Colles

semaine 17 : 17 janvier - 22 janvier

I. Questions de cours

Exercice 1

a) Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$.

b) Soit $\lambda > 0$. Rappeler les caractéristiques de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Exercice 2

a) Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\, dt$.

b) Soit $m \in \mathbb{R}$ et soit $\sigma > 0$. Rappeler les caractéristiques de la loi $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$.

Exercice 3

a) Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$.

b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Rappeler les caractéristiques de la loi $\mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$.

II. Autres exercices

Exercice 4

On considère la fonction f définie par : $\displaystyle f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Préciser f'.

2. Etudier les variations de f.

3. a) Montrer que, pour tout $x > 0$: $\displaystyle f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} + \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\, dt$.

Encadrer cette dernière intégrale et en déduire que : $\displaystyle f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

b) Montrer que, pour tout $x > 0$: $\displaystyle\int_x^{1} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt + \ln(x) = \int_x^{1} \frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}\, dt$.

En déduire que : $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x)$.

c) Dresser le tableau de variations de f.

4. a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge et calculer sa valeur.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} t^n\, f(t)\, dt$ converge.

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de I_n.

Exercice 5

1. Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t^3}\,dt$ ***b)*** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\ln(1+t) - t}\,dt$ ***c)*** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\ e^t - t^2\ ln(t)\ e^{-t}}{t^3\ e^{2t} - 1}\,dt$

2. ***a)*** Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$ en posant le changement de variable $u = \sqrt{x}$.

b) Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$ en posant le changement de variable $u = \sqrt{1+e^x}$.

3. On considère la fonction définie sur $]-\infty,+\infty[$ par $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{-x}^{x^2} \ln(1+t^2)\,dt$.

Démontrer que φ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,+\infty[$ et déterminer sa dérivée.

Exercice 6

On pose pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_0(x) = 1 - e^{-x}$ et $J_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^x t^n e^{-t}\,dt$.

1. Calculer pour tout réel $x > 0$, $J_1(x)$.

2. Établir pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation : $J_n(x) = J_{n-1}(x) - \dfrac{1}{n!}x^n e^{-x}$.

3. En déduire pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $J_n(x)$ sous forme de somme.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$ est convergente et calculer sa valeur.

5. On note : $I_n = \displaystyle\int_0^1 e^{n(x+\ln(1-x))}dx$.

À l'aide du changement de variable $t = n(1-x)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_n = n!\frac{e^n}{n^{n+1}}\ J_n(n)$$

Exercice 7

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.

1. Justifier la convergence de $J_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$. En déduire la convergence de I_1.

2. On pose, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $J_n(a) = \displaystyle\int_0^a x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.

Trouver une relation de récurrence entre $J_n(a)$ et $J_{n-2}(a)$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n converge et trouver une relation de récurrence liant I_n à I_{n-2}.

3. Calculer I_n, pour tout n impair.

En admettant que $I_0 = \sqrt{2\pi}$, calculer I_n, pour tout n pair.

Exercice 8

On considère la fonction numérique F définie par : $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+t^4}}\,dt$

1. Déterminer le domaine de définition de F et montrer que F est une fonction impaire.

2. Établir, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $\dfrac{x}{\sqrt{4+16x^4}} \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{4+x^4}}$.

En déduire la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. Justifier la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.

Exercice 9

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\, dx$.

1. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'intgérale I_n est convergente.

2. Pour tout $n \geqslant 1$, déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} I_k$. Montrer que :

$$\forall n \geqslant 1,\ S_n = \frac{1}{2} - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3\ (1+x^3)^n}\, dx$$

4. En déduire la nature de la série de terme général I_n, et sa somme en cas de convergence.

Exercice 10. *Interversion Limite/Intégrale ?*

Soit la suite de fonctions (f_n) définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = 2nx\mathrm{e}^{-nx^2}$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\, dt$.

1. Calculer pour tout $t \in [0,1]$ la limite de $f_n(t)$ lorsque n tend vers l'infini.

2. Calculer I_n. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$?

3. A-t-on l'égalité suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\, dt = \int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\, dt$?

Exercice 11

On note $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)\, dx$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que I_n est convergente. Calculer I_n en fonction de n.

2) En déduire que (I_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 12

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\, dx$.

1. Calculer I_0, puis trouver une relation entre I_n et I_{n+1}.

2. En déduire I_n en fonction de n.

Exercice 13

On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln(x)}{1-x}\, dx$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n \ln(x)}{1-x}\, dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 x^n \ln(x)\, dx$$

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente.

3. Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, $-1 \leqslant \dfrac{x\ln(x)}{1-x} \leqslant 0$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{n} \leqslant I_n \leqslant 0$, puis la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Montrer que l'intégrale J_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$, et calculer sa valeur.

5. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} J_k$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I = -\sum\limits_{k=2}^{n+1} \dfrac{1}{k^2} + I_{n+1}$.

Exercice 14

1. Soit f la fonction définie par $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1-t}$.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ converge.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in]0,1[$:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k \ln(t) + \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t}$$

c) Montrer que la fonction $g : t \mapsto \dfrac{t\ln(t)}{1-t}$ définie sur $]0,1[$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$.

d) En déduire une expression de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\ dt$ sous la forme d'une série de Riemann.

2. Pour tout $x \in]-\infty, 1]$, on pose : $L(x) = -\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\ dt$.

a) Montrer que la fonction L est bien définie sur $]-\infty, 1]$.

b) Exprimer $L(1)$ à l'aide d'un résultat précédent.

3. *a)* Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $L(x) = -\ln(1-x)\ln(x) + L(1) - L(1-x)$.

b) Déterminer la valeur de $L\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

4. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $L(x) + L(-x) = \dfrac{1}{2}\ L(x^2)$.

Exercice 15

Soit f une fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de classe C^∞ sur $[0,1]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\ dx$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge, puis déterminer sa limite.

2. On suppose que $f(1) \neq 0$. Trouver un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

3. On suppose que $f(1) = 0$. Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

4. Soit h une fonction continue sur $[0,1]$.

a) En utilisant la continuité de h au point 1, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n \int_0^1 x^n \big(h(x) - h(1)\big) dx\right) = 0$$

b) En déduire que la suite $\left(n\displaystyle\int_0^1 x^n h(x)\ dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et exprimer sa limite à l'aide de la fonction h.

