

Colles

semaine 22 : 07 mars - 12 mars

I. Questions de cours

Exercice 1

Inégalité de Markov. Énoncé et démonstration.

Exercice 2

1. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Énoncé et démonstration.
2. Loi de Poisson comme limite de lois binomiales. Énoncé et démonstration.

Exercice 3

Loi faible des grands nombres. Énoncé et démonstration.

II. Autres exercices

Exercice 4

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x + 1 + 2e^x$$

ainsi que la fonction g des deux variables réelles x et y définie par :

$$g(x, y) = e^x (x + y^2 + e^x)$$

1. Étudier les variations de f et donner les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
2. Dédire des variations de f l'existence d'un unique réel α , élément de l'intervalle $[-2, -1]$ tel que $f(\alpha) = 0$. (on rappelle que $e \simeq 2,71$)
3. Déterminer le seul point critique de g .
4. Vérifier que g atteint un extremum local β en ce point. Est-ce un maximum ou un minimum ?
5. Montrer que l'on a :

$$4\beta + \alpha^2 - 1 = 0$$

Exercice 5

Montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{\ln(xy)}{x+1}$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f .
2. Déterminer les extrema éventuels de f .

Mêmes questions pour $f : (x, y) \mapsto \frac{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + 1}}{y + 1}$.

Exercice 6

1. On considère la fonction G de deux variables réelles définie, pour tout $x > 0$ et $y > 0$, par :

$$G(x, y) = \frac{x^2}{2y^2} - \ln(x) + y - \frac{3}{2}$$

- a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de la fonction G .
 - b) Rechercher les extrema éventuels de la fonction G dans le domaine $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.
2. On considère maintenant la fonction f définie, pour tout $x > 0$, par :

$$f(x) = G(x, 1)$$

- a) Étudier les variations de f et montrer que f est une fonction convexe.
- b) Donner la représentation graphique de f .

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par $f(x, y) = x \ln(y) - y \ln(x)$.

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que si (x_0, y_0) est un point critique de f , alors
$$\begin{cases} x_0 > 1 \\ (\ln(x_0))^2 - \ln(x_0) \ln(\ln(x_0)) - 1 = 0 \\ y_0 = \frac{x_0}{\ln(x_0)} \end{cases}$$

3. Étudier la fonction g définie sur \mathbb{R}_+^* par $g(t) = t^2 - t \ln(t) - 1$.

4. En déduire l'unique point critique de f .

5. La fonction f admet-elle des extrema sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$?
Si oui, les déterminer.

Exercice 8

On pose $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 1$ et $g(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy - 2$.

1. a) Démontrer que f admet un unique point critique M_0 que l'on déterminera.

- b) Démontrer que f atteint un extremum local en M_0 .

- c) Développer : $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$.

Que peut-on en déduire sur M_0 ?

2. a) Démontrer que g admet un unique point critique M_1 que l'on déterminera.

- b) En étudiant les valeurs de g sur deux droites vectorielles bien choisies, démontrer que g n'admet pas d'extremum local.

Exercice 9 (ESC 2002)

On pose $D =]0, 1[\times]0, 1[$ et f la fonction de deux variables définie sur D par :

$$\forall (x, y) \in D, f(x, y) = xy(2 - x - y)$$

1. Représenter D .
2. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^2 sur D .
3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f , en déduire le seul point (x_0, y_0) de D susceptible de réaliser un extremum local pour f .
4. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f , et montrer que f admet un maximum local en (x_0, y_0) de valeur $\frac{8}{27}$.
5. Montrer que pour tout couple (x, y) de D :

$$f(x, y) - \frac{8}{27} = \frac{1}{4} \left(y - \frac{2}{3} \right)^2 \left(y - \frac{8}{3} \right) - y \left(x + \frac{1}{2}y - 1 \right)^2$$

En déduire que ce maximum local est un maximum global de f sur D .

