Colles

semaine 21 : 14 février - 19 février

I. Questions de cours

Exercice 1

1. Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}-1+2t}{3t}\,dt$.

2. Démontrer que la fonction $(x,y)\mapsto x\ \ln(x)-xy+x^2-1$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[\ \times \mathbb{R}$.

Exercice 2

1. Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\ln(1-2t)+2t}{2t}\,dt$.

2. Démontrer que la fonction $(x,y)\mapsto 3\ \dfrac{\mathrm{e}^{1+x^2}}{x^2+y^2+1}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}\ \times\ \mathbb{R}$.

Exercice 3

1. Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{t}\right)\,dt$.

2. Démontrer que la fonction $(x,y)\mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x^2-y^2}}{\mathrm{e}^x}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}\ \times\ \mathbb{R}$.

II. Autres exercices

Exercice 4

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x)=x+1+2\mathrm{e}^x$$

ainsi que la fonction g des deux variables réelles x et y définie par :

$$g(x,y)=\mathrm{e}^x\left(x+y^2+\mathrm{e}^x\right)$$

1. Étudier les variations de f et donner les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

2. Déduire des variations de f l'existence d'un unique réel α, élément de l'intervalle $[-2,-1]$ tel que $f(\alpha)=0$. (on rappelle que $\mathrm{e}\simeq 2,71$)

3. Déterminer le seul point critique de g.

4. Vérifier que g atteint un extremum local β en ce point. Est-ce un maximum ou un minimum ?

5. Montrer que l'on a :

$$4\beta+\alpha^2-1=0$$

Exercice 5

Montrer que la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{\ln(xy)}{x+1}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

2. Déterminer les extrema éventuels de f.

Mêmes questions pour $f : (x,y) \mapsto \dfrac{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+1}}{y+1}$.

Exercice 6

1. On considère la fonction G de deux variables réelles définie, pour tout $x > 0$ et $y > 0$, par :

$$G(x,y) = \frac{x^2}{2y^2} - \ln(x) + y - \frac{3}{2}$$

a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de la fonction G.

b) Rechercher les extrema éventuels de la fonction G dans le domaine $]0,+\infty[\, \times\,]0,+\infty[$.

2. On considère maintenant la fonction f définie, pour tout $x > 0$, par :

$$f(x) = G(x,1)$$

a) Étudier les variations de f et montrer que f est une fonction convexe.

b) Donner la représentation graphique de f.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par $f(x,y) = x\ln(y) - y\ln(x)$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que si (x_0, y_0) est un point critique de f, alors $\begin{cases} x_0 > 1 \\ (\ln(x_0))^2 - \ln(x_0)\ln(\ln(x_0)) - 1 = 0 \\ y_0 = \dfrac{x_0}{\ln(x_0)} \end{cases}$

3. Étudier la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = t^2 - t\ln(t) - 1$.

4. En déduire l'unique point critique de f.

5. La fonction f admet-elle des extrema sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$?
Si oui, les déterminer.

Exercice 8

On pose $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 1$ et $g(x,y) = x^2 + y^2 + 4xy - 2$.

1. *a)* Démontrer que f admet un unique point critique M_0 que l'on déterminera.

b) Démontrer que f atteint un extremum local en M_0.

c) Développer : $\left(x + \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}y^2$.
Que peut-on en déduire sur M_0 ?

2. *a)* Démontrer que g admet un unique point critique M_1 que l'on déterminera.

b) En étudiant les valeurs de g sur deux droites vectorielles bien choisies, démontrer que g n'admet pas d'extremum local.

Exercice 9 (`ESC 2002`)

On pose $D =]0,1[\times]0,1[$ et f la fonction de deux variables définie sur D par :

$$\forall (x,y) \in D,\ f(x,y) = xy(2-x-y)$$

1. Représenter D.

2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f, en déduire le seul point (x_0, y_0) de D susceptible de réaliser un extremum local pour f.

4. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f, et montrer que f admet un maximum local en (x_0, y_0) de valeur $\dfrac{8}{27}$.

