Colles

semaine 4 : 20 septembre - 25 septembre

I. Questions de cours

Exercice 1
Énoncé et démonstration de la propriété de recouvrement.

Exercice 2
Énoncé et démonstration des propriétés de l'opérateur d'équivalence (en choisir 3).

Exercice 3
Soit (u_n) une suite.
On suppose que :

× (u_n) est croissante,

× (u_n) est convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell$.

II. Autres exercices

Exercice 4
Pour chacune des séries suivantes, justifier la convergence de la série et calculer sa somme.

a. $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}$

b. $\sum n \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}$

c. $\sum \frac{n^2}{2^n}$

d. $\sum \frac{n^2+2^n}{n!}$

e. $\sum \frac{1}{n(n+1)}$

f. $\sum \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

g. $\sum \frac{n(n+3)}{3^{n+2}}$

h. $\sum \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right)$

i. $\sum \frac{2n^2-n+1}{n!}$

Exercice 5
Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

a. $\sum \frac{\ln(n)}{3^n}$

b. $\sum \frac{\ln(n)}{n^3}$

c. $\sum (-1)^n \frac{\ln(n)}{3^n}$

d. $\sum \frac{n^4}{2^n}$

e. $\sum \frac{\sqrt{n!}}{(n+2)!}$

f. $\sum \frac{n^3}{\mathrm{e}^{n+1}}$

g. $\sum \ln(1+n\,\mathrm{e}^{-n})$

h. $\sum \frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2+1}$

i. $\sum \frac{\sqrt{n}\ \ln(n)}{n+1}$

Exercice 6

Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, et donner un majorant de sa somme.

Exercice 7

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.
On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \ln\left(1 + {u_n}^k\right)$.

1) Supposons que la série $\sum\ u_n$ converge

- ***a.*** Que peut-on dire de la suite (u_n) ?
- ***b.*** Démontrer alors qu'il existe un rang n_0 tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant u_n^k \leqslant u_n$.
- ***c.*** En déduire alors la nature de la série $\sum\ v_n$.

2) On se propose d'étudier la réciproque de l'implication précédente.

- ***a.*** On suppose que $k = 1$. Montrer que si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.
- ***b.*** On suppose que $k > 1$. Donner un exemple de suite (u_n) telle que la série $\sum\ v_n$ converge et la série $\sum\ u_n$ diverge.

Exercice 8

- ***a.*** Démontrer que la fonction $F : x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$.
- ***b.*** Démontrer que : $\forall k \geqslant 2,\ \displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln(t)\ dt \ \leqslant\ \ln(k) \ \leqslant\ \int_{k}^{k+1} \ln(t)\ dt$.
- ***c.*** En déduire que : $\forall n \geqslant 2,\ n\ \ln(n) - n \ \leqslant\ \ln(n!) \ \leqslant\ (n+1)\ \ln(n+1) - (n+1)$.
- ***d.*** En déduire un équivalent simple de $\ln(n!)$.
- ***e.*** La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n!)}{n^3}$ est-elle convergente ?

Exercice 9

1) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[\,,\ f(x) = x + \mathrm{e}^x$$

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \mathrm{e}^x = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$, notée u_n. Préciser la valeur de u_1.

3)
- ***a.*** Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
- ***b.*** La suite (u_n) est-elle majorée ? En déduire la limite de (u_n).

4)
- ***a.*** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n - \ln(n) \leqslant \mathrm{e}^{u_n} \leqslant n$.
- ***b.*** En déduire que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

5) On note $v_n = u_n - \ln(n)$.

- ***a.*** Démontrer que : $\mathrm{e}^{v_n} = 1 - \dfrac{u_n}{n}$.
- ***b.*** En déduire un équivalent simple de v_n.
- ***c.*** Déterminer la nature des séries $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{v_n}{n}$.

