Colles

semaine 20 : 7 février - 12 février

I. Questions de cours

Exercice 1

1. Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t} - 1 + 2t}{3t}\, dt$.

2. Démontrer : $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$.

3. Énoncer les autres propriétés de Φ.

4. Énoncer une propriété de stabilité des lois uniformes.

Exercice 2

1. Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-2t) + 2t}{2t}\, dt$.

2. Démontrer que Φ réalise une bijection de $]-\infty, +\infty[$ vers un intervalle à préciser.

3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Donner les caractéristiques de la loi $\mathcal{U}([a,b])$.

4. Énoncer une propriété de stabilité des lois normales.

Exercice 3

1. Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\ln(1 + \frac{1}{t} - \frac{1}{t}\right)\, dt$.

2. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.
En déduire la valeur de $\mathbb{P}\big([|X| \leqslant x]\big)$ où $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

3. Donner les caractéristiques de la loi $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$.

4. Énoncer une propriété de stabilité des lois exponentielles.

II. Autres exercices

Exercice 4

1. La compagnie des remontées mécaniques a installé deux guichets au bas des pistes. On estime que le temps de passage d'un skieur à l'un des guichets suit la loi uniforme sur $[0,1]$. Trois skieurs A ,B et C se présentent en même temps aux guichets. A et B s'adressent simultanément aux deux guichets, C attend que A ou B libère un guichet. On désigne par :

- U_1 et U_2 les temps de passage respectifs de chacun des deux skieurs A et B,
- V le temps d'attente de C.

On supposera que les variables U_1 et U_2 sont indépendantes.

a) Pour tout réel x, exprimer l'événement $[V > x]$ à l'aide des variables U_1 et U_2.

b) Établir que la fonction de répartition de la variable V est la fonction G définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

c) Déterminer une densité de V.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \notin [0,1] \\ a\ x\ (1-x) & \text{si } x \in [0,1] \end{array} \right.$$

1. Déterminer les valeurs du réel a pour lesquelles f est une densité de probabilité.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.

3. Déterminer la loi de $Y = X^2$.

4. Calculer l'espérance et la variance d'une v.a.r. de densité f.

Exercice 6

Soit X une v.a.r. suivant la loi uniforme sur $[-1, 1]$.

1. Donner l'expression :

× d'une densité f de X.

× de la fonction de répartition F_X de X.

2. ***a)*** Déterminer la fonction de répartition de la v.a.r. $Y = X^2 + 1$ et une densité de Y.

b) La v.a.r. Y admet-elle des moments à tout ordre ? Déterminer l'espérance de Y.

3. On note $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ l'espace probabilisé sur lequel X est définie.
On considère la v.a.r. Z définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = \left\{ \begin{array}{cl} -\ln\left(\frac{1+X(\omega)}{2}\right) & \text{si } X(\omega) \neq -1 \\ 0 & \text{si } X(\omega) = -1 \end{array} \right.$$

Quelle est la loi de Z ?

Exercice 7

Soit X une v.a.r. réelle suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Donner une densité f de X ainsi que la fonction de répartition F_X de X.

2. Déterminer la loi de la v.a.r. $Y = \mathrm{e}^X$.

3. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, admettant f pour densité.
Déterminer la loi de $\max(X_1, X_2)$, puis de $\min(X_1, X_2)$.

4. Pour quels entiers naturels k, Y admet-elle un moment d'ordre k ?

Exercice 8
Soit X une v.a.r. réelle de densité f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(x-a)} & \text{si } x > a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.

2. Montrer que X admet une espérance et donner sa valeur.

3. F désignant la fonction de répartition de X, déterminer m tel que $F(m) = \frac{1}{2}$.

4. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n v.a.r. indépendantes et de même loi que X. On pose $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Déterminer la loi de la v.a.r. Y.

b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 9
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 3^{-x} & \text{si } x > 0 \\ a\ 3^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.

Soit X une v.a.r. admettant f pour densité.

