Colles

semaine 23 : 14 mars - 19 mars

I. Questions de cours

Exercice 1

1. Démontrer que la fonction $x \mapsto 2\ \ln(|x|+1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Énoncé et démonstration.

3. Loi de Poisson comme limite de lois binomiales. Énoncé et démonstration.

Exercice 2

1. Démontrer que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^1\ \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Loi faible des grands nombres. Énoncé et démonstration.

Exercice 3

1. Démontrer que la fonction $x \mapsto \ln(2)\ \dfrac{x\ \mathrm{e}^x}{x^2+1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Inégalité de Markov. Énoncé et démonstration.

II. Autres exercices

Exercice 4

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes, suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la v.a.r. $Y_n = X_n + X_{n+1}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les variables $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sont-elles indépendantes ?

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$. Calculer l'espérance et la variance de T_n.

3. Montrer que la suite de v.a.r. $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $2p$, c'est-à-dire que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([|T_n - 2p| > \varepsilon]\right) = 0$$

Exercice 5

Une urne contient des boules numérotées de 1 à N (avec $N \geqslant 2$).
On les tire une à une sans remise.
On note $X_1, X_2, \ldots, X_N$ les v.a.r. égales aux numéros obtenus lors du 1^{er}, $2^{\text{ème}}$, ..., $N^{\text{ème}}$ tirage.

1. Calculer, pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, la probabilité de l'événement $(X_1 < X_2 < \ldots < X_N)$.

2. On note Y_N la v.a.r. égale au premier rang $j \in [\![1, N-1]\!]$ pour lequel $X_j > X_{j+1}$, si j existe, et on pose $Y_N = N$, sinon. Y_N est donc le rang de la première décroissance de la suite $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$.
   - *a)* Déterminer la loi de Y_N.
   - *b)* Montrer que la suite $(Y_N)_{N\geqslant 2}$ converge en loi vers une v.a.r. Y dont on précisera la loi.
   - *c)* Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

3.
   - *a)* Calculer $\mathbb{E}(Y_N)$ (on exprimera $\mathbb{E}(Y_N)$ sous forme d'une somme).
   - *b)* Déterminer la limite de $\mathbb{E}(Y_N)$ lorsque N tend vers $+\infty$.
   - *c)* A-t-on $\lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{E}(Y_N) = \mathbb{E}(Y)$?

Exercice 6
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{n}{n+x}\, \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que F_n est la fonction de répartition d'une variable à densité, notée X_n.
2. Étudier la convergence en loi de la suite de variables $(X_n)_{n \geqslant 1}$.

Exercice 7
Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi uniforme sur $\left[\dfrac{1}{2n}, 1 - \dfrac{1}{2n}\right]$.
Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable X que l'on déterminera.

Exercice 8 *(d'après* `oral ESCP 2018`*)*
Soit $(X_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de v.a.r. définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On suppose que les variables aléatoires X_n sont indépendantes et suivent toutes la même loi d'espérance m et d'écart-type σ. On définit la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \geqslant 0}$ par :

$$Y_0 = \frac{X_0}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ Y_{n+1} = \frac{X_{n+1} + Y_n}{2}$$

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^{n+1-k}} X_k$.
En déduire que Y_n admet une espérance et une variance.
2. Déterminer $\mathbb{E}(Y_n)$. Quelle est sa limite lorsque n tend vers $+\infty$?
3. Calculer $\mathbb{V}(Y_n)$ et calculer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Soit i et j deux entiers positifs tels que $i < j$.
Prouver qu'il existe une constante c indépendante de i et de j pour laquelle on a :

$$\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) \leqslant c\, \frac{1}{2^{j-i}}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $S_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.
a) Justifier l'existence de l'espérance et de la variance de S_n.
Déterminer la limite ℓ de la suite $\big(\mathbb{E}(S_n)\big)_{n \geqslant 1}$.
b) *On admet* :

$$\mathbb{V}(S_n) = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(Y_k) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) \right)$$

Montrer : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{V}(S_n) = 0$.
c) Justifier l'inégalité $\mathbb{E}(|X|) \leqslant \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}$ pour toute v.a.r. admettant un moment d'ordre 2.
Prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\mathbb{P}\big([|S_n - \ell| \geqslant \varepsilon] \big) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \left(\sqrt{\mathbb{V}(S_n)} + |\mathbb{E}(S_n) - \ell| \right)$$

En déduire que la suite (S_n) converge en probabilité vers la variable certaine égale à ℓ.
6. On suppose dans cette question que les variables aléatoires X_n sont indépendantes et suivent toutes la loi normale centrée réduite.
a) Déterminer la loi de Y_n.
b) Montrer que la suite (Y_n) converge en loi et préciser la loi limite.