Exercice 10

a. Démontrer que la fonction $F : x \mapsto x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto (\ln(x))^2$ sur $]0, +\infty[$.

b. Démontrer que : $\forall k \geqslant 2,\ \displaystyle\int_{k-1}^{k} (\ln(t))^2\ dt \ \leqslant\ (\ln(k))^2 \ \leqslant\ \int_{k}^{k+1} (\ln(t))^2\ dt$.

c. Soit $n \geqslant 2$. Déduire de la question précédente un encadrement de $v_n = \sum\limits_{k=2}^{n} (\ln(k))^2$.

d. En déduire un équivalent simple de la suite (v_n).

e. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\dfrac{v_n}{n^2}\right)^2$ est-elle convergente ?

Exercice 11 *(d'après* `ECRICOME 1996`*)*

On désigne par n un entier naturel non nul, et l'on se propose d'étudier les racines de l'équation :

$$(E_n) : \ln(x) + x = n$$

À cet effet, on introduit la fonction $f : x \mapsto \ln(x) + x$.

Partie 1 : Existence des racines de (E_n)

1) *a.* Étudier les variations de la fonction f.

b. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) admet une racine et une seule notée x_n. Démontrer que la suite (x_n) est strictement croissante.

2) Donner la valeur de x_1.

3) Montrer que $x_2 \in \,]1, 2[$.

Partie 2 : Étude de la convergence de (x_n)

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln(x) < x$.

2) Prouver que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{n}{2} \leqslant x_n \leqslant n$.

3) Quelle est la limite de (x_n) ?

Partie 3 : Comportement asymptotique de (x_n)

1) Montrer que $\dfrac{\ln(x_n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En déduire que : $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

2) Calculer la limite de $x_{n+1} - x_n$ quand n tend vers $+\infty$.

3) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n - x_n}{\ln(n)}$.

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n - 1 = \dfrac{\ln\left(\dfrac{x_n}{n}\right)}{\ln(n)}$.

b. Quelle est la limite de (u_n) ?

c. Prouver alors que : $1 - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

4) En déduire qu'il existe une fonction ε ayant une limite nulle en $+\infty$ telle que :

$$\forall n \geqslant 2,\ x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)}{n}\,\varepsilon\,(n)$$

Exercice 12

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + {u_n}^2 \end{cases}$

1) ***a.*** Montrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

2) On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.

a. Montrer que pour tout $t > 0$: $\ln(1+t) \leqslant t$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1} u_n}$.

c. Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ est convergente.

d. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite.

3) ***a.*** Montrer, à l'aide de la question 2b, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_{n+p+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n\, u_n}$$

b. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant \ell - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^n\, u_n}$.

c. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{2^n \ell}$.

Exercice 13

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \geqslant 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ où $f : x \mapsto x^2 + \dfrac{2}{x}$.

1) Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geqslant 1$.

2) Quel est le sens de variation de (u_n) ?

3) Prouver par l'absurde que la suite (u_n) ne converge pas.

4) Écrire une fonction **Scilab** prenant en paramètre un entier `m` et un réel `init` (correspondant à valeur de u_0) et renvoyant la valeur de $u_{\mathtt{m}}$.

Exercice 14

1) Étudier la fonction f définie sur $[0, +\infty[$, par $f(x) = \dfrac{4}{3+x}$.

2) On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R}^{+*} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{4}{3+u_n} \end{cases}$

a. Montrer que la suite (u_n) est bien définie.
(on pourra montrer au passage que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$)

b. Déterminer le seul point fixe ℓ de la fonction f.

c. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{4}{9}$.

d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^n |a - \ell|$.

e. Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

3) Écrire une fonction **Scilab** prenant en paramètre un entier `m` et un réel `a` (correspondant à valeur de u_0) et renvoyant la valeur de $u_{\mathtt{m}}$.

Exercice 15 (`EML 2015`)

Partie II : Étude d'une suite

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^3\,\mathrm{e}^x$,
et la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

2. Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3. Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

Partie III : Étude d'une série

4. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{f(n)}$ converge. On note $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{f(n)}$.

5. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| S - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{f(k)} \right| \leqslant \dfrac{1}{(\mathrm{e}-1)\,\mathrm{e}^n}$.