2. Déterminer la fonction de répartition de X

3. On pose $Y = 3^X$.

a) Déterminer la fonction de répartition de Y.

b) Y admet-elle une espérance ?

4. Montrer que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et la calculer.

Exercice 10
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in\ ]0,1[\,,\ f(x) = \frac{1}{\ln(2)\ (1+x)} \quad \text{et} \quad \forall x \in\ ]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\,,\ f(x) = 0$$

1. *a)* Montrer que f est une densité d'une v.a.r. X.

b) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

c) Déterminer l'existence et la valeur éventuelle de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

2. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$ et $N = \left\lfloor \dfrac{1}{X} \right\rfloor$ (N est la partie entière de $\dfrac{1}{X}$).

a) Déterminer la loi de Y.

b) Déterminer la loi de N.

c) Y et N ont-elles une espérance ?

3. On pose $Z = Y - N$. Déterminer la loi de Z. La variable aléatoire Z a-t-elle une espérance ?

Exercice 11
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient X une v.a.r. suivant la loi exponentielle de paramètre 1 et Y une v.a.r. suivant la loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$. On suppose que X et Y sont indépendantes.

Montrer que la v.a.r. $Z = \dfrac{X}{Y+1}$ est à densité et déterminer une densité de Z.

Exercice 12 (ECRICOME 2016)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{n!}\, g_n(x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une densité de probabilité.

On considère à présent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire réelle admettant f_n pour densité. On notera F_n la fonction de répartition de X_n.

b) La variable aléatoire X_n admet-elle une espérance ?

c) Que vaut $F_n(x)$ pour $x < 0$ et $n \in \mathbb{N}$?

d) Calculer $F_0(x)$ pour $x \geqslant 0$.

e) Soit $x \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$$

f) En déduire une expression de $F_n(x)$ pour $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ faisant intervenir une somme (on ne cherchera pas à calculer cette somme).

g) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

h) La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle en loi ?

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \ln(1 + X_n)$.

a) Justifier que Y_n est bien définie. Quelles sont les valeurs prises par Y_n ?

b) Justifier que Y_n admet une espérance et la calculer.

c) Justifier que Y_n admet une variance et la calculer.

d) On note H_n la fonction de répartition de Y_n. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = F_n(\mathrm{e}^x - 1)$$

e) Montrer que Y_n est une variable aléatoire à densité et donner une densité de Y_n.

f) Reconnaître la loi de Y_0. À l'aide de ce qui précède, déterminer le moment d'ordre k de Y_0 pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 13
Soit X une v.a.r. suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Déterminer la fonction de répartition de $Y = \min(X, 1-X)$. En déduire une densité de Y.

2. Déterminer la fonction de répartition de $Z = \max(X, 1-X)$. En déduire une densité de Z.

3. Déterminer la fonction de répartition de $R = \dfrac{Y}{Z}$. En déduire une densité de Y.

Exercice 14

Soit X une v.a.r. à valeurs positives admettant une densité f nulle sur $]-\infty,0[$ et continue sur $[0,+\infty[$. On note F la fonction de répartition de X.

1) On suppose tout d'abord que X admet une espérance.

a. À l'aide d'un raisonnement par majoration, démontrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x \int_x^{+\infty} f(t)\, dt \right) = 0$$

b. Montrer que :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} (1-F(t))\, dt = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}([X>t])\, dt = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}([X \geqslant t])\, dt$$

On pourra procéder par intégration par parties.
(indication : choisir correctement u, v' mais aussi v !)

2) On suppose maintenant que X possède un moment d'ordre 2.

a. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\, \mathbb{P}([X \geqslant x])$.

b. Établir une relation entre $\mathbb{E}(X^2)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, \mathbb{P}([X \geqslant x])\, dx$.

c. Démontrer que : $\displaystyle\left(\int_0^{+\infty} \mathbb{P}([X \geqslant x])\, dx\right)^2 \leqslant 2 \int_0^{+\infty} x\, \mathbb{P}([X \geqslant x])\, dx$.