Exercice 9 *(d'après* `oral ESCP 2018`*)*

Toutes les v.a.r. de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Soit X la variable aléatoire à densité, de densité f telle que :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X.

1. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire T_n par :

$$T_n = \frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{\sqrt{n}}$$

a) Montrer que la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire T.

b) Vérifier que T est une variable aléatoire à densité et donner une densité de T.

2. On considère une variable aléatoire N, indépendante des X_k, qui suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$, avec $0 < q < 1$.

On définit la variable aléatoire U par : pour tout $\omega \in \Omega$, $U(\omega) = \min\big(X_1(\omega), \dots, X_{N(\omega)}(\omega)\big)$.

a) Montrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, on a : $\mathbb{P}([U > x]) = \dfrac{1 - q^2}{x^2 - q^2}$.

b) Établir l'existence de l'espérance de la variable aléatoire U, notée $\mathbb{E}(U)$.

c) Établir l'égalité suivante : $\mathbb{E}(U) = 1 + \displaystyle\int_1^{+\infty} \mathbb{P}\big([U > x]\big)\, dx$.

(on pourra penser à réaliser une intégration par parties en prenant soin particulier dans le choix de la primitive utilisée)

d) Calculer $\mathbb{E}(U)$.

Exercice 10 *(d'après* `oral ESCP 2018`*)*

Toutes les v.a.r. de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Soit X une variable aléatoire admettant pour densité la fonction f suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1 + \mathrm{e}^{-x})^2}$$

1. ***a)*** Déterminer la fonction de répartition de X.

b) Montrer que X admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(X)$.

2. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$, indépendantes et de même loi que X.

On pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad T_n = Z_n - \ln(n)$$

a) Montrer que la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire T.

b) Vérifier que T est à densité et donner une densité f_T de T.

Dans la suite, on admet que si X et Y sont deux variables aléatoires à densité indépendantes, alors la v.a.r. $X + Y$ est à denisté à condition que la fonction f_{X+Y} suivante existe. Cette fonction f_{X+Y} définit alors une densité de $X + Y$.

$$f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_Y(x - t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_Y(x - t)\, dt$$

3. On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V admettant chacune f_T pour densité.

a) Démontrer que $-V$ est une v.a.r. à densité et en déterminer une densité.

b) À l'aide du changement de variable $y = (1 + \mathrm{e}^{-x})\, \mathrm{e}^{t}$, calculer une densité de la variable aléatoire $W = U - V$.

Exercice 11 *(d'après* `oral ESCP 2018`*)*

Une urne contient exclusivement des boules rouges et noires indiscernables au toucher.

La proportion de boules rouges est $p \in]0,1[$ et celle de boules noires est $q = 1-p$.

On effectue des tirages successifs avec remise d'une boule de l'urne jusqu'à obtention d'une boule rouge.

Un maximum de n tirages, avec $n \geqslant 1$, est cependant fixé : on décide de s'arrêter si on n'a pas tiré de boule rouge à l'issue du n-ième tirage.

On note G_n la variable aléatoire égale au rang du tirage d'une boule rouge, si ce rang existe, et qui vaut 0 si aucune boule rouge n'est apparue au cours des n tirages.

1. Dans cette question, n est un entier fixé.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire G_n.

b) En utilisant la fonction $x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x^k$, montrer que l'on a : $\mathbb{E}(G_n) = \dfrac{1-q^n(1+np)}{p}$.

2. ***a)*** Déterminer la limite de $(\mathbb{E}(G_n)$ quand n tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat.

b) Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires (G_n).

3. Ce processus peut être considéré comme une partie qui est gagnée si une boule rouge est apparue au cours des n tirages.

On mise de la manière suivante : pour jouer une partie, il faut payer 15 euros. Si la partie est gagnée à la $k^{\text{ème}}$ boule tirée ($k \leqslant n$), le joueur gagne $(20-k)$ euros.
On note B_n le gain aléatoire pour une partie.

a) Exprimer B_n en fonction de G_n, puis déterminer son espérance.

b) On admet que pour tout réel $x \in]0,1[$ on a :

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln(1-x)} < 1$$

Quelle valeur de n doit-on choisir afin de maximiser le gain d'une partie ?

