-1}}\, du$$

5. ***a)*** Justifier : $\forall u \in [0, +\infty[,\ \mathrm{e}^u \leqslant \mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u} \leqslant 2\mathrm{e}^u$.

b) En déduire : $\forall x \in I,\ \dfrac{1}{2x-1} \leqslant H(x) \leqslant \frac{4^x}{2(2x-1)}$.

6. Déterminer la limite de H en $\frac{1}{2}$ et un équivalent simple de $H(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$.

PARTIE III : Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

7. ***a)*** Montrer : $\forall u \in [0,1],\ \ln(1+u) \geqslant \dfrac{u}{2}$.

b) À l'aide d'une loi normale bien choisie, montrer que, pour tout x de I, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2/2}\, dt$ converge et donner sa valeur.

c) En déduire : $\forall x \in I,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x}\, dt \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-xt^2/2}\, dt \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

d) Montrer : $\forall x \in I,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\, dt \leqslant \frac{1}{2x-1}$.

e) En déduire la limite de H en $+\infty$.

8. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln\big(H(n)\big) + \dfrac{\ln(n)}{2}$.

a) Déterminer un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.
On pourra utiliser le résultat obtenu à la question **3.b)**.

b) Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge.

c) En déduire l'existence d'un réel K strictement positif tel que : $H(n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n}}$.

9. Donner enfin un équivalent simple de $H(x)$ lorsque le réel x tend vers $+\infty$ à l'aide de K.

Exercice 24 (EML S 2015)
Dans tout le problème, on note E l'ensemble des fonctions $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}^+$ et vérifiant :

$$\exists p \in \mathbb{N}, \lim_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{t^p} = 0$$

On remarquera que l'entier p dépend a priori de la fonction u considérée.

PARTIE 1 : Définition de la transformée de Laplace.

1. Montrer que E est un sev de l'ev des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2. Soit u un élément de E. Montrer que pour tout $x \in \,]0,+\infty[$, $\lim_{t\to+\infty} t^2\, u(t)\, \mathrm{e}^{-xt} = 0$.

En déduire que pour tout $x \in]0,+\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} u(t)\, \mathrm{e}^{-xt}\, dt$ est convergente.

Dans toute la suite du problème, pour toute fonction u de E, on définit la fonction $L(u)$ sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall\, x \in]0,+\infty[\ ,\ L(u)(x) = \int_0^{+\infty} u(t)\, \mathrm{e}^{-xt}\, dt$$

3. Montrer : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall (u,v) \in E^2$, $L(\alpha\, u + v) = \alpha\, L(u) + L(v)$.

PARTIE 2 : Quelques exemples.

4. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé. On considère pour tout i dans $\{0,1,2\}$ la fonction $v_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^+\ ,\ v_i(t) = t^i\, \mathrm{e}^{-at}$$

Pour tout i dans $\{0,1,2\}$, montrer que v_i appartient à E. En utilisant par exemple des résultats sur les lois exponentielles, calculer pour tout x de $]0,+\infty[$ la valeur de $L(v_i)(x)$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On considère la fonction $w_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ w_n(t) = t^n$$

Montrer que la fonction w_n appartient à E.
Montrer pour tout x de $]0,+\infty[$ que $L(w_n)(x) = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

PARTIE 3 : Propriétés des transformées de Laplace.

6. **Limite de $L(u)$ en $+\infty$**
Soit $u \in E$. Justifier qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A, M \in \mathbb{R}^+$ tels que :

$$\forall t \in [A,+\infty[, |u(t)| \leqslant t^p \quad \text{et} \quad \forall t \in [0,A], |u(t)| \leqslant M$$

Établir : $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $|u(t)| \leqslant M + t^p$ et en déduire : $\lim_{x\to+\infty} L(u)(x) = 0$.

7. **Limite de $L(u)$ en 0**

Soit u un élément de E tel que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(s)\, ds$ converge.

On note, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $R(t) = \displaystyle\int_t^{+\infty} u(s)\, ds$.

a) Déterminer la limite en $+\infty$ de R. Montrer que R appartient à E.

b) Montrer que R est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $R'(t) = -u(t)$.

c) En déduire : $\forall x \in \,]0,+\infty[$, $L(u)(x) = R(0) - xL(R)(x)$.

d) Soit $\epsilon \in]0,+\infty[$. Justifier qu'il existe $B \in [0,+\infty[$ tel que : $\forall t \in [B,+\infty[,\ |R(t)| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$.
En déduire : $\forall x \in]0,+\infty[,\ |L(u)(x) - R(0)| \leqslant x \displaystyle\int_0^B |R(t)|\ dt + \frac{\epsilon}{2}$.

e) Conclure : $\displaystyle\lim_{x\to 0} L(u)(x) = \int_0^{+\infty} u(t)\ dt$.

8. **Transformée de Laplace d'une dérivée**
Soit $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ telle que $u' \in E$.

a) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A \in [0,+\infty[$ tels que $\forall t \in [A,+\infty[, |u(t)| \leqslant |u(A)| + \dfrac{t^{p+1}}{p+1}$.

b) En déduire que u appartient à E.

c) Établir : $\forall x \in]0,+\infty[,\ L(u')(x) = -u(0) + xL(u)(x)$.

9. Dérivée puis dérivée n-ième d'une transformée de Laplace.
Soit u un élément de E. On considère pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, u_n(t) = t^n u(t)$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n appartient à E.

b) Montrer : $\forall a \in \mathbb{R}, |\mathrm{e}^a - 1 - a| \leqslant \dfrac{a^2}{2}\mathrm{e}^{|a|}$.

c) Soient $x \in]0,+\infty[$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tels que $|h| \leqslant \dfrac{x}{2}$.
Montrer : $\forall t \in [0,+\infty[,\ \left|\dfrac{\mathrm{e}^{-(x+h)t} - \mathrm{e}^{-xt}}{h} + t\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant |h|\,\dfrac{t^2}{2}\exp(-xt/2)$.
En déduire : $\left|\dfrac{L(u)(x+h) - L(u)(x)}{h} + L(u_1)(x)\right| \leqslant \dfrac{|h|}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,|u(t)|\exp(-xt/2)\ dt$.

d) Montrer que $L(u)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et exprimer $(L(u))'$ en fonction de $L(u_1)$.

e) Montrer que $L(u)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\big(L(u)\big)^{(n)}$ en fonction de $L(u_n)$.

PARTIE 4 : Application à la résolution d'une équation fonctionnelle

Dans cette partie, on cherche à déterminer une fonction $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ et vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, u''(t) + 5u'(t) + 6u(t) = \mathrm{e}^{-t}\ ;\ u(0) = 1 \quad \text{et} \quad u'(0) = -2$$

10. On suppose qu'il existe une fonction u solution du problème et telle que $u'' \in E$.

a) Montrer que $u \in E$ et : $\forall x \in]0,+\infty[$, $L(u'')(x) = -xu(0) - u'(0) + x^2L(u)(x)$.

b) En déduire : $\forall x \in]0,+\infty[$, $(x^2 + 5x + 6)L(u)(x) = \dfrac{1}{x+1} + x + 3$,
puis : $\forall x \in]0,+\infty[$, $L(u)(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x+3}$.

11. En déduire une fonction u solution du système posé.