Exercice 15 `(EDHEC 2018)`

On admet que toutes les variables aléatoires considérés dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

1. Montrer que la fonction f est une densité.

Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X de densité f.

2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

3. On considère la variable aléatoire Y définie par : $Y = \dfrac{X^2}{2a}$.

a) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

b) On rappelle qu'en **Scilab** la commande `grand(1, 1, 'exp', 1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Écrire un script **Scilab** demandant la valeur de a à l'utilisateur et permettant de simuler la variable aléatoire X.

4. ***a)*** Vérifier que la fonction g qui à tout réel associe $x^2\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}}$, est paire.

b) Rappeler l'expression intégrale ainsi que la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale de paramètre 0 et a.

c) En déduire que X possède une espérance et la déterminer.

5. ***a)*** Rappeler l'espérance de Y puis montrer que X possède un moment d'ordre 2 et le calculer.

b) En déduire que la variance de X est donnée par :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{(4-\pi)\, a}{2}$$

Exercice 16 (EML 2016)

PARTIE I : Étude d'une variable aléatoire

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par : $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$.

1. Vérifier que la fonction f est paire.

2. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

3. Déterminer la fonction de répartition de X.

4. ***a)*** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, f(t)\, dt$ converge.

b) En utilisant l'imparité de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t\, f(t)$, montrer que X admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(X) = 0$.

PARTIE II. Étude d'une autre variable aléatoire

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \ln(1 + e^x)$.

5. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.

6. Exprimer, pour tout y de I, $\varphi^{-1}(y)$.

On considère la variable aléatoire réelle Y définie par : $Y = \varphi(X)$.

7. Justifier : $\mathbb{P}([Y \leqslant 0]) = 0$.

8. Déterminer la fonction de répartition de Y.

9. Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.

PARTIE III : Étude d'une convergence en loi

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, de même densité f, où f a été définie dans la partie I.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $U_n = T_n - \ln(n)$.

10. ***a)*** Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de T_n.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([U_n \leqslant x]) = \left(1 + \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}$.

11. En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

Exercice 17 (EDHEC 2017)
Soit V une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, dont la fonction de répartition est la fonction F_V définie par : $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.
On pose $W = -\ln(V)$ et on admet que W est aussi une variable aléatoire dont le fonction de répartition est notée F_W. On dit que W suit une loi de Gumbel.

1. a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_W(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$.

b) En déduire que W est une variable à densité.

- On désigne par n un entier naturel non nul et par $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi que V, c'est à dire la loi $\mathcal{E}(1)$.
- On considère la variable aléatoire Y_n définie par $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, c'est à dire que pour tout ω de Ω, on a : $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$.
  On admet que Y_n est une variable aléatoire à densité.

2. a) Montrer que la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n est définie par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

b) En déduire une densité f_{Y_n} de Y_n.

3. a) Donner un équivalent de $1 - F_{Y_n}(t)$ lorsque t est au voisinage de $+\infty$, puis montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$ est convergente.

b) Établir l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\ dt = x\,(1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\ dt$$

c) Montrer que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\,(1 - F_{Y_n}(x)) = 0$.

d) En déduire que Y_n possède une espérance et prouver l'égalité :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$$

Exercice 18 (HEC 2017)

Les tables de mortalité sont utilisées en démographie et en actuariat pour prévoir l'espérance de vie des individus d'une population. On s'intéresse dans ce problème à un modèle qui permet d'ajuster la durée de vie à des statistiques portant sur les décès observés au sein d'une génération.

Dans tout le problème, on note :

- a et b deux réels strictement positifs ;
- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires du problème ;
- $G_{a,b}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $G_{a,b}(x) = \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2}x^2\right)$.

Partie I. Loi exponentielle linéaire

1. a) Montrer que la fonction $G_{a,b}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur l'intervalle $]0, 1]$.

b) Pour tout réel $y > 0$, résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $ax + \dfrac{b}{2}x^2 = y$.

c) On note $G_{a,b}^{-1}$ la bijection réciproque de $G_{a,b}$.
Quelle est, pour tout $u \in [0, 1[$, l'expression de $G_{a,b}^{-1}(1-u)$?