Exercice 16 (`ESCP 2016 - ORAL - 1.07`)
Soit λ un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$P_n(\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^1 (1-x)^n \, \mathrm{e}^{nx} \, dx$$

1. a) Montrer : $1 - P_n(\lambda) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^{\lambda} x^n \, \mathrm{e}^{-x} \, dx$.

b) Déterminer une relation entre $P_n(n)$ et I_n.

2. Pour tout $x \in \,]0,1[$, on pose $\psi(x) = -\dfrac{x + \ln(1-x)}{x^2}$.
Montrer que ψ admet un prolongement de classe C^1 sur $[0,1[$, prolongement que l'on note encore ψ.
Montrer que ψ réalise une bijection de $[0,1[$ sur un intervalle à préciser.

3. Pour $\sigma \in \,]0,1[$, on pose $\delta = \psi^{-1}\left(\dfrac{1}{2\,\sigma^2}\right)$.

a) Montrer que pour tout $x \in \,]0,1[$, $\big((1-x)\mathrm{e}^x\big)^n = \mathrm{e}^{-nx^2\psi(x)}$.

b) Montrer : $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \displaystyle\int_0^{\delta\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2/2} \, dx \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

c) En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers l'infini.

d) Montrer que $1 - P_n(n)$ est équivalent à $\dfrac{n^n}{n!} \, \mathrm{e}^{-n} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ lorsque n tend vers l'infini.

4. En utilisant le théorème limite central, déterminer un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 17

1. Déterminer les réels x pour lesquels $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^x}$ converge.

On note alors $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^x}$.

2. Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En évaluant $F(n) - F(n+1)$, déterminer à l'aide d'une intégration par parties, une relation de récurrence entre $F(n)$ et $F(n+1)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $F(-n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1}$.

5. Étudier les variations de la fonction F sur son domaine de définition.

6. a) Pour $x < 0$ fixé, étudier les variations de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^x}$ sur $[0,1]$.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} F(x)$.

7. a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{xt^2}{2}} \, dt$.

b) En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

Exercice 18 (ECRICOME 2020)
Pour tout entier naturel non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geqslant 0,\ f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt$$

Partie A : Étude de la fonction f_n

Dans cette partie, on fixe un entier naturel n non nul.

1. Démontrer que la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \geqslant 0,\ f_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}$$

2. Étudier les variations de f_n.

3. Démontrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et calculer sa dérivée seconde.
En déduire que f_n est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

4. *a)* Démontrer : $\forall t \geqslant 1,\ t^{2n}-1 \ \geqslant\ n\,(t^2-1)$.

b) Montrer alors : $\forall x \geqslant 1,\ f_n(x) \ \geqslant\ f_n(1) + \dfrac{n}{2}\,(x-1)^2$.

c) En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. Calculer $f_n(0)$, puis démontrer : $f_n(1) < 0$.

6. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1.
On note x_n cette solution.

Partie B : Étude d'une suite implicite

On étudie dans cette partie le comportement de la suite (x_n), où pour tout entier naturel n non nul, x_n est l'unique solution strictement positive de l'équation : $f_n(x) = 0$.
On admettra :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \geqslant \frac{2n+2}{2n+1}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) \ =\ x^{2n+1}\ \left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

8. *a)* Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1}$, $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n) \geqslant 0$.

c) Montrer alors que la suite (x_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.

9. *a)* Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$: $-\ln(2) \leqslant f_n(1) \leqslant 0$.

b) À l'aide de l'inégalité démontrée à la question ***4.b)*** de la partie ***A***, montrer alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant x_n - 1 \leqslant \sqrt{\frac{2\ln(2)}{n}}$$

Quelle est la limite de x_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 19 (EML S 2014)
On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues, E_1 le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On remarquera que E_1 est inclus dans E.
On note, pour tout élément f de E, $T(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$T(f)(x) \ = \ \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) \ dt$$

Partie I : Propriétés générales de T

1. Établir que, pour tout élément f de E, $T(f)$ appartient à E_1 et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\big(T(f)\big)'(x) \ = \ \frac{1}{2}\big(f(x+1) - f(x-1)\big)$$

On note $T : E \to E$ l'application qui, à f, associe $T(f)$.

2. Montrer que T est un endomorphisme de E.

3. Est-ce que T est surjectif ?

4. Soit $f \in E$. Montrer que, si f est paire (respectivement impaire), alors $T(f)$ est paire (respectivement impaire).
À cet effet, on pourra utiliser le changement de variable $u = -t$ dans une intégrale.

5. Soit $f \in E$.

a) On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \ dt$ converge.
On introduit alors la fonction $R : x \mapsto \displaystyle\int_{x}^{+\infty} f(t) \ dt$. Montrer : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} R(x) = 0$.

b) Montrer que, si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \ dt$ converge, alors $T(f)(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.

Partie II : Un exemple

On note, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $f_a : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_a(t) = \mathrm{e}^{at} \end{array}$

6. Calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $T(f_a)(x)$.
On note : $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & \varphi(a) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a}}{2a} & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases} \end{array}$

7. Établir : $\forall a \in \mathbb{R}$, $T(f_a) = \varphi(a)\, f_a$.

8. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
Calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\varphi'(a)$. *On admet que φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$.*
Étudier, selon $a \in \mathbb{R}$, le signe de $\mathrm{e}^a\,(a-1) + \mathrm{e}^{-a}\,(a+1)$.
En déduire les variations de φ et tracer l'allure de sa représentation graphique.

9. En déduire que, pour tout $\lambda \in [1, +\infty[$, il existe $f \in E \setminus \{0\}$ tel que : $T(f) = \lambda\, f$.

Exercice 20 (EML S 2020)
Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note $\mathscr{B}_n = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$ converge.

2. Pour tout k de $\mathbb{N}$, on pose $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$.

a) Pour tout k de $\mathbb{N}$, déterminer à l'aide d'une intégration par parties une relation entre les intégrales I_{k+1} et I_k.

b) En déduire : $\forall k \in \mathbb{N},\ I_k = k!$.

Exercice 21 (EML 2009)
On note (a, b) un couple de réels strictement positifs.

1. Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\ dx$ converge.