5. Montrer que pour tout couple (x,y) de D :

$$f(x,y) - \frac{8}{27} = \frac{1}{4}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 \left(y - \frac{8}{3}\right) - y\left(x + \frac{1}{2}y - 1\right)^2$$

En déduire que ce maximum local est un maximum global de f sur D.

Exercice 10 (`ECRICOME 1998`)

1. Soit f la fonction de deux variables définie sur l'ouvert $U =]1, +\infty[\times]0, \frac{1}{2}[$ de $\mathbb{R}^2$ par :

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = xy(1-2y)^{x-1} = xy \exp\left((x-1)\ln(1-2y)\right)$$

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
Calculer en tout point (x,y) de U les dérivées partielles premières $\partial_1(f)(x,y)$ et $\partial_2(f)(x,y)$ de f, et les mettre sous forme de produits.

b) Montrer que, pour tout élément u de $]0,1[$: $\ln(1-u) < -u$.
En déduire que f n'a pas d'extremum sur U.

2. On considère l'application partielle g_n, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ défini par :

$$g_n : \quad y \mapsto g_n(y) = f(n,y) \quad \text{définie sur }]0, \frac{1}{2}[$$

a) Montrer que g_n admet un maximum $M_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n-1}$.

b) Montrer que la fonction $\phi :\ x \mapsto (x-1)\ln(1 - \dfrac{1}{x})$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[2, +\infty[$, que sa dérivée seconde est strictement positive sur $[2, +\infty[$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \phi'(x) = 0$.
En déduire que la suite $(M_k)_{k \geqslant 2}$ est strictement décroissante.

c) Montrer que la suite $(M_k)_{k \geqslant 2}$ converge, préciser sa limite et montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2 : $\dfrac{1}{2\mathrm{e}} \leqslant M_k \leqslant \dfrac{1}{4}$.

Exercice 11 (`ECRICOME 2017`)
Dans tout l'exercice, a est un réel strictement positif.

Partie A

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0$, $\varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

2. Étudier les variations de la fonction φ et dresser son tableau de variations.
On fera apparaître dans ce tableau le réel $x_0 = \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$.

3. Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2, vérifiant : $z_1 < x_0 < z_2$.
Que se passe-t-il si $a = \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$? Si $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$?

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'ouvert $U = \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ par :

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = \ln(x)\ln(y) - (xy)^a.$$

4. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

5. Calculer les dérivées partielles premières de f.

6. Démontrer que pour tout $(x, y) \in U$: (x, y) est un point critique de $f \iff \begin{cases} x = y, \\ \varphi(x) = 0. \end{cases}$

7. Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie **A**.
Déterminer aussi les éventuels points critiques de f dans les cas où $a = \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$ et $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$.

Partie C

Dans cette partie, on suppose : $a < \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$. On rappelle alors que la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis en partie **A**.

8. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f.

9. Calculer la matrice hessienne de f au point (z_1, z_1).
Vérifier que cette matrice peut s'écrire sous la forme :

$$\nabla^2(f)(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} -a^2 {z_1}^{2a-2} & \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 {z_1}^{2a-2} \\ \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} & -a^2 {z_1}^{2a-2} \end{pmatrix}.$$

10. On pose $M = \nabla^2(f)(z_1, z_1)$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Calculer MX_1 et MX_2, et en déduire les valeurs propres de M.

11. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_1, z_1) ?
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

12. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_2, z_2) ?
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

Exercice 12 *(d'après* `EDHEC 2017`*)*
On considère la fonction f qui à tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel :

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2\,(x-y)^2$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. ***a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

b) Montrer que le gradient de f est nul si, et seulement si, on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array}\right.$$

c) En déduire que f possède trois points critiques : $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

3. ***a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

b) Écrire la matrice hessienne de f en chaque point critique.

c) Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que f admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.

d) Déterminer les signes de $f(x,x)$ et $f(x,-x)$ au voisinage de $x=0$.
Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de f.

