

Colles

semaine 5 : 27 septembre - 01 octobre

I. Questions de cours

Exercice 1

1. Énoncé et démonstration de la propriété de recouvrement.
2. Énoncé et démonstration de la condition nécessaire de convergence sur les séries.

Exercice 2

Comparaison séries / intégrales. Énoncé et démonstration.

Exercice 3

1. Par un argument de télescopage, déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$.
2. Déterminer la nature de cette série par utilisation d'un théorème de comparaison.

II. Autres exercices

Exercice 4

Pour chacune des séries suivantes, justifier la convergence de la série et calculer sa somme.

$$a. \sum \left(\frac{2}{3} \right)^{2n+1}$$

$$d. \sum \frac{n^2 + 2^n}{n!}$$

$$g. \sum \frac{n(n+3)}{3^{n+2}}$$

$$b. \sum n \left(\frac{2}{3} \right)^{2n+1}$$

$$e. \sum \frac{1}{n(n+1)}$$

$$h. \sum \ln \left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)} \right)$$

$$c. \sum \frac{n^2}{2^n}$$

$$f. \sum \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$i. \sum \frac{2n^2 - n + 1}{n!}$$

Exercice 5

Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

$$a. \sum \frac{\ln(n)}{3^n}$$

$$d. \sum \frac{n^4}{2^n}$$

$$g. \sum \ln(1 + n e^{-n})$$

$$b. \sum \frac{\ln(n)}{n^3}$$

$$e. \sum \frac{\sqrt{n!}}{(n+2)!}$$

$$h. \sum \frac{\sqrt{n} \ln(n)}{n^2 + 1}$$

$$c. \sum (-1)^n \frac{\ln(n)}{3^n}$$

$$f. \sum \frac{n^3}{e^{n+1}}$$

$$i. \sum \frac{\sqrt{n} \ln(n)}{n+1}$$

Exercice 6

Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n^2}$$

En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, et donner un majorant de sa somme.

Exercice 7

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(1 + u_n^k)$.

1) Supposons que la série $\sum u_n$ converge

a. Que peut-on dire de la suite (u_n) ?

b. Démontrer alors qu'il existe un rang n_0 tel que : $\forall n \geq n_0, 0 \leq u_n^k \leq u_n$.

c. En déduire alors la nature de la série $\sum v_n$.

2) On se propose d'étudier la réciproque de l'implication précédente.

a. On suppose que $k = 1$. Montrer que si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.

b. On suppose que $k > 1$. Donner un exemple de suite (u_n) telle que la série $\sum v_n$ converge et la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 8

a. Démontrer que la fonction $F : x \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$.

b. Démontrer que : $\forall k \geq 2, \int_{k-1}^k \ln(t) dt \leq \ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t) dt$.

c. En déduire que : $\forall n \geq 2, n \ln(n) - n \leq \ln(n!) \leq (n+1) \ln(n+1) - (n+1)$.

d. En déduire un équivalent simple de $\ln(n!)$.

e. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n!)}{n^3}$ est-elle convergente ?

Exercice 9

1) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, f(x) = x + e^x$$

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + e^x = n$ admet une unique solution dans \mathbb{R}^+ , notée u_n . Préciser la valeur de u_1 .

3) a. Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

b. La suite (u_n) est-elle majorée ? En déduire la limite de (u_n) .

4) a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n - \ln(n) \leq e^{u_n} \leq n$.

b. En déduire que : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

5) On note $v_n = u_n - \ln(n)$.

a. Démontrer que : $e^{v_n} = 1 - \frac{u_n}{n}$.

b. En déduire un équivalent simple de v_n .

c. Déterminer la nature des séries $\sum_{n \geq 1} v_n$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{v_n}{n}$.