2. *1.* Établir, pour tout (ϵ, X) appartenant à $[0, +\infty]^2$ tel que $\epsilon \leqslant X$:

$$\int_\epsilon^X \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{x}\ dx = \int_{a\epsilon}^{aX} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\ dy \quad \text{et} \quad \int_\epsilon^X \frac{\mathrm{e}^{-bx}}{x}\ dx = \int_{b\epsilon}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\ dy$$

(à cet effet, on pourra utiliser des changements de variable)

2. En déduire, pour tout (ϵ, X) appartenant à $[0, +\infty]^2$ tel que $\epsilon \leqslant X$:

$$\int_\epsilon^X \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\ dx = \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\ dy - \int_{aX}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\ dy$$

3. *a)* Montrer que l'application $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ y \mapsto h(y) = \begin{cases} \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-y}}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 1 & \text{si } y = 0 \end{cases}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

b) En déduire : $\displaystyle\int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\ dy \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

c) Établir, pour tout X de $[0, +\infty]$: $\displaystyle\int_0^X \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\ dx = \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \int_{aX}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\ dy$.

d) En déduire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\ dx = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

Exercice 22 (EML S 2010)
Dans tout le problème, J désigne l'intervalle $[-1, +\infty[$.
Le but du problème est l'étude de l'application f définie, pour tout x de J, par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\ dt$$

Préliminaires

1. Justifier la convergence des séries numériques suivantes : $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2},\ \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^2},\ \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

2. En admettant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

3. En déduire : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Partie I : Eléments d'étude de f.

4. Justifier, pour tout $x \in J$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt$.

5. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

6. Montrer : $\forall x \in J, 0 \leqslant f(x) \leq \dfrac{1}{x+1}$, et en déduire : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

7. ***a)*** Montrer : $\forall (x,y) \in J^2,\ \forall t \in]0,1], (x \leqslant y \ \rightarrow\ t^x \geqslant t^y)$.

b) En déduire que f est décroissante sur J.

8. Montrer : $\forall x \in J,\ f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x+1}$.

9. Déduire des résultats précédents : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.

10. Soit $x \in J$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = (-1)^{n+1}\ f(n+1+x) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$.

b) En déduire que la série numérique $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$ converge et que $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$.

11. ***a)*** Montrer : $\forall (x,y) \in J^2, \forall k \in \mathbb{N}^*, \left|\dfrac{1}{k+1+x} - \dfrac{1}{k+1+y}\right| \leqslant |x-y|\,\dfrac{1}{k^2}$,

puis : $\forall (x,y) \in J^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant |x-y| \left(\dfrac{1}{(x+1)(y+1)} + \dfrac{\pi^2}{6}\right)$.

b) En déduire que f est continue sur J.

12. Montrer : $f(x) \underset{x\to-1}{\sim} \dfrac{1}{x+1}$. En déduire la limite de f en -1.

Partie II : Dérivabilité de f

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, g_k l'application de classe $\mathcal{C}^2$ de J dans $\mathbb{R}$ définie pour tout x de J par :

$$g_k(x) = \frac{(-1)^k}{k+1+x}$$

13. Montrer : $\forall (x,y) \in J^2, \forall k \in \mathbb{N}^*, |g_k(x) - g_k(y) - (x-y)g_k'(x)| \leqslant \dfrac{|x-y|^2}{k^3}$.

14. ***a)*** Justifier la convergence des séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^3}$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} g_k'(x)$, pour tout $x \in J$.

b) En déduire que f est dérivable sur J et que : $\forall x \in J,\ f'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}$.

c) Déterminer $f'(0)$.

15. Tracer l'allure de la courbe représentative de f. On donne la valeur approchée : $\ln(2) \approx 0,69$.

Exercice 23 `(EML S 2017)`

On définit la fonction réelle H d'une variable réelle x par : $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\,dt$.

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

PARTIE I : Premières propriétés de la fonction H

1. Justifier que la fonction H est définie sur I.

2. Montrer que H est décroissante sur I.

3. *a)* Calculer $H(1)$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, à l'aide dune intégration par parties : $H(n) = 2n(H(n) - H(n+1))$.
En déduire une expression de $H(n+1)$ en fonction de n et de $H(n)$.

c) Écrire un programme **Scilab** qui, étant donné un entier n de $\mathbb{N}^*$, renvoie la valeur de $H(n)$.

d) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H(n) = \dfrac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}\Big((n-1)!\Big)^2}$.

PARTIE II : Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $\dfrac{1}{2}$

4. *a)* Montrer que la fonction $\varphi : u \mapsto \dfrac{e^u - e^{-u}}{2}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Préciser $\varphi^{-1}(0)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi^{-1}(t)$.

b) À l'aide du changement de variables $t = \varphi(u)$, montrer :

$$\forall x \in I, H(x) = \frac{4^x}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^u + e^{-u})^{2x-1}}\, du$$

5. *a)* Justifier : $\forall u \in [0, +\infty[$, $e^u \leqslant e^u + e^{-u} \leqslant 2e^u$.

b) En déduire : $\forall x \in I$, $\dfrac{1}{2x-1} \leqslant H(x) \leqslant \frac{4^x}{2(2x-1)}$.

6. Déterminer la limite de H en $\frac{1}{2}$ et un équivalent simple de $H(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$.

PARTIE III : Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

7. *a)* Montrer : $\forall u \in [0, 1]$, $\ln(1+u) \geqslant \dfrac{u}{2}$.

b) À l'aide d'une loi normale bien choisie, montrer que, pour tout x de I, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt^2/2}\, dt$ converge et donner sa valeur.

c) En déduire : $\forall x \in I$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x}\, dt \leqslant \int_0^1 e^{-xt^2/2}\, dt \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

d) Montrer : $\forall x \in I$, $0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\, dt \leqslant \frac{1}{2x-1}$.

e) En déduire la limite de H en $+\infty$.

8. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln\big(H(n)\big) + \dfrac{\ln(n)}{2}$.

a) Déterminer un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.
On pourra utiliser le résultat obtenu à la question **3.b)**.

b) Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge.

c) En déduire l'existence d'un réel K strictement positif tel que : $H(n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n}}$.

9. Donner enfin un équivalent simple de $H(x)$ lorsque le réel x tend vers $+\infty$ à l'aide de K.

Exercice 24 (EML S 2015)
Dans tout le problème, on note E l'ensemble des fonctions $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}^+$ et vérifiant :

$$\exists p \in \mathbb{N}, \lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{t^p} = 0$$

On remarquera que l'entier p dépend a priori de la fonction u considérée.