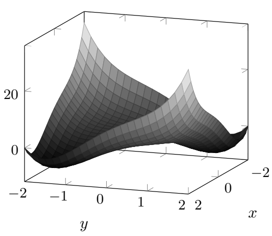
4. ***a)*** Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, calculer $f(x,y) - (x^2-2)^2 - (y^2-2)^2 - 2(x+y)^2$.

b) Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de f ?

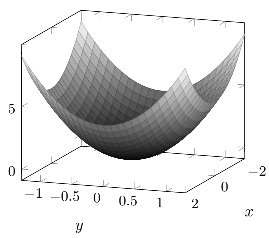
5. ***a)*** Compléter la 2$^{\text{ème}}$ ligne du script suivant afin de définir la fonction f.

```
1  function z = f(x,y)
2      z = ---
3  endfunction
4  x = linspace(-2,2,101)
5  y = x
6  fplotd3d(x,y,f)
```

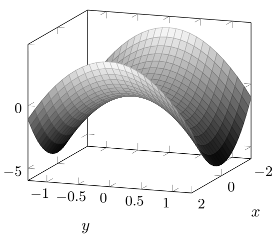
b) Le script précédent, une fois complété, renvoie l'une des trois nappes suivantes. Laquelle ? Justifier la réponse.



Nappe 1



Nappe 2



Nappe 3

Exercice 13 (`EDHEC 1998`)

1. On considère la fonction g définie pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \ln(x) + 2x + 1$.

a) Étudier les variations de g et donner les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.

b) En déduire qu'il existe un unique réel α, élément de $\left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

2. On considère la fonction de deux variables réelles f définie par :

$$\forall (x, y) \in D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ f(x, y) = x(\ln(x) + x + y^2)$$

a) Représenter D.

b) Déterminer le seul point critique de f, c'est à dire le seul couple de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ en lequel f est susceptible de présenter un extremum.

c) Vérifier que f présente un minimum local m en ce point.

d) Montrer que $m = -\alpha(\alpha + 1)$.

Exercice 14 *(d'après* `EML 2018`*)*
Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

3. Montrer : $b \in [2, 4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,7$.

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction H de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U =]0, +\infty[^2$ définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2,\ H(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy - 2x + \mathrm{e}^y$$

1. *a)* Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de H en tout (x, y) de U.

b) Montrer que la fonction H admet exactement deux points critiques : $(a, \ln(a))$ et $(b, \ln(b))$, où les réels a et b sont ceux introduits dans la question *2.*

2. *a)* Écrire la matrice hessienne, notée M_a, de H au point $(a, \ln(a))$.

b) Montrer que M_a admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2, vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & a + 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 & = & a - 1 \end{array} \right.$$

c) La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(a, \ln(a))$?

3. La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(b, \ln(b))$?

Exercice 15. (★) (d'après `EML 1997`)
On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2-2xy+2y^2+\mathrm{e}^{-x} \end{array}$

1. Établir que l'équation $\mathrm{e}^{-x} = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet une solution et une seule, qu'on notera par la suite x_0.

2. Montrer que l'unique point critique de f est le point $\left(x_0, \frac{x_0}{2}\right)$.

3. *a)* Écrire la matrice hessienne, notée H, de f au point $\left(x_0, \frac{x_0}{2}\right)$.

b) Montrer que H admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2, vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+\lambda_2 & = & 6+x_0 \\ \lambda_1\,\lambda_2 & = & 4+4\,x_0 \end{array}\right.$$

c) La fonction f présente-t-elle un extremum local au point $\left(x_0, \frac{x_0}{2}\right)$?

Exercice 16 (`EML 2019`)
On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $\forall t \in \,]0,+\infty[,\ f(t) = t + \dfrac{1}{t}$.

PARTIE A : Étude d'une fonction d'une variable

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites en 0 et $+\infty$.

2. Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ vers $[2,+\infty[$.

On note $g : [2,+\infty[\,\to [1,+\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1,+\infty[$.