Exercice 10

- a. Démontrer que la fonction $F : x \mapsto x(\ln(x))^2 - 2x \ln(x) + 2x$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto (\ln(x))^2$ sur $]0, +\infty[$.
- b. Démontrer que : $\forall k \geq 2, \int_{k-1}^k (\ln(t))^2 dt \leq (\ln(k))^2 \leq \int_k^{k+1} (\ln(t))^2 dt$.
- c. Soit $n \geq 2$. Déduire de la question précédente un encadrement de $v_n = \sum_{k=2}^n (\ln(k))^2$.
- d. En déduire un équivalent simple de la suite (v_n) .
- e. La série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{v_n}{n^2}\right)^2$ est-elle convergente ?

Exercice 11 (d'après ECRICOME 1996)

On désigne par n un entier naturel non nul, et l'on se propose d'étudier les racines de l'équation :

$$(E_n) : \ln(x) + x = n$$

À cet effet, on introduit la fonction $f : x \mapsto \ln(x) + x$.

Partie 1 : Existence des racines de (E_n)

- 1) a. Étudier les variations de la fonction f .
- b. Montrer que f est une bijection de \mathbb{R}^{+*} sur \mathbb{R} .
- c. En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) admet une racine et une seule notée x_n .
Démontrer que la suite (x_n) est strictement croissante.
- 2) Donner la valeur de x_1 .
- 3) Montrer que $x_2 \in]1, 2[$.

Partie 2 : Étude de la convergence de (x_n)

- 1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x) < x$.
- 2) Prouver que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{2} \leq x_n \leq n$.
- 3) Quelle est la limite de (x_n) ?

Partie 3 : Comportement asymptotique de (x_n)

- 1) Montrer que $\frac{\ln(x_n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. En déduire que : $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.
- 2) Calculer la limite de $x_{n+1} - x_n$ quand n tend vers $+\infty$.
- 3) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n - x_n}{\ln(n)}$.

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - 1 = \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln(n)}$.

b. Quelle est la limite de (u_n) ?

c. Prouver alors que : $1 - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

- 4) En déduire qu'il existe une fonction ε ayant une limite nulle en $+\infty$ telle que :

$$\forall n \geq 2, x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)}{n} \varepsilon(n)$$

Exercice 12

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + u_n^2 \end{cases}$

1) a. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

2) On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$.

a. Montrer que pour tout $t > 0$: $\ln(1+t) \leq t$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1}u_n}$.

c. Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ est convergente.

d. En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite.

3) a. Montrer, à l'aide de la question 2b, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq v_{n+p+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n u_n}$$

b. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq \ell - v_n \leq \frac{1}{2^n u_n}$.

c. En déduire que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{2^n \ell}$.

Exercice 13

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \geq 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ où $f : x \mapsto x^2 + \frac{2}{x}$.

1) Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geq 1$.

2) Quel est le sens de variation de (u_n) ?

3) Prouver par l'absurde que la suite (u_n) ne converge pas.

4) Écrire une fonction **Scilab** prenant en paramètre un entier m et un réel **init** (correspondant à valeur de u_0) et renvoyant la valeur de u_m .

Exercice 14

1) Étudier la fonction f définie sur $[0, +\infty[$, par $f(x) = \frac{4}{3+x}$.

2) On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R}^{+*} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4}{3+u_n} \end{cases}$

a. Montrer que la suite (u_n) est bien définie.

(on pourra montrer au passage que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$)

b. Déterminer le seul point fixe ℓ de la fonction f .

c. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.

d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |a - \ell|$.

e. Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) .

3) Écrire une fonction **Scilab** prenant en paramètre un entier m et un réel a (correspondant à valeur de u_0) et renvoyant la valeur de u_m .

Exercice 15 (EML 2015)**Partie II : Étude d'une suite**

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^3 e^x$,
et la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.
2. Établir que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
3. Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

Partie III : Étude d'une série

4. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{f(n)}$ converge. On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)}$.
5. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| S - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}$.
6. En déduire une fonction en **Scilab** qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Exercice 16 (EML 2016)

On considère l'application $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0, +\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t \ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On admet : $0, 69 < \ln(2) < 0, 70$.