6. En déduire une fonction en **Scilab** qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Exercice 16 (`EML 2016`)
On considère l'application $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0,+\infty[$, par :

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{cl} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{array} \right.$$

On admet : $0,\ 69 < \ln(2) < 0,\ 70$.

Partie I : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0,+\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.

3. Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.

4. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(0,\vec{i},\vec{j})$.

   a) Montrer que C admet une tangente en 0 et préciser celle-ci.

   b) Montrer que C admet un point d'inflexion et un seul, noté I, et préciser les coordonnées de I.

   c) Tracer l'allure de C.

5. Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in [0,+\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

Partie III : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

6. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

7. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

8. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
(on pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto t - \ln(t)$)

9. Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche un entier naturel N tel que $1 - u_N < 10^{-4}$.

Exercice 17 (ESCP 2005)

1. Quelle est la nature des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n+1}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(n+1)^2}$?

2. Écrire une fonction **Scilab** qui prend en paramètre un entier `n` et renvoie $S_{\mathtt{n}} = \sum\limits_{k=0}^{\mathtt{n}} \dfrac{1}{(k+1)^2}$, somme partielle d'ordre `n` de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

3. On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle.
Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k, \quad v_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k, \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante, et que la suite (v_n) est croissante.

b) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n \leqslant u_n$.
En déduire que la suite (u_n) admet une limite s et que la suite (v_n) admet la même limite s.

c) En déduire que la suite (s_n) converge vers s.

4. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n$ est convergente.

5. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente. On note $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$ sa somme.

6. *a)* Établir, pour tout réel t positif et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$$

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt$$

c) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt \right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

d) En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$.

Exercice 18 (EML 2021)
On considère la fonction φ définie sur $]-\infty, 1]$ par :

$$\forall x \in]-\infty, 1], \quad \varphi(x) = \begin{cases} x + (1-x)\ln(1-x) & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Partie A : Étude de la fonction φ

1. Montrer que la fonction φ est continue sur $]-\infty, 1]$.

2. ***a)*** Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ et calculer, pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $\varphi'(x)$.

b) En déduire les variations de φ sur $]-\infty, 1]$.

c) La fonction φ est-elle dérivable en 1 ?

3. Calculer la limite de φ en $-\infty$.

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de φ en soignant le tracé aux voisinages de 0 et 1.

5. ***a)*** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\ln(t)\,dt$ converge et calculer sa valeur.

b) En déduire : $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \frac{1}{4}$.

Partie B : Étude de deux séries

Soit x un réel appartenant à $[0, 1[$.

6. ***a)*** Vérifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $[0, x]$: $\displaystyle\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{t^n}{1-t}$.

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle-\ln(1-x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$.

7. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leqslant \frac{1}{(n+1)(1-x)}$.

En déduire la limite de $\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

8. Montrer alors que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

9. ***a)*** Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.

b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge et que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \varphi(x)$.

10. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et que l'on a encore : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \varphi(1)$.

Exercice 19 `(EML 2019)`
On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall t \in \,]0,+\infty[, \;\; f(t) = t + \frac{1}{t}$$

PARTIE A : Étude d'une fonction d'une variable

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites en 0 et $+\infty$.

2. Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ vers $[2,+\infty[$.

On note $g : [2,+\infty[\, \to [1,+\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1,+\infty[$.

3. ***a)*** Dresser le tableau de variations de g.

b) Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2,+\infty[$.

c) Soit $y \in [2,+\infty[$. En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in \,]0,+\infty[$. En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y.

PARTIE C : Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \;\; u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2\, u_n} = \frac{1}{n}\, f(n\, u_n)$$

8. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.

9. Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie la valeur de u_n.

```
1  function u=suite(n)
2    u = 1
3    for k = ..................
4      u = ..................
5    end
6  endfunction
```

10. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

b) En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$.

c) Calculer, pour tout n supérieur ou égal à 2, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} v_k$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, que l'on ne cherchera pas à déterminer.