3. *a)* Dresser le tableau de variations de g.

b) Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2,+\infty[$.

c) Soit $y \in [2,+\infty[$. En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in \,]0,+\infty[$. En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y.

PARTIE B : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction h de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U = \,]0,+\infty[\,\times\,]0,+\infty[$ définie par :

$$\forall (x,y) \in U,\ h(x,y) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y)$$

4. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de h en tout (x,y) de U.

5. Soit $(x,y) \in U$. Montrer : (x,y) est un point critique de h $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x^2 \\ x = y^2 \end{array}\right.$.

6. En déduire que h admet un unique point critique sur U dont on précisera les coordonnées (a,b).

7. *a)* Vérifier : $\forall (x,y) \in U$, $h(x,y) = 2 + f(x) + f(y) + f\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

b) En déduire que h admet en (a,b) un minimum global sur U.

Exercice 17 (`EML 2020`)
On considère la fonction f définie sur $]0,1[$ par :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

Partie A : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in \,]0,1[, \ f'(x) = \frac{1}{x\,(1-x)\,\big(\ln(x)\big)^2}\ \big(-x\,\ln(x) - (1-x)\,\ln(1-x)\big)$$

2. ***a)*** Justifier : $\forall t \in \,]0,1[, \ t\,\ln(t) < 0$.

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0,1[$.

3. ***a)*** Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.

b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

4. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction F de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]0,+\infty[^2$ définie par :

$$F : (x,y) \mapsto x^2\,y + x^2 - \frac{y^2}{2} - 2x$$

11. ***a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de F en tout point (x,y) de $]0,+\infty[^2$.

b) Montrer que la fonction F admet (u_3, u_3^2) comme unique point critique, où le réel u_3 est l'unique solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation (E_3) définie sans la partie **B**.

12. ***a)*** Écrire la matrice hessienne, notée H, de la fonction F au point (u_3, u_3^2).

b) Montrer que la matrice H admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2, vérifiant :

$$\lambda_1\,\lambda_2 \ = \ -6u_3^2 - 2$$

13. La fonction F présente-t-elle des extrema locaux sur $]0,+\infty[^2$?

Exercice 18 (`ESCP 2010 - ORAL - 1.8`)
Soit $A = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et f définie sur A par :

$$f(x,y) = \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)} \quad \text{et } f(0,0) = 0$$

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on note $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$ (cette quantité est appelée norme de (x,y)).

1. ***a)*** Montrer : $\forall (x,y) \in A \setminus \{(0,0)\}$, $0 \leqslant f(x,y) \leqslant \|(x,y)\|$.

b) En déduire que f est continue sur A.

2. Déterminer le minimum de f sur A.

3. ***a)*** Montrer que si $x > 10$ ou $y > 10$, alors $f(x,y) \leqslant \dfrac{1}{10}$.

b) Justifier que f est bornée sur A et atteint ses bornes.

4. Déterminer le maximum de f sur A.

5. Montrer que pour $(x,y) \in A$, de norme assez grande, $f(x,y)$ est aussi petit que l'on veut.

Exercice 19 (`ESCP 2019 - ORAL - 3.10`)
Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Soit f la fonction définie sur $D =]0,1[\times]0,1[$ par :

$$\forall (x,y) \in]0,1[\times]0,1[,\ f(x,y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}$$

a) Montrer que f est de classe C^1 sur D.

b) Déterminer les éventuels extremums locaux de f sur D.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2 \\ \dfrac{1}{\alpha\, 3^t} & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}$$

a) Déterminer le réel α pour que g soit une densité d'une variable aléatoire Y.

b) Déterminer la loi de $Z = \lfloor Y \rfloor$.

3. Une urne contient des boules blanches en proportion b, des boules vertes en proportion v et des boules rouges en proportion r. On suppose $0 < b < 1$, $0 < v < 1$, $0 < r < 1$ et $b + v + r = 1$.