2. a) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx$.

b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{b}{2\pi}} \times \exp\left(-\dfrac{1}{2}b\left(x + \dfrac{a}{b}\right)^2\right)$.
Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire suivant une loi normale dont on précisera les paramètres (espérance et variance).

c) Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
Déduire de la question ***2.b)***, l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx = \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \times \exp\left(\frac{a^2}{2b}\right) \times \Phi\left(-\frac{a}{\sqrt{b}}\right)$$

3. Pour tout $a > 0$ et pour tout $b > 0$, on pose : $f_{a,b}(x) = \begin{cases} (a+bx)\ \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2}x^2\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

a) Justifier que la fonction $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.
On dit qu'une variable aléatoire suit la loi exponentielle linéaire de paramètres a et b, notée $\mathcal{E}_\ell(a, b)$, si elle admet $f_{a,b}$ pour densité.

b) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{E}_\ell(a, b)$. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ telle que : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx$.

4. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On pose : $X = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + 2bY}}{b}$.

a) Justifier que pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $\mathbb{P}([X \geqslant x]) = G_{a,b}(x)$.

b) En déduire que X suit la loi $\mathcal{E}_\ell(a, b)$.

c) On note U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire $G_{a,b}^{-1}(1-U)$.

5. La fonction **Scilab** suivante génère des simulations de la loi exponentielle linéaire.

```
1 function x = grandlinexp(a,b,n)
2     u = rand(n,1)
3     y = ............
4     x = (-a + sqrt(a^2 + 2 * b * y)) / b
5 endfunction
```

a) Quelle est la signification de la ligne de code 2 ?

b) Compléter la ligne de code 3 pour que la fonction `grandlinexp` génère les simulations désirées.

6. De quel nombre réel peut-on penser que les six valeurs générées par la boucle **Scilab** suivante fourniront des valeurs approchées de plus en plus précises et pourquoi ?

```
for k = 1:6
    mean(grandlinexp(0, 1, 10^k)
end
```

Dans la suite du problème, on note $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi exponentielle linéaire $\mathcal{E}_\ell(a,b)$ dont les paramètres $a>0$ et $b>0$ sont inconnus.
Soit h un entier supérieur ou égal à 2. On suit pendant une période de h années, une « cohorte » de n individus de même âge au début de l'étude et on modélise leurs durées de vie respectives à partir de cette date par les variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n.

Partie II. Premier décès et intervalle de confiance de a

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit les variables aléatoires M_n, H_n et U_n par :

$$M_n=\min(X_1,X_2,\dots,X_n),\quad H_n=\min(h,X_1,X_2,\dots,X_n)\quad\text{et}\quad U_n=nH_n.$$

7. Calculer pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, la probabilité $\mathbb{P}([M_n\geqslant x])$.
Reconnaître la loi de la variable aléatoire M_n.

8. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note F_{U_n} la fonction de répartition de la variable aléatoire U_n.

a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $F_{U_n}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-\exp\left(-ax-\dfrac{b}{2n}x^2\right) & \text{si } 0\leqslant x<nh\\ 1 & \text{si } x\geqslant nh\end{cases}$.

b) Étudier la continuité de la fonction F_{U_n}.

c) La variable aléatoire U_n admet-elle une densité ?

d) Montrer que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

9. Soit $\alpha\in\,]0,1[$.

a) Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.
Trouver deux réels c et d strictement positifs tels que :

$$\mathbb{P}([c\leqslant Y\leqslant d])=1-\alpha\quad\text{et}\quad\mathbb{P}([Y\leqslant c])=\frac{\alpha}{2}$$

b) Montrer que $\left[\dfrac{c}{U_n}\,,\,\dfrac{d}{U_n}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de a, de niveau de confiance $1-\alpha$.