Partie I : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0, +\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.
3. Dresser le tableau des variations de f . On précisera la limite de f en $+\infty$.
4. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
 - a) Montrer que C admet une tangente en 0 et préciser celle-ci.
 - b) Montrer que C admet un point d'inflexion et un seul, noté I , et préciser les coordonnées de I .
 - c) Tracer l'allure de C .
5. Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in [0, +\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

Partie III : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

6. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
7. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
8. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
(on pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto t - \ln(t)$)
9. Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche un entier naturel N tel que $1 - u_N < 10^{-4}$.

Exercice 17 (ESCP 2005)

1. Quelle est la nature des séries $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2}$?

2. Écrire une fonction **Scilab** qui prend en paramètre un entier n et renvoie $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2}$, somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2}$.

3. On note $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k, \quad v_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k, \quad s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$$

a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante, et que la suite (v_n) est croissante.

b) Montrer, pour tout n de \mathbb{N} : $v_n \leq u_n$.

En déduire que la suite (u_n) admet une limite s et que la suite (v_n) admet la même limite s .

c) En déduire que la suite (s_n) converge vers s .

4. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ est convergente.

5. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente. On note $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ sa somme.

6. a) Établir, pour tout réel t positif et pour tout n de \mathbb{N}^* , l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$$

b) En déduire, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

c) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

d) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Exercice 18 (EML 2021)

On considère la fonction φ définie sur $] -\infty, 1]$ par :

$$\forall x \in] -\infty, 1], \quad \varphi(x) = \begin{cases} x + (1-x) \ln(1-x) & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Partie A : Étude de la fonction φ

1. Montrer que la fonction φ est continue sur $] -\infty, 1]$.
2. a) Justifier que φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, 1[$ et calculer, pour tout $x \in] -\infty, 1[$, $\varphi'(x)$.
 b) En déduire les variations de φ sur $] -\infty, 1]$.
 c) La fonction φ est-elle dérivable en 1 ?
3. Calculer la limite de φ en $-\infty$.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de φ en soignant le tracé aux voisinages de 0 et 1.
5. a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\int_0^1 t \ln(t) dt$ converge et calculer sa valeur.
 b) En déduire : $\int_0^1 \varphi(x) dx = \frac{1}{4}$.

Partie B : Étude de deux séries

Soit x un réel appartenant à $[0, 1[$.

6. a) Vérifier, pour tout n de \mathbb{N}^* et tout t de $[0, x]$: $\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{t^n}{1-t}$.
 b) En déduire, pour tout n de \mathbb{N}^* : $-\ln(1-x) - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.
7. Montrer, pour tout n de \mathbb{N}^* : $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-x)}$.
 En déduire la limite de $\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.
8. Montrer alors que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge et que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.
9. a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.
 b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge et que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \varphi(x)$.
10. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et que l'on a encore : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \varphi(1)$.

Exercice 19 (EML 2019)

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall t \in]0, +\infty[, f(t) = t + \frac{1}{t}$$

PARTIE A : Étude d'une fonction d'une variable

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites en 0 et $+\infty$.

2. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers $[2, +\infty[$.

On note $g : [2, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1, +\infty[$.

3. a) Dresser le tableau de variations de g .

b) Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2, +\infty[$.

c) Soit $y \in [2, +\infty[$. En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in]0, +\infty[$. En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y .

PARTIE C : Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{1}{n} f(n u_n)$$

8. Montrer que, pour tout n de \mathbb{N}^* , u_n existe et $u_n \geq 1$.

9. Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un entier n de \mathbb{N}^* , elle renvoie la valeur de u_n .

```

1  function u=suite(n)
2      u = 1
3      for k = .....
4          u = .....
5      end
6  endfunction
```

10. On pose, pour tout n de \mathbb{N}^* , $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}$.

b) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$.

c) Calculer, pour tout n supérieur ou égal à 2, $\sum_{k=1}^{n-1} v_k$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ , que l'on ne cherchera pas à déterminer.