PARTIE 1 : Définition de la transformée de Laplace.

1. Montrer que E est un sev de l'ev des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2. Soit u un élément de E. Montrer que pour tout $x \in \,]0, +\infty[\,$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2\, u(t)\, \mathrm{e}^{-xt} = 0$.

En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[\,$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} u(t)\, \mathrm{e}^{-xt}\, dt$ est convergente.

Dans toute la suite du problème, pour toute fonction u de E, on définit la fonction $L(u)$ sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall\, x \in]0, +\infty[\,,\ L(u)(x) = \int_0^{+\infty} u(t)\, \mathrm{e}^{-xt}\, dt$$

3. Montrer : $\forall \alpha \in \mathbb{R}\,,\ \forall (u, v) \in E^2\,,\ L(\alpha\, u + v) = \alpha\, L(u) + L(v)$.

PARTIE 2 : Quelques exemples.

4. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé. On considère pour tout i dans $\{0, 1, 2\}$ la fonction $v_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^+\,,\ v_i(t) = t^i\, \mathrm{e}^{-at}$$

Pour tout i dans $\{0, 1, 2\}$, montrer que v_i appartient à E. En utilisant par exemple des résultats sur les lois exponentielles, calculer pour tout x de $]0, +\infty[$ la valeur de $L(v_i)(x)$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On considère la fonction $w_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ w_n(t) = t^n$$

Montrer que la fonction w_n appartient à E.
Montrer pour tout x de $]0, +\infty[$ que $L(w_n)(x) = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

PARTIE 3 : Propriétés des transformées de Laplace.

6. **Limite de $L(u)$ en $+\infty$**
Soit $u \in E$. Justifier qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A, M \in \mathbb{R}^+$ tels que :

$$\forall t \in [A, +\infty[, |u(t)| \leqslant t^p \quad \text{et} \quad \forall t \in [0, A], |u(t)| \leqslant M$$

Établir : $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $|u(t)| \leqslant M + t^p$ et en déduire : $\lim\limits_{x \to +\infty} L(u)(x) = 0$.

7. **Limite de $L(u)$ en 0**

Soit u un élément de E tel que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(s)\, ds$ converge.

On note, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $R(t) = \displaystyle\int_t^{+\infty} u(s)\, ds$.

a) Déterminer la limite en $+\infty$ de R. Montrer que R appartient à E.

b) Montrer que R est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $R'(t) = -u(t)$.

c) En déduire : $\forall x \in \,]0, +\infty[$, $L(u)(x) = R(0) - xL(R)(x)$.

d) Soit $\epsilon \in]0,+\infty[$. Justifier qu'il existe $B \in [0,+\infty[$ tel que : $\forall t \in [B,+\infty[,\ |R(t)| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$.
En déduire : $\forall x \in]0,+\infty[,\ |L(u)(x) - R(0)| \leqslant x \displaystyle\int_0^B |R(t)|\ dt + \frac{\epsilon}{2}$.

e) Conclure : $\displaystyle\lim_{x\to 0} L(u)(x) = \int_0^{+\infty} u(t)\ dt$.

8. **Transformée de Laplace d'une dérivée**
Soit $u\ :\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ telle que $u' \in E$.

a) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A \in [0,+\infty[$ tels que $\forall t \in [A,+\infty[, |u(t)| \leqslant |u(A)| + \dfrac{t^{p+1}}{p+1}$.

b) En déduire que u appartient à E.

c) Établir : $\forall x \in]0,+\infty[,\ L(u')(x) = -u(0) + xL(u)(x)$.

9. Dérivée puis dérivée n-ième d'une transformée de Laplace.
Soit u un élément de E. On considère pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, u_n(t) = t^n u(t)$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n appartient à E.

b) Montrer : $\forall a \in \mathbb{R}, |\mathrm{e}^a - 1 - a| \leqslant \dfrac{a^2}{2}\mathrm{e}^{|a|}$.

c) Soient $x \in]0,+\infty[$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tels que $|h| \leqslant \dfrac{x}{2}$.
Montrer : $\forall t \in [0,+\infty[,\ \left|\dfrac{\mathrm{e}^{-(x+h)t} - \mathrm{e}^{-xt}}{h} + t\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant |h|\,\dfrac{t^2}{2}\exp(-xt/2)$.
En déduire : $\left|\dfrac{L(u)(x+h) - L(u)(x)}{h} + L(u_1)(x)\right| \leqslant \dfrac{|h|}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,|u(t)|\exp(-xt/2)\ dt$.

d) Montrer que $L(u)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et exprimer $(L(u))'$ en fonction de $L(u_1)$.

e) Montrer que $L(u)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\big(L(u)\big)^{(n)}$ en fonction de $L(u_n)$.

PARTIE 4 : Application à la résolution d'une équation fonctionnelle

Dans cette partie, on cherche à déterminer une fonction $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ et vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, u''(t) + 5u'(t) + 6u(t) = \mathrm{e}^{-t}\ ;\ u(0) = 1 \quad \text{et} \quad u'(0) = -2$$

10. On suppose qu'il existe une fonction u solution du problème et telle que $u'' \in E$.

a) Montrer que $u \in E$ et : $\forall x \in]0,+\infty[$, $L(u'')(x) = -xu(0) - u'(0) + x^2L(u)(x)$.

b) En déduire : $\forall x \in]0,+\infty[$, $(x^2+5x+6)L(u)(x) = \dfrac{1}{x+1} + x + 3$,
puis : $\forall x \in]0,+\infty[$, $L(u)(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x+3}$.

11. En déduire une fonction u solution du système posé.

Exercice 25

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0,1] \\ a\ x\ (1-x) & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$.

1. Déterminer les valeurs du réel a pour lesquelles f est une densité de probabilité.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.

3. Déterminer la loi de $Y = X^2$.

4. Calculer l'espérance et la variance d'une v.a.r. de densité f.

Exercice 26

1. La compagnie des remontées mécaniques a installé deux guichets au bas des pistes. On estime que le temps de passage d'un skieur à l'un des guichets suit la loi uniforme sur $[0,1]$. Trois skieurs A ,B et C se présentent en même temps aux guichets. A et B s'adressent simultanément aux deux guichets, C attend que A ou B libère un guichet. On désigne par :

- U_1 et U_2 les temps de passage respectifs de chacun des deux skieurs A et B,
- V le temps d'attente de C.