Exercice 10 (ECRICOME 1998)

1. Soit f la fonction de deux variables définie sur l'ouvert $U =]1, +\infty[\times]0, \frac{1}{2}[$ de \mathbb{R}^2 par :

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = xy(1 - 2y)^{x-1} = xy \exp((x-1) \ln(1 - 2y))$$

- a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur U .
Calculer en tout point (x, y) de U les dérivées partielles premières $\partial_1(f)(x, y)$ et $\partial_2(f)(x, y)$ de f , et les mettre sous forme de produits.
- b) Montrer que, pour tout élément u de $]0, 1[$: $\ln(1 - u) < -u$.
En déduire que f n'a pas d'extremum sur U .
2. On considère l'application partielle g_n , pour tout entier naturel $n \geq 2$ défini par :

$$g_n : y \mapsto g_n(y) = f(n, y) \quad \text{définie sur }]0, \frac{1}{2}[$$

- a) Montrer que g_n admet un maximum $M_n = \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n-1}$.
- b) Montrer que la fonction $\phi : x \mapsto (x-1) \ln(1 - \frac{1}{x})$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $[2, +\infty[$, que sa dérivée seconde est strictement positive sur $[2, +\infty[$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi'(x) = 0$.
En déduire que la suite $(M_k)_{k \geq 2}$ est strictement décroissante.
- c) Montrer que la suite $(M_k)_{k \geq 2}$ converge, préciser sa limite et montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2 : $\frac{1}{2e} \leq M_k \leq \frac{1}{4}$.

Exercice 11 (ECRICOME 2017)

Dans tout l'exercice, a est un réel strictement positif.

Partie A

On considère la fonction φ définie sur \mathbb{R}_+^* par : $\forall x > 0, \varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$.

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.
- Étudier les variations de la fonction φ et dresser son tableau de variations.

On fera apparaître dans ce tableau le réel $x_0 = \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$.

- Démontrer que si $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2 , vérifiant : $z_1 < x_0 < z_2$.

Que se passe-t-il si $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$? Si $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$?

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'ouvert $U = (\mathbb{R}_+^*)^2$ par :

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = \ln(x) \ln(y) - (xy)^a.$$

- Justifier que f est de classe \mathcal{C}^2 sur U .
- Calculer les dérivées partielles premières de f .
- Démontrer que pour tout $(x, y) \in U$: (x, y) est un point critique de $f \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ \varphi(x) = 0. \end{cases}$
- Démontrer que si $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$, la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2) , où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie **A**.

Déterminer aussi les éventuels points critiques de f dans les cas où $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$ et $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$.

Partie C

Dans cette partie, on suppose : $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$. On rappelle alors que la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2) , où z_1 et z_2 sont les réels définis en partie **A**.

- Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f .
- Calculer la matrice hessienne de f au point (z_1, z_1) .

Vérifier que cette matrice peut s'écrire sous la forme :

$$\nabla^2(f)(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} -a^2 z_1^{2a-2} & \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} & -a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix}.$$

- On pose $M = \nabla^2(f)(z_1, z_1)$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculer MX_1 et MX_2 , et en déduire les valeurs propres de M .

- La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_1, z_1) ?
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?
- La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_2, z_2) ?
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

Exercice 12 (d'après EDHEC 2017)

On considère la fonction f qui à tout couple (x, y) de \mathbb{R}^2 associe le réel :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

1. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .
2. a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f .
b) Montrer que le gradient de f est nul si, et seulement si, on a :