Exercice 12

1. Question de cours : définition d'un estimateur sans biais d'un paramètre inconnu.

Soit N un entier supérieur ou égal à 2.
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, et suivant chacune la loi uniforme discrète sur $[\![1, N]\!]$.

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $s_n(N) = \sum\limits_{k=1}^{N-1} \left(\dfrac{k}{N}\right)^n$.

a) Montrer que la suite $(s_n(N))_{n\geqslant 1}$ est strictement monotone et convergente.

b) Trouver sa limite.

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $T_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a) Calculer pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, $\mathbb{P}([T_n = k])$.

b) Montrer que $\mathbb{E}(T_n) = N - s_n(N)$.

4. ***a)*** Justifier que $\mathbb{P}([|T_n - N| \geqslant 1])$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

b) En déduire, pour tout $\varepsilon > 0$, la limite de $\mathbb{P}([|T_n - N| \geqslant \varepsilon])$ quand n tend vers l'infini.

5. On suppose dans cette question que N est un paramètre inconnu.

a) Expliquer pourquoi on ne peut pas dire que $T_n + s_n(N)$ est un estimateur sans biais de N.

b) Trouver une suite convergente et asymptotiquement sans biais d'estimateurs de N.

Exercice 13
Soit X une v.a.r. à densité (de densité f_X) définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On suppose que X est à valeurs dans $[-b, b]$ où b est un réel strictement positif.
On suppose de plus que f_X est continue sur $[-b, b]$.

Le but de l'exercice est de démontrer, de deux manières différentes, l'inégalité suivante :

$$\forall a \in [0, b[, \ \mathbb{P}\big([|X| > a] \big) \geqslant \frac{\mathbb{E}(X^2) - a^2}{b^2} \quad (*)$$

1. Soit $r \in \mathbb{N}$. Démontrer que la v.a.r. X admet un moment d'ordre r.

Partie 1 : démonstration par raisonnement sur les intégrales

Soit $a \in [0, b[$.

2. Exprimer $\mathbb{P}\big([|X| > a] \big)$ à l'aide d'intégrales.

3. Démontrer : $\mathbb{E}(X^2) \ \leqslant \ \displaystyle\int_{-b}^{-a} t^2 f_X(t) \ dt + a^2 + \int_a^b t^2 f_X(t) \ dt$.

4. Conclure.

Partie 2 : démonstration dans le cas général

Dans cette partie, on se propose de démontrer l'inégalité précédente en usant d'arguments plus généraux. Dans la suite, pour tout $A \in \mathscr{A}$, on définit la v.a.r. , nommée variable indicatrice de l'événement A, par :

$$\mathbb{1}_A : \ \omega \ \mapsto \ \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

5. Soit $A \in \mathscr{A}$.

a) Démontrer que $\mathbb{1}_A$ admet une espérance et la calculer.

b) Montrer : $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{\overline{A}} \ = \ 1$.

6. Soit $a \in [0, b[$.

a) Démontrer : $X^2 \ \mathbb{1}_{[X^2 \leqslant a^2]} \ \leqslant \ a^2$.

b) Démontrer : $X^2 \ \mathbb{1}_{[X^2 > a^2]} \ \leqslant \ b^2 \ \mathbb{1}_{[X^2 > a^2]}$.

7. Conclure.

Exercice 14 *(d'après* `EML 2016`*)*

PARTIE I : Étude d'une variable aléatoire

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par : $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$.

1. Vérifier que la fonction f est paire.

2. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

3. Déterminer la fonction de répartition de X.

4. ***a)*** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, f(t)\, dt$ converge.

b) En utilisant l'imparité de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t\, f(t)$, montrer que X admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(X) = 0$.

PARTIE II. Étude d'une autre variable aléatoire

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \ln(1 + e^x)$.

5. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.

6. Exprimer, pour tout y de I, $\varphi^{-1}(y)$.

On considère la variable aléatoire réelle Y définie par : $Y = \varphi(X)$.

7. Justifier : $\mathbb{P}([Y \leqslant 0]) = 0$.

8. Déterminer la fonction de répartition de Y.

9. Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.

PARTIE III : Étude d'une convergence en loi

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, de même densité f, où f a été définie dans la partie I.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $U_n = T_n - \ln(n)$.

10. ***a)*** Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de T_n.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([U_n \leqslant x]) = \left(1 + \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}$.