On supposera que les variables U_1 et U_2 sont indépendantes.

a) Pour tout réel x, exprimer l'événement $[V > x]$ à l'aide des variables U_1 et U_2.

b) Établir que la fonction de répartition de la variable V est la fonction G définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

c) Déterminer une densité de V.

Exercice 27

Soit X une v.a.r. suivant la loi uniforme sur $[-1,1]$.

1. Donner l'expression :

× d'une densité f de X.

× de la fonction de répartition F_X de X.

2. ***a)*** Déterminer la fonction de répartition de la v.a.r. $Y = X^2 + 1$ et une densité de Y.

b) La v.a.r. Y admet-elle des moments à tout ordre ? Déterminer l'espérance de Y.

3. On note $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ l'espace probabilisé sur lequel X est définie.
On considère la v.a.r. Z définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = \begin{cases} -\ln\left(\frac{1+X(\omega)}{2}\right) & \text{si } X(\omega) \neq -1 \\ 0 & \text{si } X(\omega) = -1 \end{cases}$$

Quelle est la loi de Z ?

Exercice 28

Soit X une v.a.r. réelle suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Donner une densité f de X ainsi que la fonction de répartition F_X de X.

2. Déterminer la loi de la v.a.r. $Y = \mathrm{e}^X$.

3. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, admettant f pour densité.
Déterminer la loi de $\max(X_1, X_2)$, puis de $\min(X_1, X_2)$.

4. Pour quels entiers naturels k, Y admet-elle un moment d'ordre k ?

Exercice 29
Soit X une v.a.r. réelle de densité f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(x-a)} & \text{si } x > a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.

2. Montrer que X admet une espérance et donner sa valeur.

3. F désignant la fonction de répartition de X, déterminer m tel que $F(m) = \frac{1}{2}$.

4. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n v.a.r. indépendantes et de même loi que X. On pose $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

  a) Déterminer la loi de la v.a.r. Y.

  b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 30
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 3^{-x} & \text{si } x > 0 \\ a\ 3^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.

Soit X une v.a.r. admettant f pour densité.

2. Déterminer la fonction de répartition de X

3. On pose $Y = 3^X$.

  a) Déterminer la fonction de répartition de Y.

  b) Y admet-elle une espérance ?

4. Montrer que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et la calculer.

Exercice 31
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in\ ]0,1[\,,\ f(x) = \frac{1}{\ln(2)\ (1+x)} \quad \text{et} \quad \forall\, x \in\,]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\,,\ f(x) = 0$$

1. *a)* Montrer que f est une densité d'une v.a.r. X.

  b) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

  c) Déterminer l'existence et la valeur éventuelle de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

2. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$ et $N = \left\lfloor \dfrac{1}{X} \right\rfloor$ (N est la partie entière de $\dfrac{1}{X}$).

  a) Déterminer la loi de Y.

  b) Déterminer la loi de N.

  c) Y et N ont-elles une espérance ?

3. On pose $Z = Y - N$. Déterminer la loi de Z. La variable aléatoire Z a-t-elle une espérance ?

Exercice 32
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient X une v.a.r. suivant la loi exponentielle de paramètre 1 et Y une v.a.r. suivant la loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$. On suppose que X et Y sont indépendantes.

Montrer que la v.a.r. $Z = \dfrac{X}{Y+1}$ est à densité et déterminer une densité de Z.

Exercice 33 (ECRICOME 2016)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{n!}\, g_n(x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une densité de probabilité.

On considère à présent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire réelle admettant f_n pour densité. On notera F_n la fonction de répartition de X_n.

b) La variable aléatoire X_n admet-elle une espérance ?

c) Que vaut $F_n(x)$ pour $x < 0$ et $n \in \mathbb{N}$?

d) Calculer $F_0(x)$ pour $x \geqslant 0$.

e) Soit $x \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$$

f) En déduire une expression de $F_n(x)$ pour $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ faisant intervenir une somme (on ne cherchera pas à calculer cette somme).

g) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

h) La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle en loi ?

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \ln(1 + X_n)$.

a) Justifier que Y_n est bien définie. Quelles sont les valeurs prises par Y_n ?

b) Justifier que Y_n admet une espérance et la calculer.

c) Justifier que Y_n admet une variance et la calculer.

d) On note H_n la fonction de répartition de Y_n. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = F_n(\mathrm{e}^x - 1)$$

e) Montrer que Y_n est une variable aléatoire à densité et donner une densité de Y_n.

f) Reconnaître la loi de Y_0. À l'aide de ce qui précède, déterminer le moment d'ordre k de Y_0 pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 34
Soit X une v.a.r. suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Déterminer la fonction de répartition de $Y = \min(X, 1 - X)$. En déduire une densité de Y.

2. Déterminer la fonction de répartition de $Z = \max(X, 1 - X)$. En déduire une densité de Z.

3. Déterminer la fonction de répartition de $R = \dfrac{Y}{Z}$. En déduire une densité de Y.

Exercice 35

Soit X une v.a.r. à valeurs positives admettant une densité f nulle sur $]-\infty, 0[$ et continue sur $[0, +\infty[$. On note F la fonction de répartition de X.

1) On suppose tout d'abord que X admet une espérance.

a. À l'aide d'un raisonnement par majoration, démontrer que :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x \int_x^{+\infty} f(t)\ dt \right) = 0$$

b. Montrer que :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F(t))\ dt = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}([X > t])\ dt = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}([X \geqslant t])\ dt$$

On pourra procéder par intégration par parties.
(indication : choisir correctement u, v' mais aussi v !)

2) On suppose maintenant que X possède un moment d'ordre 2.

a. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\ \mathbb{P}([X \geqslant x])$.

b. Établir une relation entre $\mathbb{E}(X^2)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\ \mathbb{P}([X \geqslant x])\ dx$.

c. Démontrer que : $\displaystyle\left(\int_0^{+\infty} \mathbb{P}([X \geqslant x])\ dx \right)^2 \leqslant 2 \int_0^{+\infty} x\ \mathbb{P}([X \geqslant x])\ dx$.