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases}$$

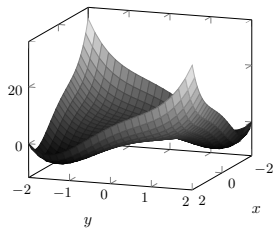
- c) En déduire que f possède trois points critiques : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
3. a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f .
b) Écrire la matrice hessienne de f en chaque point critique.
c) Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que f admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.
d) Déterminer les signes de $f(x, x)$ et $f(x, -x)$ au voisinage de $x = 0$.
Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de f .
4. a) Pour tout (x, y) de \mathbb{R}^2 , calculer $f(x, y) - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2)^2 - 2(x + y)^2$.
b) Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de f ?
5. a) Compléter la 2^{ème} ligne du script suivant afin de définir la fonction f .

```

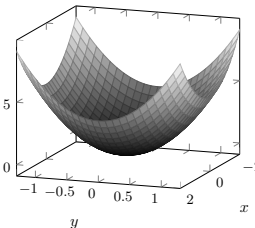
1  function z = f(x,y)
2      z = ---
3  endfunction
4  x = linspace(-2,2,101)
5  y = x
6  fplotd3d(x,y,f)

```

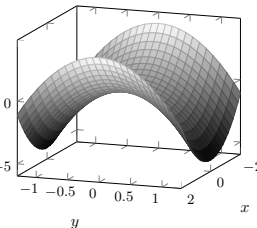
- b) Le script précédent, une fois complété, renvoie l'une des trois nappes suivantes. Laquelle ? Justifier la réponse.



Nappe 1



Nappe 2



Nappe 3

Exercice 13 (EDHEC 1998)

1. On considère la fonction g définie pour tout x élément de \mathbb{R}_+^* par $g(x) = \ln(x) + 2x + 1$.
 - a) Étudier les variations de g et donner les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.
 - b) En déduire qu'il existe un unique réel α , élément de $]0, \frac{1}{e}[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
2. On considère la fonction de deux variables réelles f définie par :

$$\forall (x, y) \in D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, f(x, y) = x(\ln(x) + x + y^2)$$

- a) Représenter D .
- b) Déterminer le seul point critique de f , c'est à dire le seul couple de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ en lequel f est susceptible de présenter un extremum.
- c) Vérifier que f présente un minimum local m en ce point.
- d) Montrer que $m = -\alpha(\alpha + 1)$.

Exercice 14 (d'après EML 2018)

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b , telles que $0 < a < 1 < b$.
3. Montrer : $b \in [2, 4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,7$.

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction H de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert $U =]0, +\infty[^2$ définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, H(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy - 2x + e^y$$

1. a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de H en tout (x, y) de U .
 - b) Montrer que la fonction H admet exactement deux points critiques : $(a, \ln(a))$ et $(b, \ln(b))$, où les réels a et b sont ceux introduits dans la question 2.
2. a) Écrire la matrice hessienne, notée M_a , de H au point $(a, \ln(a))$.
 - b) Montrer que M_a admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2 , vérifiant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = & a + 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 & = & a - 1 \end{cases}$$

- c) La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(a, \ln(a))$?
3. La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(b, \ln(b))$?

Exercice 15. (★) (d'après EML 1997)

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$

1. Établir que l'équation $e^{-x} = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet une solution et une seule, qu'on notera par la suite x_0 .
2. Montrer que l'unique point critique de f est le point $(x_0, \frac{x_0}{2})$.
3. a) Écrire la matrice hessienne, notée H , de f au point $(x_0, \frac{x_0}{2})$.
 b) Montrer que H admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2 , vérifiant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 6 + x_0 \\ \lambda_1 \lambda_2 &= 4 + 4x_0 \end{cases}$$

- c) La fonction f présente-t-elle un extremum local au point $(x_0, \frac{x_0}{2})$?

Exercice 16 (EML 2019)

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $\forall t \in]0, +\infty[, f(t) = t + \frac{1}{t}$.

PARTIE A : Étude d'une fonction d'une variable

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$.
 Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites en 0 et $+\infty$.

2. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers $[2, +\infty[$.

On note $g : [2, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1, +\infty[$.

3. a) Dresser le tableau de variations de g .
 b) Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2, +\infty[$.
 c) Soit $y \in [2, +\infty[$. En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in]0, +\infty[$. En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y .