11. ***a)*** Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\, dt$.

b) Pour tous entiers n et p tels que $2 \leqslant p < n$, calculer $\sum\limits_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire :

$$0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\, dt$$

c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_2 \leqslant u_n \leqslant 1 + u_2$.
Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2, 3]$.

d) Montrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :

$$0 \leqslant \ell - u_p \leqslant \frac{1}{p-1}$$

e) En déduire une fonction **Scilab** qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

Exercice 20 `(EML 1998)`
La fonction logarithme népérien est notée ln .

1. Soit $x \in [-1; 1[$.

a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout t de $[-1; 1[$:

$$\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout t de $[-1; x]$:

$$\left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k \right| \leqslant \frac{|t|^{n+1}}{1-x}$$

c) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\left| -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| \leqslant \frac{1}{(n+2)(1-x)}$$

d) En déduire que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et a pour somme $-\ln(1-x)$.
En particulier, montrer : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\, 2^k} = \ln(2)$.

e) Écrire un programme **Scilab** qui calcule et affiche une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-3} près.

2. Un joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention du premier pile. S'il lui a fallu n lancers ($n \in \mathbb{N}^*$) pour obtenir ce premier pile, on lui fait alors tirer au hasard un billet de loterie parmi n billets dont un seul est gagnant.
Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

Exercice 21 (EML 2010)
On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application de classe C^2, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x^2)$$

et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
On donne la valeur approchée : $\ln(2) \approx 0,69$.

Partie I : Étude de f et tracé de $\mathcal{C}$

1. *a)* Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$.

b) En déduire le sens de variation de f.

c) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.

3. Montrer que $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

4. Tracer $\mathcal{C}$. On utilisera un repère orthonormé d'unité graphique 2 centimètres, et on précisera la tangente à $\mathcal{C}$ en l'origine et en chacun des points d'inflexion.

5. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x f(x) dx$.
A cet effet, on pourra utiliser le changement de variable défini par $t = 1 + x^2$.

Partie II : Étude d'une suite et d'une série associées à f

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

6. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

7. Établir que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.

8. Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche un entier n tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$.

9. *a)* Établir : $\forall x \in [0;1],\ f(x) \leqslant x - \dfrac{1}{2}x^2$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 \ \leqslant\ 2\ (u_n - u_{n+1})$.

c) Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge.

Exercice 22 `(EDHEC 2018 - voie S)`

1. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $a_n = \dfrac{1}{n\ \ln(n)}$.

a) Montrer : $\forall k \geqslant 2,\ \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t\ \ln(t)}\ dt \ \leqslant\ \frac{1}{k\ \ln(k)}$.

b) En déduire, par sommation, la nature de la série de terme général a_n.

Dans la suite, on considère la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} & \text{si } x \in \,]-\infty, 0[\, \cup \,]0,1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. *a)* Montrer que f est continue sur $]-\infty, 1[$.

b) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

3. *a)* Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0,1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]-\infty, 0[\, \cup \,]0,1[$.

b) Étudier le signe de la quantité $\ln(1-x) + x$, lorsque x appartient à $]-\infty, 1[$, puis en déduire les variations de f.

c) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, puis dresser son tableau de variation.

4. *a)* Établir que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un seul réel de $[0,1[$, noté u_n, tel que $f(u_n) = n$ et donner la valeur de u_1.

b) Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $f\left(1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ puis en déduire qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant 1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

d) En déduire, à l'aide de la première question, que la série de terme général $\dfrac{1}{-n\ln(1-u_n)}$ est divergente.

e) Conclure, en revenant à la définition de u_n, que la série de terme général $1 - u_n$ est divergente.

Exercice 23 `(EDHEC 2013 - voie S)`

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum \dfrac{1}{a_n}$ converge.