Exercice 36 `(EDHEC 2018)`

On admet que toutes les variables aléatoires considérés dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a}\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

1. Montrer que la fonction f est une densité.

Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X de densité f.

2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

3. On considère la variable aléatoire Y définie par : $Y = \dfrac{X^2}{2a}$.

a) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

b) On rappelle qu'en **Scilab** la commande `grand(1, 1, 'exp', 1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Écrire un script **Scilab** demandant la valeur de a à l'utilisateur et permettant de simuler la variable aléatoire X.

4. *a)* Vérifier que la fonction g qui à tout réel associe $x^2\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}}$, est paire.

b) Rappeler l'expression intégrale ainsi que la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale de paramètre 0 et a.

c) En déduire que X possède une espérance et la déterminer.

5. *a)* Rappeler l'espérance de Y puis montrer que X possède un moment d'ordre 2 et le calculer.

b) En déduire que la variance de X est donnée par :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{(4 - \pi)\ a}{2}$$

Exercice 37 (EML 2016)

PARTIE I : Étude d'une variable aléatoire

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par : $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$.

1. Vérifier que la fonction f est paire.

2. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

3. Déterminer la fonction de répartition de X.

4. ***a)*** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, f(t)\, dt$ converge.

b) En utilisant l'imparité de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t\, f(t)$, montrer que X admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(X) = 0$.

PARTIE II. Étude d'une autre variable aléatoire

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \ln(1 + e^x)$.

5. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.

6. Exprimer, pour tout y de I, $\varphi^{-1}(y)$.

On considère la variable aléatoire réelle Y définie par : $Y = \varphi(X)$.

7. Justifier : $\mathbb{P}([Y \leqslant 0]) = 0$.

8. Déterminer la fonction de répartition de Y.

9. Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.

PARTIE III : Étude d'une convergence en loi

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, de même densité f, où f a été définie dans la partie I.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $U_n = T_n - \ln(n)$.

10. ***a)*** Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de T_n.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([U_n \leqslant x]) = \left(1 + \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}$.

11. En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

Exercice 38 (EDHEC 2017)

Soit V une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, dont la fonction de répartition est la fonction F_V définie par : $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

On pose $W = -\ln(V)$ et on admet que W est aussi une variable aléatoire dont le fonction de répartition est notée F_W. On dit que W suit une loi de Gumbel.

1. a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_W(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$.

b) En déduire que W est une variable à densité.

- On désigne par n un entier naturel non nul et par $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi que V, c'est à dire la loi $\mathcal{E}(1)$.
- On considère la variable aléatoire Y_n définie par $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, c'est à dire que pour tout ω de Ω, on a : $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$.
  On admet que Y_n est une variable aléatoire à densité.

2. a) Montrer que la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n est définie par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

b) En déduire une densité f_{Y_n} de Y_n.

3. a) Donner un équivalent de $1 - F_{Y_n}(t)$ lorsque t est au voisinage de $+\infty$, puis montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$ est convergente.

b) Établir l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\ dt = x\,(1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\ dt$$

c) Montrer que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\,(1 - F_{Y_n}(x)) = 0$.

d) En déduire que Y_n possède une espérance et prouver l'égalité :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$$

Exercice 39 (HEC 2017)

Les tables de mortalité sont utilisées en démographie et en actuariat pour prévoir l'espérance de vie des individus d'une population. On s'intéresse dans ce problème à un modèle qui permet d'ajuster la durée de vie à des statistiques portant sur les décès observés au sein d'une génération.

Dans tout le problème, on note :

- a et b deux réels strictement positifs ;
- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires du problème ;
- $G_{a,b}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $G_{a,b}(x) = \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2}x^2\right)$.

Partie I. Loi exponentielle linéaire

1. ***a)*** Montrer que la fonction $G_{a,b}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur l'intervalle $]0, 1]$.

b) Pour tout réel $y > 0$, résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $ax + \dfrac{b}{2}x^2 = y$.

c) On note $G_{a,b}^{-1}$ la bijection réciproque de $G_{a,b}$.
Quelle est, pour tout $u \in [0, 1[$, l'expression de $G_{a,b}^{-1}(1-u)$?

2. ***a)*** Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx$.

b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{b}{2\pi}} \times \exp\left(-\dfrac{1}{2}b\left(x + \dfrac{a}{b}\right)^2\right)$.
Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire suivant une loi normale dont on précisera les paramètres (espérance et variance).

c) Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
Déduire de la question ***2.b)***, l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx = \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \times \exp\left(\frac{a^2}{2b}\right) \times \Phi\left(-\frac{a}{\sqrt{b}}\right)$$

3. Pour tout $a > 0$ et pour tout $b > 0$, on pose : $f_{a,b}(x) = \begin{cases} (a + bx)\ \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2}x^2\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

a) Justifier que la fonction $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.
On dit qu'une variable aléatoire suit la loi exponentielle linéaire de paramètres a et b, notée $\mathcal{E}_\ell(a, b)$, si elle admet $f_{a,b}$ pour densité.

b) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{E}_\ell(a, b)$. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ telle que : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx$.

4. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On pose : $X = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + 2bY}}{b}$.

a) Justifier que pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $\mathbb{P}([X \geqslant x]) = G_{a,b}(x)$.

b) En déduire que X suit la loi $\mathcal{E}_\ell(a, b)$.

c) On note U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire $G_{a,b}^{-1}(1 - U)$.

5. La fonction **Scilab** suivante génère des simulations de la loi exponentielle linéaire.

```
1 function x = grandlinexp(a,b,n)
2     u = rand(n,1)
3     y = ............
4     x = (-a + sqrt(a^2 + 2 * b * y)) / b
5 endfunction
```

a) Quelle est la signification de la ligne de code 2 ?

b) Compléter la ligne de code 3 pour que la fonction `grandlinexp` génère les simulations désirées.

6. De quel nombre réel peut-on penser que les six valeurs générées par la boucle **Scilab** suivante fourniront des valeurs approchées de plus en plus précises et pourquoi ?

```
for k = 1:6
    mean(grandlinexp(0, 1, 10^k)
end
```

Dans la suite du problème, on note $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi exponentielle linéaire $\mathcal{E}_\ell(a,b)$ dont les paramètres $a>0$ et $b>0$ sont inconnus.
Soit h un entier supérieur ou égal à 2. On suit pendant une période de h années, une « cohorte » de n individus de même âge au début de l'étude et on modélise leurs durées de vie respectives à partir de cette date par les variables aléatoires X_1, X_2, …, X_n.