11. En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

Exercice 15 *(d'après* HEC 2017 *- adapté)*
Les tables de mortalité sont utilisées en démographie et en actuariat pour prévoir l'espérance de vie des individus d'une population. On s'intéresse dans ce problème à un modèle qui permet d'ajuster la durée de vie à des statistiques portant sur les décès observés au sein d'une génération.
Dans tout le problème, on note :

- a et b deux réels strictement positifs ;
- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires du problème ;
- $G_{a,b}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $G_{a,b}(x) = \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2}x^2\right)$.
- $f_{a,b}$ est une fonction définie par : $f_{a,b}(x) = \begin{cases} (a+bx)\ \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2}x^2\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Partie I. Loi exponentielle linéaire

1. Justifier que la fonction $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi exponentielle linéaire de paramètres a et b, notée $\mathcal{E}_\ell(a,b)$, si elle admet $f_{a,b}$ pour densité.

Dans la suite, on considère une v.a.r. X suivant la loi $\mathcal{E}_\ell(a,b)$.

2. Déterminer $F_{a,b}$ la fonction de répartition de X.

3. Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx$.

4. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ telle que :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx$$

Partie II. Premier décès et intervalle de confiance de a

- Dans la suite du problème, on note $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi exponentielle linéaire $\mathcal{E}_\ell(a,b)$ dont les paramètres $a > 0$ et $b > 0$ sont inconnus.
- Soit h un entier supérieur ou égal à 2. On suit pendant une période de h années, une « cohorte » de n individus de même âge au début de l'étude et on modélise leurs durées de vie respectives à partir de cette date par les variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les variables aléatoires M_n, H_n et U_n par :

$$M_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n), \quad H_n = \min(h, X_1, X_2, \ldots, X_n) \quad \text{et} \quad U_n = n\, H_n$$

5. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la probabilité $\mathbb{P}([M_n \geqslant x])$.
Reconnaître la loi de la variable aléatoire M_n.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_{U_n} la fonction de répartition de la variable aléatoire U_n.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $F_{U_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2n}x^2\right) & \text{si } 0 \leqslant x < nh \\ 1 & \text{si } x \geqslant nh \end{cases}$.

b) Étudier la continuité de la fonction F_{U_n}.

c) La variable aléatoire U_n admet-elle une densité ?

d) Montrer que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

7. Soit $\alpha \in]0,1[$.

a) Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.
Trouver deux réels c et d strictement positifs tels que :

$$\mathbb{P}([c \leqslant Y \leqslant d]) = 1 - \alpha \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Y \leqslant c]) = \frac{\alpha}{2}$$

b) Montrer que $\left[\dfrac{c}{U_n}\ ,\ \dfrac{d}{U_n}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de a, de niveau de confiance $1-\alpha$.
(il s'agit de démontrer : $\mathbb{P}\left(a \in \left[\dfrac{c}{U_n}, \dfrac{d}{U_n}\right]\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1-\alpha$*)*

Partie III. Nombre de survivants et estimateur convergent de b

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, soit S_i et D_i les variables aléatoires telles que :

$$S_i = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } X_i \geqslant h \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad D_i = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } X_i \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\overline{S}_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} S_i$ et $\overline{D}_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} D_i$.

8. ***a)*** Justifier que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $\mathbb{E}(S_i) = G_{a,b}(h)$ et calculer $\mathbb{E}(S_i D_i)$.

b) Pour quels couples $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, les variables aléatoires S_i et D_j sont-elles indépendantes ?

c) Déduire des questions précédentes l'expression de la covariance $\text{Cov}(\overline{S}_n, \overline{D}_n)$ de $\overline{S}_n$ et $\overline{D}_n$ en fonction de n, $G_{a,b}(h)$ et $G_{a,b}(1)$. Le signe de cette covariance était-il prévisible ?

9. ***a)*** Montrer que $\overline{S}_n$ est un estimateur sans biais et convergent du paramètre $G_{a,b}(h)$.

b) De quel paramètre, $\overline{D}_n$ est-il un estimateur sans biais et convergent ?

10. On pose : $z(a,b) = \ln(G_{a,b}(1))$ et $r(a,b) = \ln(G_{a,b}(h))$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $Z_n = \ln\left(1 - \overline{D}_n + \dfrac{1}{n}\right)$ et $R_n = \ln\left(\overline{S}_n + \dfrac{1}{n}\right)$.
On admet que Z_n et R_n sont des estimateurs convergents de $z(a,b)$ et $r(a,b)$ respectivement.

a) Soit ε, λ et μ des réels strictement positifs.