PARTIE B : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction h de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert $U =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ définie par :

$$\forall (x, y) \in U, h(x, y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y)$$

4. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de h en tout (x, y) de U .
5. Soit $(x, y) \in U$. Montrer : (x, y) est un point critique de $h \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$.
6. En déduire que h admet un unique point critique sur U dont on précisera les coordonnées (a, b) .
7. a) Vérifier : $\forall (x, y) \in U, h(x, y) = 2 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right)$.
 b) En déduire que h admet en (a, b) un minimum global sur U .

Exercice 17 (EML 2020)

On considère la fonction f définie sur $]0, 1[$ par :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

Partie A : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0, 1[, f'(x) = \frac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2} (-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x))$$

2. a) Justifier : $\forall t \in]0, 1[, t \ln(t) < 0$.

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0, 1[$.

3. a) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.

On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.

b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

4. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction F de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert $]0, +\infty[^2$ définie par :

$$F : (x, y) \mapsto x^2 y + x^2 - \frac{y^2}{2} - 2x$$

11. a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de F en tout point (x, y) de $]0, +\infty[^2$.

b) Montrer que la fonction F admet (u_3, u_3^2) comme unique point critique, où le réel u_3 est l'unique solution sur \mathbb{R}_+ de l'équation (E_3) définie dans la partie B.

12. a) Écrire la matrice hessienne, notée H , de la fonction F au point (u_3, u_3^2) .

b) Montrer que la matrice H admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2 , vérifiant :

$$\lambda_1 \lambda_2 = -6u_3^2 - 2$$

13. La fonction F présente-t-elle des extrema locaux sur $]0, +\infty[^2$?

Exercice 18 (ESCP 2010 - ORAL - 1.8)

Soit $A = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et f définie sur A par :

$$f(x, y) = \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)} \quad \text{et } f(0, 0) = 0$$

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (cette quantité est appelée norme de (x, y)).

1. **a)** Montrer : $\forall (x, y) \in A \setminus \{(0, 0)\}$, $0 \leq f(x, y) \leq \|(x, y)\|$.
b) En déduire que f est continue sur A .
2. Déterminer le minimum de f sur A .
3. **a)** Montrer que si $x > 10$ ou $y > 10$, alors $f(x, y) \leq \frac{1}{10}$.
b) Justifier que f est bornée sur A et atteint ses bornes.
4. Déterminer le maximum de f sur A .
5. Montrer que pour $(x, y) \in A$, de norme assez grande, $f(x, y)$ est aussi petit que l'on veut.

Exercice 19 (ESCP 2019 - ORAL - 3.10)

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Soit f la fonction définie sur $D =]0, 1[\times]0, 1[$ par :

$$\forall (x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[, f(x, y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}$$

- a)** Montrer que f est de classe C^1 sur D .
 - b)** Déterminer les éventuels extremums locaux de f sur D .
2. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2 \\ \frac{1}{\alpha 3^t} & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

- a)** Déterminer le réel α pour que g soit une densité d'une variable aléatoire Y .
 - b)** Déterminer la loi de $Z = \lfloor Y \rfloor$.
3. Une urne contient des boules blanches en proportion b , des boules vertes en proportion v et des boules rouges en proportion r . On suppose $0 < b < 1$, $0 < v < 1$, $0 < r < 1$ et $b + v + r = 1$.

On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise et on s'arrête au premier changement de couleur.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

- a)** Déterminer la loi de X .
- b)** Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de X .
- c)** Que peut-on déduire de la question 1 pour $\mathbb{E}(X)$?
- d)** Comparer la loi de Z à celle de X lorsque $b = v = r = \frac{1}{3}$.

Exercice 20 (ESCP 2009 - ORAL - 1.13)

1. a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on a :

$$|x \ln(x^2 + y^2)| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} \times |\ln(x^2 + y^2)|$$

b) En déduire que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, à valeurs réelles par :

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^x$$

est prolongeable en une fonction continue sur \mathbb{R}^2 .