Exercice 19 (ECRICOME 2019)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } -1 < t < 1 \\ -\dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \leqslant -1 \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est paire.

2. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ dt$ converge et calculer sa valeur.

3. ***a)*** À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel A strictement supérieur à 1, on a :

$$\int_{-A}^{-1} f(t)\ dt \ = \ \int_1^A f(u)\ du$$

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt$ converge et donner sa valeur.

b) Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.

4. On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité. On note F_X la fonction de répartition de X.

a) Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$F_X(x) \ = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

b) Démontrer que X admet une espérance, puis que cette espérance est nulle.

c) La variable aléatoire X admet-elle une variance ?

5. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = |X|$.

a) Donner la fonction de répartition de Y, et montrer que Y est une variable aléatoire à densité.

b) Montrer que Y admet pour densité la fonction f_Y définie par :

$$f_Y : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 20 (ESSEC-I 2018)
Dans tous le sujet :

- on désigne par n un entier naturel, au moins égal à 2,
- X est une v.a.r. à valeurs dans un intervalle $]0, \alpha[$, où α est un réel strictement positif. On suppose que X admet une densité f strictement positive et continue sur $]0, \alpha[$, et nulle en dehors de $]0, \alpha[$.
- on note F la fonction de répartition de X.
- X_1, ..., X_n est une famille de v.a.r. mutuellement indépendantes et de même loi que X.

On admet que toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Partie I - Lois des deux plus grands

Les notations et résultats de cette partie seront utilisés dans le reste du sujet.
On définit deux variables aléatoires Y_n et Z_n de la façon suivante.
Pour tout $\omega \in \Omega$:

- $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ est le plus grand des réels $X_1(\omega)$, ..., $X_n(\omega)$;
on remarque que Y_n est définie également lorsque n vaut 1, de sorte que dans la suite du sujet on pourra considérer Y_{n-1}.
- $Z_n(\omega)$ est le « deuxième plus grand » des nombres $X_1(\omega)$, ..., $X_n(\omega)$, autrement dit, une fois que ces n réels sont ordonnés dans l'ordre croissant, Z_n est l'avant-dernière valeur. On note que lorsque la plus grande valeur est présente plusieurs fois, $Z_n(\omega)$ et $Y_n(\omega)$ sont égaux.

1. Loi de Y_n.
Soit G_n la fonction de répartition de Y_n.

a) Montrer que pour tout réel x : $G_n(x) = F(x)^n$.

b) En déduire que Y_n est une variable aléatoire à densité et exprimer une densité g_n de Y_n en fonction de f, F et n.

c) Montrer que Y_n admet une espérance.

2. Loi de Z_n.
Soit H_n la fonction de répartition de Z_n.

a) Soit x un réel.

(i) Soit $\omega \in \Omega$, justifier que $Z_n(\omega) \leqslant x$ si et seulement si dans la liste de n éléments $X_1(\omega)$, ..., $X_n(\omega)$, au moins $n-1$ sont inférieurs ou égaux à x.
Donner une expression de l'événement $[Z_n \leqslant x]$ en fonction des événements $[X_k \leqslant x]$ et $[X_k > x]$ avec $k \in \{1, \ldots, n\}$.

(ii) Établir : $H_n(x) = n(1 - F(x))(F(x))^{n-1} + F(x)^n$.

b) Montrer que Z_n est une variable à densité et qu'une densité de Z_n est donnée par :

$$h_n(x) \;=\; n(n-1)\, f(x)\, (1 - F(x))(F(x))^{n-2}$$

3. Simulation informatique.
On suppose que l'on a défini une fonction **Scilab** d'entête `function x = simulX(n)` qui retourne une simulation d'un échantillon de taille n de la loi de X sous la forme d'un vecteur de longueur n.
Compléter la fonction qui suit pour qu'elle retourne le couple $(Y_n(\omega), Z_n(\omega))$ associé à l'échantillon simulé par l'instruction `X = simulX(n)` :

```
function [y, z] = DeuxPlusGrands(n)
  X = simulX(n)
  if ...
    y = X(1) ; z = X(2)
  else
    ...
  end
  for k = 3:n
    if X(k) > y
      z = ... ; y = ...
    else
      if ...
        z = ...
      end
    end
  end
endfunction
```

4. Premier exemple : loi uniforme.
On suppose dans cette question que X suit la loi uniforme sur $]0, \alpha[$.

a) Donner une densité de Y_n et une densité de Z_n.

b) Calculer l'espérance de Y_n et de Z_n.