On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise et on s'arrête au premier changement de couleur.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

a) Déterminer la loi de X.

b) Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de X.

c) Que peut-on déduire de la question ***1*** pour $\mathbb{E}(X)$?

d) Comparer la loi de Z à celle de X lorsque $b = v = r = \frac{1}{3}$.

Exercice 20 (`ESCP 2009 - ORAL - 1.13`)

1. ***a)*** Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a :

$$|x \ln(x^2+y^2)| \leqslant 2\sqrt{x^2+y^2} \times |\ln(x^2+y^2)|$$

b) En déduire que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, à valeurs réelles par :

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^x$$

est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Étudier l'existence des dérivées partielles d'ordre 1 de f en tout point .

3. Déterminer les points critiques de f.

4. ***a)*** Montrer que f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.
(on pourra étudier la fonction $h : x \mapsto f(x,0) - 1$)

b) Montrer que f admet un minimum local en $(\mathrm{e}^{-1}, 0)$.

c) Montrer que f n'admet pas d'extremum local en $(0,1)$.

Exercice 21 (`ESCP 2013 - ORAL - 1.17`)

On considère l'ensemble $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x > 0 \text{ et } y > 0\}$ et la fonction f définie sur U par :

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

1. Justifier que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer le gradient de f en un point quelconque de U.

3. ***a)*** Montrer que les coordonnées x et y d'un point critique sont solutions du système d'équations

$$\begin{cases} 3(x+y) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} \\ x - y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2} \end{cases}$$

b) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = t - \dfrac{1}{t^2}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. En déduire qu'il n'y a qu'un seul point critique M dans l'ouvert U.
Déterminer ce point critique.

c) Quelle est la nature de ce point critique ?

4. ***a)*** Déterminer les valeurs propres de la hessienne de f en tout point de U.

b) Écrire le développement limité à l'ordre 2 de f en M.
Que peut-on en déduire ?

Exercice 22 (`ESCP 2017 - ORAL - 1.02`)

Soit f la fonction de deux variables réelles définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x\,y - 1$$

1. ***a)*** Étudier les extremums locaux de f.

b) La fonction f admet-elle des extremums globaux sur $\mathbb{R}^2$?

c) La restriction de f à une droite passant par l'origine O a-t-elle un extremum en O ?

2. Montrer que, pour tout $x < 1/2$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(x,y) = 0$.

On définit ainsi une fonction $\varphi : J = \left]-\infty, 1/2\right[\to \mathbb{R}$, qui à $x \in J$ associe l'unique y solution de l'équation $f(x,y) = 0$. On admet que la fonction φ est de classe C^∞ sur J.

3. Calculer $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$ et déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de φ.

Exercice 23 (`ESCP 2017 - ORAL - 1.07`)
Si f est une fonction à valeurs réelles, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur cet intervalle, on lui associe la fonction g définie sur l'ouvert $O = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par :

$$g(x,y) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

1. On considère la fonction u définie sur O par $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

a) Montrer que u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur O.

b) Justifier le fait que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur O.

c) Soit $(x,y) \in O$, déterminer le gradient $\nabla(g)(x,y)$ de la fonction g en fonction de f.

Si h est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage d'un point (a,b) de $\mathbb{R}^2$, on définit le laplacien $\Delta(h)$ de h au point (a,b) par :

$$\Delta(h)(a,b) = \partial^2_{1,1}(h)(a,b) + \partial^2_{2,2}(h)(a,b)$$

2. On s'intéresse au laplacien de g dans l'ouvert O.

a) Calculer $\Delta(g)$ en fonction de f.

b) Montrer que $\Delta(g)(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in O$ si et seulement si la fonction f vérifie la condition suivante :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(t) + \frac{f'(t)}{t} = 0$$

3. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(t) = tf'(t)$.

a) Calculer la dérivée de φ.

b) Déterminer la forme des solutions g définies sur O comme dans le préambule et vérifiant $\Delta(g)(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in O$.

c) Trouver la solution g de l'équation $\Delta(g) = 0$ qui s'annule sur le cercle unité C :

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$$

et qui vaut 1 au point $(1,1)$.