11. a) Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt$.

b) Pour tous entiers n et p tels que $2 \leq p < n$, calculer $\sum_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire :

$$0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt$$

c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_2 \leq u_n \leq 1 + u_2$.
Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2, 3]$.

d) Montrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :

$$0 \leq \ell - u_p \leq \frac{1}{p-1}$$

e) En déduire une fonction **Scilab** qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

Exercice 20 (EML 1998)

La fonction logarithme népérien est notée \ln .

1. Soit $x \in [-1; 1[$.

a) Montrer, pour tout n de \mathbb{N} et tout t de $[-1; 1[$:

$$\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

b) En déduire, pour tout n de \mathbb{N} et tout t de $[-1; x]$:

$$\left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k \right| \leq \frac{|t|^{n+1}}{1-x}$$

c) Établir, pour tout n de \mathbb{N} :

$$\left| -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| \leq \frac{1}{(n+2)(1-x)}$$

d) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge et a pour somme $-\ln(1-x)$.

En particulier, montrer : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k 2^k} = \ln(2)$.

e) Écrire un programme **Scilab** qui calcule et affiche une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-3} près.

2. Un joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention du premier pile. S'il lui a fallu n lancers ($n \in \mathbb{N}^*$) pour obtenir ce premier pile, on lui fait alors tirer au hasard un billet de loterie parmi n billets dont un seul est gagnant.

Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

Exercice 21 (EML 2010)

On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application de classe C^2 , définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x^2)$$

et \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

On donne la valeur approchée : $\ln(2) \approx 0,69$.

Partie I : Étude de f et tracé de \mathcal{C}

1. *a)* Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$.
b) En déduire le sens de variation de f .
c) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
3. Montrer que \mathcal{C} admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.
4. Tracer \mathcal{C} . On utilisera un repère orthonormé d'unité graphique 2 centimètres, et on précisera la tangente à \mathcal{C} en l'origine et en chacun des points d'inflexion.
5. Calculer $\int_0^1 x f(x) dx$.
 A cet effet, on pourra utiliser le changement de variable défini par $t = 1 + x^2$.

Partie II : Étude d'une suite et d'une série associées à f

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

6. Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.
7. Établir que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge et déterminer sa limite.
8. Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche un entier n tel que $u_n \leq 10^{-3}$.
9. *a)* Établir : $\forall x \in [0; 1], f(x) \leq x - \frac{1}{2}x^2$.
b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 \leq 2(u_n - u_{n+1})$.
c) Démontrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ converge.

Exercice 22 (EDHEC 2018 - voie S)

1. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $a_n = \frac{1}{n \ln(n)}$.

a) Montrer : $\forall k \geq 2, \int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq \frac{1}{k \ln(k)}$.

b) En déduire, par sommation, la nature de la série de terme général a_n .

Dans la suite, on considère la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{-x}{(1-x) \ln(1-x)} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. a) Montrer que f est continue sur $]-\infty, 1[$.

b) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

3. a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.

b) Étudier le signe de la quantité $\ln(1-x) + x$, lorsque x appartient à $]-\infty, 1[$, puis en déduire les variations de f .

c) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, puis dresser son tableau de variation.

4. a) Établir que, pour tout n de \mathbb{N}^* , il existe un seul réel de $[0, 1[$, noté u_n , tel que $f(u_n) = n$ et donner la valeur de u_1 .

b) Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $f\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ puis en déduire qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, u_n \leq 1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

d) En déduire, à l'aide de la première question, que la série de terme général $\frac{1}{-n \ln(1-u_n)}$ est divergente.

e) Conclure, en revenant à la définition de u_n , que la série de terme général $1 - u_n$ est divergente.

Exercice 23 (EDHEC 2013 - voie S)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum \frac{1}{a_n}$ converge.