5. Deuxième exemple : loi puissance.

On suppose dans cette question que la densité f est donnée par : $f(x) = \begin{cases} \lambda \dfrac{x^{\lambda-1}}{\alpha^{\lambda}} & \text{si } x \in]0, \alpha[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

où λ est une constante strictement positive.
On dit que X suit la *loi puissance* de paramètres α et λ.

a) (i) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

(ii) Déterminer la fonction de répartition F de X.

(iii) Calculer l'espérance de X.

b) (i) Montrer que Y_n suit une loi puissance de paramètres à préciser en fonction de n, λ et α.

(ii) En déduire l'espérance de Y_n.

c) Calculer l'espérance de Z_n.

Exercice 21 (HEC 2020)

Soient X et Y deux variables aléatoires sur un espace probabilisé, à densité et indépendantes.
On note F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et Y.
On suppose que Y est à valeurs positives et possède une densité f_Y dont la restriction à $[0, +\infty[$ est continue sur cet intervalle.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose : $H(x) = \mathbb{P}(\,[X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant x]\,)$.

1. ***a)*** Montrer que H est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$ qui admet une limite finie en $+\infty$.

b) En utilisant la suite $\big(H(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, démontrer : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} H(x) = \mathbb{P}(\,[X \leqslant Y]\,)$.
Que vaut $H(0)$?

2. Soit (u, v) un couple de réels positifs tels que : $u < v$.

a) Montrer : $H(v) - H(u) = \mathbb{P}(\,[X \leqslant Y] \cap [u < Y \leqslant v]\,)$. Puis :

$$F_X(u)\ \frac{F_Y(v) - F_Y(u)}{v-u} \ \leqslant\ \frac{H(v) - H(u)}{v-u} \ \leqslant\ F_X(v)\ \frac{F_Y(v) - F_Y(u)}{v-u}$$

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, H est dérivable en x et : $H'(x) = F_X(x)\, f_Y(x)$.

c) En conclure que pour tout x réel positif : $H(x) = \displaystyle\int_0^x F_X(t)\, f_Y(t)\ dt$.

3. Démontrer : $\mathbb{P}(\,[X \leqslant Y]\,) = \displaystyle\int_0^{+\infty} F_X(t)\, f_Y(t)\ dt$.

4. En utilisant la fonction $K : x \mapsto \mathbb{P}(\,[X < Y] \cap [Y \leqslant x]\,)$, on montrerait de même et nous l'admettrons :

$$\mathbb{P}(\,[X < Y]\,) \ =\ \int_0^{+\infty} F_X(t)\, f_Y(t)\ dt \ =\ \mathbb{P}(\,[X \leqslant Y]\,)$$

Que peut-on en déduire pour $\mathbb{P}(\,[X = Y]\,)$?

5. *Application aux lois exponentielles*
On suppose que U et V sont deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ, réels strictement positifs.
Soit θ un réel positif ou nul.

a) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $X = U - \theta$.

b) En déduire que pour tout $\theta \geqslant 0$:

$$\mathbb{P}(\,[U - \theta \leqslant V]\,) \ =\ 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,\theta}$$

Exercice 22 (ESSEC-I 2017)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$. On dit qu'une variable aléatoire réelle à densité suit une loi de Laplace de paramètre (α, β), notée $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$, si elle admet comme densité la fonction f donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ f(t) = \frac{1}{2\beta} \ \exp\left(-\frac{|t-\alpha|}{\beta}\right)$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle.