(i) Justifier l'inclusion suivante :

$$[|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a,b) - \mu r(a,b))| \geqslant \varepsilon] \subset [\lambda|Z_n - z(a,b)| + \mu|R_n - r(a,b)| \geqslant \varepsilon]\,.$$

(ii) En déduire l'inégalité suivante :

$$\mathbb{P}\big(\,[|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a,b) - \mu r(a,b))\,| \geqslant \varepsilon]\,\big) \leqslant \mathbb{P}\Big(\,\Big[|Z_n - z(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\lambda}\Big]\,\Big) + \mathbb{P}\Big(\,\Big[|R_n - r(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\mu}\Big]\,\Big).$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $B_n = \dfrac{2}{h-1} Z_n - \dfrac{2}{h(h-1)} R_n$.
Montrer que B_n est un estimateur convergent du paramètre b.

Exercice 16

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On appelle *médiane* de X tout réel m qui vérifie les deux conditions :
$\mathbb{P}([X \leqslant m]) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}([X \geqslant m]) \geqslant \dfrac{1}{2}$.
On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Question de cours : Définition et propriétés de la loi exponentielle.

2. ***a)*** Montrer que X admet une unique médiane m que l'on calculera.

b) Soit M la fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $M(x) = \mathbb{E}(|X - x|)$.
Étudier les variations de la fonction M sur $\mathbb{R}$ et montrer que m est l'unique point en lequel M atteint son minimum.

3. On suppose que le paramètre λ est inconnu. Soit α un réel vérifiant
$0 < \alpha < 1$.
Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On pose
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Z_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a) Quelle est la loi de Z_n ?

b) Établir l'existence de deux réels c et d tels que : $\mathbb{P}\left(\left[Z_n \leqslant \dfrac{c}{\lambda}\right]\right) = \dfrac{\alpha}{2}$ et $\mathbb{P}\left(\left[Z_n \geqslant \dfrac{d}{\lambda}\right]\right) = \dfrac{\alpha}{2}$.

c) En déduire un intervalle de confiance du paramètre m au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Exercice 17

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Question de cours : Convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.
Dans tout l'exercice, X désigne une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

2. ***a)*** On pose : $T = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X). Montrer que la loi de T est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([T = k]) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right) \left(\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^k$$

b) Quelle est la loi de $T + 1$? En déduire l'espérance et la variance de T.

3. On pose : $Z = X - \lfloor X \rfloor$.
Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z.

4. Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit une loi exponentielle de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Z_n = X_n - \lfloor X_n \rfloor$.
Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice 18

Toutes les variables aléatoires utilisées dans cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Question de cours : loi faible des grands nombres.
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, de loi uniforme sur $[0,1]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n la variable aléatoire $\min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a) Calculer la fonction de répartition de U_n.

b) Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, la probabilité $\mathbb{P}([U_n \geqslant \varepsilon])$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

3. Compléter la deuxième ligne du code **Scilab** suivant pour que la fonction `minu` simule la variable U_k pour la valeur k du paramètre.

```
1 function u = minu(k)
2     x = ..........
3     u = min(x)
4 endfunction
```

4. Soit $p \in]0,1[$ et Z une variable aléatoire telle que, pour tout réel x :

$$\mathbb{P}([Z \leqslant x]) \ = \ \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1}\, \mathbb{P}([U_k \leqslant x])$$

(on admet qu'il existe une telle variable aléatoire et qu'elle possède une densité).

a) Justifier, pour tout $x \in [0,1]$, l'égalité : $\mathbb{P}([Z \leqslant x]) = 1 - \dfrac{p(1-x)}{p+(1-p)x}$.

b) En déduire une densité de Z.

5. *a)* Justifier que la fonction **Scilab** suivante fournit une simulation de la variable aléatoire Z de la question précédente.

```
function z = geomin(p)
    z = minu(grand(1,1,'geom',p))
endfunction
```

b) De quel nombre réel les instructions suivantes fournissent-elles une valeur approchée et pourquoi ?

```
p = 0.5 ;
R = [] ;
for k = 1:10000
    R = [R,geomin(p)]
end ;
disp(mean(R))
```

Exercice 19

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que pour tout $n \geqslant 1$, X_n admet une densité f_n continue sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\left[\dfrac{2}{n}, +\infty\right[$, affine sur $\left[0, \dfrac{1}{n}\right]$ et sur $\left[\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right]$.

1. Déterminer une densité f_n de X_n.

2. Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 20

Les variables aléatoires de cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, on note Y_n une variable aléatoire à valeurs dans $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\}$ telle que :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \qquad \mathbb{P}\left(\left[Y_n = \tfrac{k}{n}\right]\right) \ = \ \tfrac{1}{n}$$

Soit f une fonction définie et continue sur $[0,1]$. Démontrer : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}\big(f(Y_n)\big) = \mathbb{E}\big(f(Z)\big)$.