2. Étudier l'existence des dérivées partielles d'ordre 1 de f en tout point .

3. Déterminer les points critiques de f .

4. a) Montrer que f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$.

(on pourra étudier la fonction $h : x \mapsto f(x, 0) - 1$)

b) Montrer que f admet un minimum local en $(e^{-1}, 0)$.

c) Montrer que f n'admet pas d'extremum local en $(0, 1)$.

Exercice 21 (ESCP 2013 - ORAL - 1.17)

On considère l'ensemble $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ et } y > 0\}$ et la fonction f définie sur U par :

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

1. Justifier que U est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

2. Déterminer le gradient de f en un point quelconque de U .

3. a) Montrer que les coordonnées x et y d'un point critique sont solutions du système d'équations

$$\begin{cases} 3(x + y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \\ x - y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \end{cases}$$

b) Vérifier que la fonction g définie sur \mathbb{R}_+^* par $g(t) = t - \frac{1}{t^2}$ est une bijection de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} . En déduire qu'il n'y a qu'un seul point critique M dans l'ouvert U .

Déterminer ce point critique.

c) Quelle est la nature de ce point critique ?

4. a) Déterminer les valeurs propres de la hessienne de f en tout point de U .

b) Écrire le développement limité à l'ordre 2 de f en M .

Que peut-on en déduire ?

Exercice 22 (ESCP 2017 - ORAL - 1.02)

Soit f la fonction de deux variables réelles définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$$

1. a) Étudier les extremums locaux de f .

b) La fonction f admet-elle des extremums globaux sur \mathbb{R}^2 ?

c) La restriction de f à une droite passant par l'origine O a-t-elle un extremum en O ?

2. Montrer que, pour tout $x < 1/2$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(x, y) = 0$.

On définit ainsi une fonction $\varphi : J =]-\infty, 1/2[\rightarrow \mathbb{R}$, qui à $x \in J$ associe l'unique y solution de l'équation $f(x, y) = 0$. On admet que la fonction φ est de classe C^∞ sur J .

3. Calculer $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$ et déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de φ .

Exercice 23 (ESCP 2017 - ORAL - 1.07)

Si f est une fonction à valeurs réelles, définie sur \mathbb{R}_+^* et de classe \mathcal{C}^2 sur cet intervalle, on lui associe la fonction g définie sur l'ouvert $O = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par :

$$g(x, y) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

1. On considère la fonction u définie sur O par $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Montrer que u est de classe \mathcal{C}^2 sur O .

b) Justifier le fait que g est de classe \mathcal{C}^2 sur O .

c) Soit $(x, y) \in O$, déterminer le gradient $\nabla(g)(x, y)$ de la fonction g en fonction de f .

Si h est une fonction de classe \mathcal{C}^2 au voisinage d'un point (a, b) de \mathbb{R}^2 , on définit le laplacien $\Delta(h)$ de h au point (a, b) par :

$$\Delta(h)(a, b) = \partial_{1,1}^2(h)(a, b) + \partial_{2,2}^2(h)(a, b)$$

2. On s'intéresse au laplacien de g dans l'ouvert O .

a) Calculer $\Delta(g)$ en fonction de f .

b) Montrer que $\Delta(g)(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in O$ si et seulement si la fonction f vérifie la condition suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f''(t) + \frac{f'(t)}{t} = 0$$

3. On considère la fonction φ définie sur \mathbb{R}_+^* par $\varphi(t) = tf'(t)$.

a) Calculer la dérivée de φ .

b) Déterminer la forme des solutions g définies sur O comme dans le préambule et vérifiant $\Delta(g)(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in O$.

c) Trouver la solution g de l'équation $\Delta(g) = 0$ qui s'annule sur le cercle unité C :

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

et qui vaut 1 au point $(1, 1)$.