Le but de cet exercice est de démontrer que la série de terme général $u_n = \frac{n}{a_1 + \dots + a_n}$ converge également et que, de plus :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$$

1. Étude d'un exemple

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = n(n+1)$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier : $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, puis en déduire que la série $\sum \frac{1}{a_n}$ converge et donner sa somme.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer u_n en fonction de n .
- Établir la convergence de la série $\sum u_n$ et donner sa somme puis établir l'inégalité demandée.

2. Étude d'un deuxième exemple

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = n!$.

- Établir la convergence de la série $\sum \frac{1}{a_n}$.
- Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \frac{1}{(n-1)!}$.
- En déduire que la série $\sum u_n$ converge et établir l'inégalité demandée.

On revient maintenant au cas général.

3. (ADMIS)

Montrer, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (1 + \dots + n)^2 \leq (a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \dots + \frac{n^2}{a_n} \right)$$

4. a) Utiliser le résultat précédent pour établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{2n+1}{a_1 + \dots + a_n} \leq 4 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k}$$

- En déduire, par sommation : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{a_1 + \dots + a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^N \frac{1}{a_k}$.
- Montrer enfin que la série $\sum \frac{2n+1}{a_1 + \dots + a_n}$ converge puis établir le résultat demandé.

Exercice 24 (ECRICOME 2019)**Partie B**

Pour tout entier n non nul, on note h_n la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x > 0, h_n(x) = f(x^n, 1) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

3. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

4. En déduire que pour tout entier n non nul, l'équation $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.

5. a) Démontrer :

$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1} - 1)}{x^{n+1}}$$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(v_n) \geq 4$.

c) Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.

6. a) Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et montrer : $\ell \geq 1$.

b) En supposant que $\ell > 1$, démontrer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n^n = +\infty$.

En déduire une contradiction.

c) Déterminer la limite de (v_n) .

7. a) Montrer : $\forall n \geq 1, v_n \leq 3$.

b) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function y = h(n,x)` qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel n non nul et un réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ en entrée.

c) Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de v_n par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier $n \geq 1$ en entrée :

```

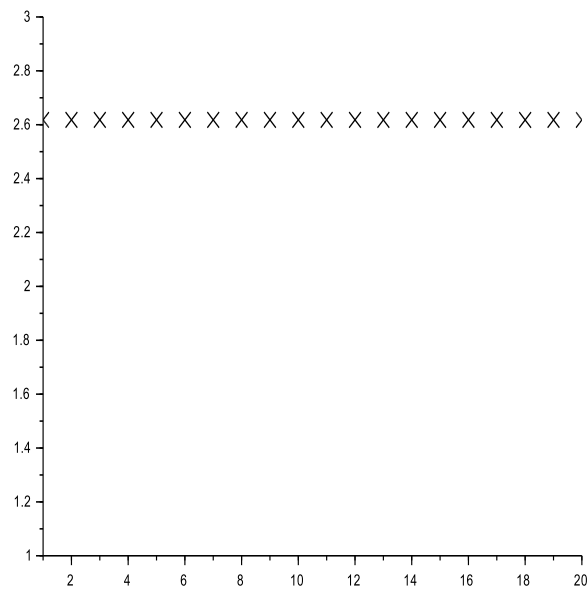
1  function res = v(n)
2      a = 1
3      b = 3
4      while (b-a) > 10 ^ (-5)
5          c = (a+b)/2
6          if h(n,c) < 4 then
7              .....
8          else
9              .....
10         end
11     end
12     .....
13 endfunction

```

d) À la suite de la fonction v , on écrit le code suivant :

```
1 X = 1:20
2 Y = zeros(1,20)
3 for k = 1:20
4     Y(k) = v(k) ^ k
5 end
6 plot2d(X, Y, style=-2, rect=[1,1,20,3])
```

À l'exécution du programme, on obtient la sortie graphique suivante :



Expliquer ce qui est affiché sur le graphique ci-dessus.

Que peut-on conjecturer ?

e) Montrer : $\forall n \geq 1, (v_n)^n = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

f) Retrouver ainsi le résultat de la question 4.c).