Le but de cet exercice est de démontrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{n}{a_1 + \ldots + a_n}$ converge également et que, de plus :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \ \leqslant\ 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$$

1. **Étude d'un exemple**

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = n\,(n+1)$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier : $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, puis en déduire que la série $\sum \dfrac{1}{a_n}$ converge et donner sa somme.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer u_n en fonction de n.

c) Établir la convergence de la série $\sum u_n$ et donner sa somme puis établir l'inégalité demandée.

2. **Étude d'un deuxième exemple**

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = n!$.

a) Établir la convergence de la série $\sum \dfrac{1}{a_n}$.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \ \leqslant\ \dfrac{1}{(n-1)!}$.

c) En déduire que la série $\sum u_n$ converge et établir l'inégalité demandée.

On revient maintenant au cas général.

3. `(ADMIS)`
Montrer, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \big(1 + \ldots + n\big)^2 \ \leqslant\ \big(a_1 + \ldots + a_n\big) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \ldots + \frac{n^2}{a_n}\right)$$

4. ***a)*** Utiliser le résultat précédent pour établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{2n+1}{a_1 + \ldots + a_n} \ \leqslant\ 4 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}$$

b) En déduire, par sommation : $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1 + \ldots + a_n} \ \leqslant\ 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k}$.

c) Montrer enfin que la série $\sum \dfrac{2n+1}{a_1 + \ldots + a_n}$ converge puis établir le résultat demandé.

Exercice 24 (ECRICOME 2019)

Partie B

Pour tout entier n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad h_n(x) \;=\; f(x^n, 1) \;=\; x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

3. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

4. En déduire que pour tout entier n non nul, l'équation $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.

5. ***a)*** Démontrer :

$$\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}$$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_{n+1}(v_n) \geqslant 4$.

c) Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.

6. ***a)*** Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et montrer : $\ell \geqslant 1$.

b) En supposant que $\ell > 1$, démontrer : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n^n = +\infty$.
En déduire une contradiction.

c) Déterminer la limite de (v_n).

7. ***a)*** Montrer : $\forall n \geqslant 1,\ v_n \leqslant 3$.

b) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function y = h(n,x)` qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel n non nul et un réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ en entrée.

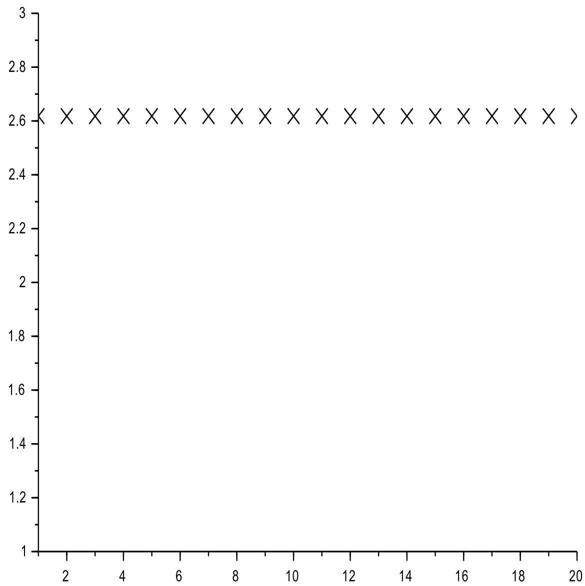
c) Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de v_n par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier $n \geqslant 1$ en entrée :

```
function res = v(n)
  a = 1
  b = 3
  while (b-a) > 10 ^ (-5)
    c = (a+b)/2
    if h(n,c) < 4 then
      ........
    else
      ........
    end
  end
  ..........
endfunction
```

d) À la suite de la fonction `v`, on écrit le code suivant :

```
X = 1:20
Y = zeros(1,20)
for k = 1:20
  Y(k) = v(k)^k
end
plot2d(X, Y, style=-2, rect=[1,1,20,3])
```

À l'exécution du programme, on obtient la sortie graphique suivante :



Expliquer ce qui est affiché sur le graphique ci-dessus.
Que peut-on conjecturer ?

e) Montrer : $\forall n \geqslant 1,\ (v_n)^n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

f) Retrouver ainsi le résultat de la question ***4.c)***.