2. Déterminer la fonction de répartition, notée Ψ, de la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.

3. On suppose que X suit la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.

  a) Montrer que $\beta X + \alpha$ suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

  b) En déduire la fonction de répartition de la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

4. *Espérance et variance.*

  a) On suppose que X suit la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.
  Montrer que $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ existent et valent respectivement 0 et 2.

  b) En déduire l'existence et les valeurs de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire réelle qui suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

5. *Simulation à partir d'une loi exponentielle.*
Soit U une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1 et V une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et indépendante de U.

  a) En utilisant le système complet naturellement associé à V, montrer que $X = (2V - 1)\, U$ suit la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.

  b) Compléter la définition **Scilab** ci-dessous pour que la fonction ainsi définie réalise la simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$:

```
function r = Laplace(alpha, beta)
    if --- <= 1/2
        V = 1
    else
        V = 0
    end
    X = (2 * V - 1) * grand(1, 1, 'exp', 1)
    r = ---
endfunction
```

Exercice 23 (ECRICOME 2020)
Soit a un réel strictement positif.

1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose : $I_n(a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^n}\, dt$.

Montrer que l'intégrale $I_n(a)$ converge et vaut $\dfrac{1}{(n-1)\, a^{n-1}}$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \dfrac{3\, a^3}{t^4} & \text{si } t \geqslant a \end{cases}$.

a) Démontrer que f est bien une densité de probabilté. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

b) Donner la fonction de répartition de X.

c) Démontrer que X admet une espérance et calculer cette espérance.

d) Démontrer que X admet une variance et que celle-ci vaut $\dfrac{3\, a^2}{4}$.

3. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1]$. On pose : $Y = \dfrac{a}{U^{\frac{1}{3}}}$.

a) Déterminer $Y(\Omega)$.

b) Déterminer la fonction de répartition de Y et vérifier que Y et X suivent la même loi.

c) Écrire une fonction en langage **Scilab** d'en-tête : `function Y = simulX(a, m, n)` prenant en argument un réel a strictement positif et deux entiers naturels m et n non nuls, qui renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient est un réel choisi de façon aléatoire en suivant la loi de X. Ces réels seront choisis de façon indépendante.
À cet effet, on rappelle que si m et n sont des entiers naturels non nuls, l'instruction : `rand(m, n)` renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient suit la loi uniforme sur $]0, 1]$, ces coefficients étant choisis de façon indépendantes.

4. *a)* Calculer $\mathbb{P}(\, [X > 2a]\,)$.

b) Calculer $\mathbb{P}_{[X>2a]}(\, [X > 6a]\,)$.

c) On suppose que la fonction **Scilab** de la question *3.a)* a été programmée correctement. Compléter le script ci-dessous afin qu'il renvoie une valeur permettant de vérifier le résultat de la question précédente.

```
a = 10
N = 100000
s1 = 0
s2 = 0
X = simulX(a, 1, N)
for k = 1:N
    if ............ then
        s1 = s1 + 1
        if X(k) > 6 * a then
            ............
        end
    end
end
if s1 > 0 then
    disp(............)
end
```

Exercice 24 (EDHEC 2021)

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. a) Vérifier que la fonction f qui à tout réel x associe $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire Y.

b) On note F la fonction de répartition de Y. Déterminer $F(x)$ selon que $x > 0$ ou $x \leqslant 0$.

2. a) Vérifier que la fonction g qui à tout réel x associe $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X.

b) On note G la fonction de répartition de X. Déterminer $G(x)$ selon que $x \geqslant 1$ ou $x < 1$.

3. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X.
Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) On note G_n la fonction de répartition de M_n. Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de la fonction G puis en déduire explicitement $G_n(x)$ en fonction de x.

b) On pose $Y_n = \dfrac{M_n}{\sqrt{n}}$. Justifier que la fonction de répartition F_n de Y_n est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

4. Déterminer, pour tout réel x négatif ou nul, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5. a) Soit x un réel strictement positif. Vérifier que, dès que n est supérieur strictement à la partie entière de $\dfrac{1}{x^2}$, on a : $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$.

b) Donner un équivalent de $\ln(1+u)$ lorsque u est au voisinage de 0, puis en déduire, pour tout réel x strictement positif, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6. Conclure que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi est celle de Y.