Exercice 21

Dans cet exercice, toutes les variables sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Question de cours : Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

2. Soit X une variable aléatoire strictement positive suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
On pose : $Z = -\ln(X)$ et on note F_Z la fonction de répartition de Z.

- ***a)*** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $F_Z(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$.
- ***b)*** Montrer que Z admet une densité de probabilité continue f_Z qui atteint sa valeur maximale en un unique point x_0.
- ***c)*** Tracer l'allure de la courbe représentative de F_Z dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
- ***d)*** Que représente le point d'abscisse x_0 et d'ordonnée $F_Z(x_0)$ pour cette courbe ?

3. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geqslant 1}$ indépendantes et de même loi que X.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $Z_n = Y_n - \ln(n)$.

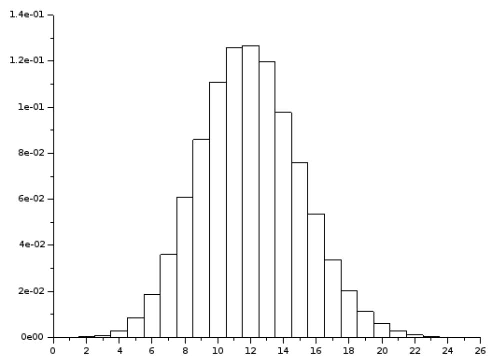
- ***a)*** Déterminer les fonctions de répartition F_{Y_n} et F_{Z_n} de Y_n et Z_n respectivement.
- ***b)*** Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire Z.
- ***c)*** Établir pour tout réel $c > 0$, l'inégalité : $\mathbb{E}(Y_n) \geqslant c\, \mathbb{P}([Y_n \geqslant c])$.
- ***d)*** En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(Y_n)$.

Exercice 22

Après une alerte incendie, les 60 élèves d'une école se répartissent au hasard dans 5 salles de classe. Afin de savoir comment se répartissent les élèves on exécute le programme **Scilab** suivant :

```
Y = grand(100000, 1, 'bin', 60, 1/5)
hisplot(0.5:25,Y)
```

qui donne la représentation ci-dessous :



Que représente la valeur maximale prise par cet histogramme ? Prouver un résultat concernant cette valeur.

Exercice 23

1. Question de cours : Critères de convergence d'une intégrale impropre.
Préciser la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, où a est un réel strictement positif et α un réel quelconque.
Soit T une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, suivnt la loi normale centrée réduite.
On note Φ et φ respectivement, la fonction de répartition et une densité de T.

2. ***a)*** À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$0 \leqslant 1 - \Phi(x) \leqslant \frac{1}{2x^2}$$

b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(x))\, dx$ est convergente et calculer sa valeur.

3. On note φ' la dérivée de φ.

a) Déterminer pour tout $x \in \mathbb{R}$, une relation entre $\varphi'(x)$ et $\varphi(x)$.

b) En déduire, à l'aide de deux intégrations par parties, que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \leqslant \frac{1 - \Phi(x)}{\varphi(x)} \leqslant \frac{1}{x}$$

c) Donner un équivalent de $1 - \Phi(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

4. Soit $a > 0$. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathbb{P}_{[T>x]}\left(\left[T > x + \frac{a}{x}\right]\right)$.

Exercice 24

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{n}$ (d'espérance n).
Pour tout x réel on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ soient :

$$Y_n = \lfloor X_n \rfloor \quad \text{et} \quad Z_n = X_n - \lfloor X_n \rfloor$$

1. Question de cours : Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

2. Déterminer la loi de Y_n et son espérance.

3. Déterminer $Z_n(\Omega)$ et montrer :

$$\forall t \in [0,1], \quad \mathbb{P}\big(\,[Z_n \leqslant t]\,\big) = \frac{1 - \mathrm{e}^{\frac{-t}{n}}}{1 - \mathrm{e}^{\frac{-1}{n}}}.$$

4. Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on précisera la loi.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et N_n la variable aléatoire définie par :

$$N_n = \text{Card}\left\{k \in [\![1, n]\!] \text{ tel que } X_k \leqslant \frac{k}{n}\right\}$$

où $\text{Card}(A)$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble fini A.

a) Reconnaître la loi de N_n et donner son espérance et sa variance.

b) Montrer que la suite de variables aléatoires $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire N dont on précisera la loi.