Partie II. Premier décès et intervalle de confiance de a

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit les variables aléatoires M_n, H_n et U_n par :

$$M_n=\min(X_1,X_2,\dots,X_n),\quad H_n=\min(h,X_1,X_2,\dots,X_n)\quad\text{et}\quad U_n=nH_n.$$

7. Calculer pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, la probabilité $\mathbb{P}([M_n\geqslant x])$.
Reconnaître la loi de la variable aléatoire M_n.

8. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note F_{U_n} la fonction de répartition de la variable aléatoire U_n.

a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $F_{U_n}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-\exp\left(-ax-\dfrac{b}{2n}x^2\right) & \text{si } 0\leqslant x<nh\\ 1 & \text{si } x\geqslant nh\end{cases}$.

b) Étudier la continuité de la fonction F_{U_n}.

c) La variable aléatoire U_n admet-elle une densité ?

d) Montrer que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

9. Soit $\alpha\in\,]0,1[$.

a) Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.
Trouver deux réels c et d strictement positifs tels que :

$$\mathbb{P}([c\leqslant Y\leqslant d])=1-\alpha\quad\text{et}\quad\mathbb{P}([Y\leqslant c])=\frac{\alpha}{2}$$

b) Montrer que $\left[\dfrac{c}{U_n}\ ,\ \dfrac{d}{U_n}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de a, de niveau de confiance $1-\alpha$.

Exercice 40 (ECRICOME 2019)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } -1 < t < 1 \\ -\dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \leqslant -1 \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est paire.

2. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ dt$ converge et calculer sa valeur.

3. ***a)*** À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel A strictement supérieur à 1, on a :

$$\int_{-A}^{-1} f(t)\ dt \ = \ \int_1^A f(u)\ du$$

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt$ converge et donner sa valeur.

b) Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.

4. On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité. On note F_X la fonction de répartition de X.

a) Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$F_X(x) \ = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

b) Démontrer que X admet une espérance, puis que cette espérance est nulle.

c) La variable aléatoire X admet-elle une variance ?

5. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = |X|$.

a) Donner la fonction de répartition de Y, et montrer que Y est une variable aléatoire à densité.

b) Montrer que Y admet pour densité la fonction f_Y définie par :

$$f_Y : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 41 (`ESSEC-I 2018`)
Dans tous le sujet :

- on désigne par n un entier naturel, au moins égal à 2,
- X est une v.a.r. à valeurs dans un intervalle $]0, \alpha[$, où α est un réel strictement positif. On suppose que X admet une densité f strictement positive et continue sur $]0, \alpha[$, et nulle en dehors de $]0, \alpha[$.
- on note F la fonction de répartition de X.
- X_1, ..., X_n est une famille de v.a.r. mutuellement indépendantes et de même loi que X.

On admet que toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Partie I - Lois des deux plus grands

Les notations et résultats de cette partie seront utilisés dans le reste du sujet.
On définit deux variables aléatoires Y_n et Z_n de la façon suivante.
Pour tout $\omega \in \Omega$:

- $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ est le plus grand des réels $X_1(\omega)$, ..., $X_n(\omega)$;
  on remarque que Y_n est définie également lorsque n vaut 1, de sorte que dans la suite du sujet on pourra considérer Y_{n-1}.
- $Z_n(\omega)$ est le « deuxième plus grand » des nombres $X_1(\omega)$, ..., $X_n(\omega)$, autrement dit, une fois que ces n réels sont ordonnés dans l'ordre croissant, Z_n est l'avant-dernière valeur. On note que lorsque la plus grande valeur est présente plusieurs fois, $Z_n(\omega)$ et $Y_n(\omega)$ sont égaux.

1. Loi de Y_n.
Soit G_n la fonction de répartition de Y_n.

a) Montrer que pour tout réel x : $G_n(x) = F(x)^n$.

b) En déduire que Y_n est une variable aléatoire à densité et exprimer une densité g_n de Y_n en fonction de f, F et n.

c) Montrer que Y_n admet une espérance.

2. Loi de Z_n.
Soit H_n la fonction de répartition de Z_n.

a) Soit x un réel.

(i) Soit $\omega \in \Omega$, justifier que $Z_n(\omega) \leqslant x$ si et seulement si dans la liste de n éléments $X_1(\omega)$, ..., $X_n(\omega)$, au moins $n-1$ sont inférieurs ou égaux à x.
Donner une expression de l'événement $[Z_n \leqslant x]$ en fonction des événements $[X_k \leqslant x]$ et $[X_k > x]$ avec $k \in \{1, \ldots, n\}$.

(ii) Établir : $H_n(x) = n(1 - F(x))(F(x))^{n-1} + F(x)^n$.

b) Montrer que Z_n est une variable à densité et qu'une densité de Z_n est donnée par :

$$h_n(x) \;=\; n(n-1)\, f(x)\, (1 - F(x))(F(x))^{n-2}$$

3. Simulation informatique.
On suppose que l'on a défini une fonction **Scilab** d'entête `function x = simulX(n)` qui retourne une simulation d'un échantillon de taille n de la loi de X sous la forme d'un vecteur de longueur n.
Compléter la fonction qui suit pour qu'elle retourne le couple $(Y_n(\omega), Z_n(\omega))$ associé à l'échantillon simulé par l'instruction `X = simulX(n)` :

```
function [y, z] = DeuxPlusGrands(n)
  X = simulX(n)
  if ...
    y = X(1) ; z = X(2)
  else
    ...
  end
  for k = 3:n
    if X(k) > y
      z = ... ; y = ...
    else
      if ...
        z = ...
      end
    end
  end
endfunction
```

4. Premier exemple : loi uniforme.
On suppose dans cette question que X suit la loi uniforme sur $]0, \alpha[$.

a) Donner une densité de Y_n et une densité de Z_n.

b) Calculer l'espérance de Y_n et de Z_n.

5. Deuxième exemple : loi puissance.

On suppose dans cette question que la densité f est donnée par : $f(x) = \begin{cases} \lambda \dfrac{x^{\lambda-1}}{\alpha^\lambda} & \text{si } x \in]0, \alpha[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

où λ est une constante strictement positive.
On dit que X suit la *loi puissance* de paramètres α et λ.

a) (i) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

(ii) Déterminer la fonction de répartition F de X.