Exercice 25 (EDHEC 2019)

Partie I : étude de quelques propriétés d'une variable aléatoire X

Dans cet exercice, θ (theta) désigne un réel élément de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

On considère la fonction f définie par : $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\theta\, x^{1+\frac{1}{\theta}}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition.

2. Montrer que X possède une espérance et une variance et les déterminer.

3. Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et θ.

4. ***a)*** Montrer que l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ possède une seule solution, notée M_e, que l'on déterminera.

b) Montrer : $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $2^x\,(1-x) \leqslant 1$.

c) Comparer $\mathbb{E}(X)$ et M_e.

5. Soit a un réel supérieur ou égal à 1 et b un réel strictement positif.

a) Montrer : $\mathbb{P}_{[X>a]}([X > a+b]) = \left(\dfrac{a}{a+b}\right)^{\frac{1}{\theta}}$.

b) Déterminer la limite de cette quantité lorsque a tend vers $+\infty$. Interpréter cette dernière valeur si l'on admet que la variable X représente la durée de vie d'un certain appareil.

Partie 2 : simulation de X

6. On pose $Y = \ln(X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note G sa fonction de répartition.

a) Pour tout réel x, exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction F.

b) En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

7. On rappelle qu'en **Scilab**, la commande `grand(1, 1, 'exp', 1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Écrire des commandes **Scilab** utilisant `grand` et permettant de simuler X.

Exercice 26 (EML 2019)
Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

PARTIE A : Des résultats préliminaires

Soient U et V deux variables aléatoires à densité indépendantes, de densités respectives f_U et f_V et de fonctions de répartition respectives F_U et F_V.
On suppose que les fonctions f_U et f_V sont nulles sur $]-\infty, 0[$ et continues sur $[0, +\infty[$.

1. ***a)*** Justifier : $\forall t \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant F_U(t)\, f_V(t) \leqslant f_V(t)$.

b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t)\, f_V(t)\; dt$ converge.

On admet le résultat suivant :

$$\int_0^{+\infty} F_U(t)\, f_V(t)\; dt \;=\; \mathbb{P}([U \leqslant V])$$

2. En déduire : $\mathbb{P}([U > V]) \;=\; \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_U(t)\big)\, f_V(t)\; dt$.

3. **Exemple** : Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$. On suppose dans cette question que U suit la loi exponentielle de paramètre λ et que V suit la loi exponentielle de paramètre μ.

a) Rappeler, pour tout t de $\mathbb{R}_+$, une expression de $F_U(t)$ et de $f_V(t)$.

b) En déduire : $\mathbb{P}([U > V]) \;=\; \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}$.

PARTIE B : Une application

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On considère une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ.
On définit ensuite la variable aléatoire N égale au plus petit entier k de $\mathbb{N}^*$ tel que $T_k \leqslant T_0$ si un tel entier existe et égale à 0 sinon.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire M_n par : $M_n = \min(T_1, \dots, T_n)$.

a) Calculer, pour tout t de $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{P}([M_n > t])$.

b) En déduire la fonction de répartition de M_n sur $\mathbb{R}$.
Reconnaître la loi de M_n et préciser son (ses) paramètre(s).

5. ***a)*** Montrer : $\mathbb{P}([N = 1]) \;=\; \mathbb{P}([T_1 \leqslant T_0]) \;=\; \dfrac{1}{2}$.

b) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $[N > n] \cup [N = 0] \;=\; [M_n > T_0]$.
En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une expression de $\mathbb{P}([N > n] \cup [N = 0])$ en fonction de n.

c) Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\mathbb{P}([N = n]) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

d) En déduire la valeur de $\mathbb{P}([N = 0])$.

6. La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?