(iii) Calculer l'espérance de X.

b) (i) Montrer que Y_n suit une loi puissance de paramètres à préciser en fonction de n, λ et α.

(ii) En déduire l'espérance de Y_n.

c) Calculer l'espérance de Z_n.

Exercice 42 (HEC 2020)
Soient X et Y deux variables aléatoires sur un espace probabilisé, à densité et indépendantes.
On note F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et Y.
On suppose que Y est à valeurs positives et possède une densité f_Y dont la restriction à $[0,+\infty[$ est continue sur cet intervalle.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose : $H(x) = \mathbb{P}(\,[X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant x]\,)$.

1. ***a)*** Montrer que H est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$ qui admet une limite finie en $+\infty$.

b) En utilisant la suite $\big(H(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, démontrer : $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = \mathbb{P}(\,[X \leqslant Y]\,)$.
Que vaut $H(0)$?

2. Soit (u,v) un couple de réels positifs tels que : $u < v$.

a) Montrer : $H(v) - H(u) = \mathbb{P}(\,[X \leqslant Y] \cap [u < Y \leqslant v]\,)$. Puis :

$$F_X(u)\ \frac{F_Y(v) - F_Y(u)}{v-u} \ \leqslant\ \frac{H(v)-H(u)}{v-u} \ \leqslant\ F_X(v)\ \frac{F_Y(v)-F_Y(u)}{v-u}$$

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, H est dérivable en x et : $H'(x) = F_X(x)\, f_Y(x)$.

c) En conclure que pour tout x réel positif : $H(x) = \displaystyle\int_0^x F_X(t)\, f_Y(t)\ dt$.

3. Démontrer : $\mathbb{P}(\,[X \leqslant Y]\,) = \displaystyle\int_0^{+\infty} F_X(t)\, f_Y(t)\ dt$.

4. En utilisant la fonction $K : x \mapsto \mathbb{P}(\,[X < Y] \cap [Y \leqslant x]\,)$, on montrerait de même et nous l'admettrons :

$$\mathbb{P}(\,[X < Y]\,) \ =\ \int_0^{+\infty} F_X(t)\, f_Y(t)\ dt \ =\ \mathbb{P}(\,[X \leqslant Y]\,)$$

Que peut-on en déduire pour $\mathbb{P}(\,[X = Y]\,)$?

5. *Application aux lois exponentielles*
On suppose que U et V sont deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ, réels strictement positifs.
Soit θ un réel positif ou nul.

a) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $X = U - \theta$.

b) En déduire que pour tout $\theta \geqslant 0$:

$$\mathbb{P}(\,[U - \theta \leqslant V]\,) \ =\ 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,\theta}$$

Exercice 43 (ESSEC-I 2017)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$. On dit qu'une variable aléatoire réelle à densité suit une loi de Laplace de paramètre (α, β), notée $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$, si elle admet comme densité la fonction f donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|t-\alpha|}{\beta}\right)$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle.

2. Déterminer la fonction de répartition, notée Ψ, de la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.

3. On suppose que X suit la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.

a) Montrer que $\beta X + \alpha$ suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

b) En déduire la fonction de répartition de la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

4. *Espérance et variance.*

a) On suppose que X suit la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.
Montrer que $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ existent et valent respectivement 0 et 2.

b) En déduire l'existence et les valeurs de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire réelle qui suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

5. *Simulation à partir d'une loi exponentielle.*
Soit U une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1 et V une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et indépendante de U.

a) En utilisant le système complet naturellement associé à V, montrer que $X = (2V - 1)\, U$ suit la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.

b) Compléter la définition **Scilab** ci-dessous pour que la fonction ainsi définie réalise la simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$:

```
function r = Laplace(alpha, beta)
    if --- <= 1/2
        V = 1
    else
        V = 0
    end
    X = (2 * V - 1) * grand(1, 1, 'exp', 1)
    r = ---
endfunction
```

Exercice 44 (ECRICOME 2020)
Soit a un réel strictement positif.

1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose : $I_n(a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^n}\, dt$.

Montrer que l'intégrale $I_n(a)$ converge et vaut $\dfrac{1}{(n-1)\, a^{n-1}}$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \dfrac{3\, a^3}{t^4} & \text{si } t \geqslant a \end{cases}$.

a) Démontrer que f est bien une densité de probabilté. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

b) Donner la fonction de répartition de X.

c) Démontrer que X admet une espérance et calculer cette espérance.

d) Démontrer que X admet une variance et que celle-ci vaut $\dfrac{3\, a^2}{4}$.

3. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1]$. On pose : $Y = \dfrac{a}{U^{\frac{1}{3}}}$.

a) Déterminer $Y(\Omega)$.

b) Déterminer la fonction de répartition de Y et vérifier que Y et X suivent la même loi.

c) Écrire une fonction en langage **Scilab** d'en-tête : `function Y = simulX(a, m, n)` prenant en argument un réel a strictement positif et deux entiers naturels m et n non nuls, qui renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient est un réel choisi de façon aléatoire en suivant la loi de X. Ces réels seront choisis de façon indépendante.
À cet effet, on rappelle que si m et n sont des entiers naturels non nuls, l'instruction : `rand(m, n)` renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient suit la loi uniforme sur $]0, 1]$, ces coefficients étant choisis de façon indépendantes.

4. *a)* Calculer $\mathbb{P}(\,[X > 2a]\,)$.

b) Calculer $\mathbb{P}_{[X>2a]}(\,[X > 6a]\,)$.

c) On suppose que la fonction **Scilab** de la question *3.a)* a été programmée correctement. Compléter le script ci-dessous afin qu'il renvoie une valeur permettant de vérifier le résultat de la question précédente.

```
a = 10
N = 100000
s1 = 0
s2 = 0
X = simulX(a, 1, N)
for k = 1:N
    if ............. then
        s1 = s1 + 1
        if X(k) > 6 * a then
            .............
        end
    end
end
if s1 > 0 then
    disp(.............)
end
```

On cherche dans la suite de l'exercice à estimer le paramètre a.
Soit n un entier naturel non nul, et X_1, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi que X.