Colles

semaine 6 : 04 octobre - 09 octobre

I. Questions de cours

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel et soit A une partie non vide de E.

Que peut-on dire de l'ensemble $\text{Vect}(A)$? (avec démonstration)

Exercice 2

Comparaison séries / intégrales. Énoncé et démonstration.

Exercice 3

1. Par un argument de télescopage, déterminer la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

2. Déterminer la nature de cette série par utilisation d'un théorème de comparaison.

II. Autres exercices

Exercice 4

Soient E un espace vectoriel réel et u_1, u_2, u_3 trois vecteurs de E tels que (u_1, u_2, u_3) forme une famille libre. Soit $v \in E$.

Montrer que : La famille (u_1, u_2, u_3, v) est libre $\Leftrightarrow$ $v \notin \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie.

Soit (e_1, e_2, e_3) une base de E. On pose $u_1 = e_1 - e_2 + e_3$, $u_2 = e_1 - 2e_3$ et $u_3 = 2e_1 - 2e_2 + e_3$.

a. Montrer que (u_1, u_2, u_3) forme une base de E.

b. Déterminer les coordonnées de e_1, e_2 puis de e_3 dans cette nouvelle base (u_1, u_2, u_3).

Exercice 6

On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille (e_1, e_2, e_3, e_4) une famille de quatre vecteurs linéairement indépendants.

a. Que peut-on dire de n ?

b. La famille $(e_1, 2e_2, e_3)$ est-elle libre ?

c. La famille $(3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3)$ est-elle libre ?

d. La famille $(2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1)$ est-elle libre ?

Exercice 7
On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs suivants : $u = (0, 1, 2, 3),\ v = (1, 1, 1, 1),\ w = (1, 1, 1, -4)$.
Soit $P = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$.

1) Le vecteur w appartient-il à $\text{Vect}(u, v)$?

2) Montrer que (u, v, w) est une famille libre.

3) **a.** Montrer que P est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
Déterminer une base de P.

b. Déterminer $P \cap \text{Vect}(u, v)$.

Exercice 8
On considère les vecteurs $u = (1, 0, 2, 3)$, $v = (0, 1, 2, 3)$ et $w = (1, 2, 0, 3)$ de $\mathbb{R}^4$.

a. Peut-on compléter la famille (u, v, w) pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$?

b. Dans l'affirmative, compléter effectivement cette famille pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 9
On considère les vecteurs v_1, v_2, v_3 et v_4 de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définis par :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On note $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

a. La famille $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est-elle une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?

b. La famille $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est-elle une famille génératrice de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?

c. Extraire de la famille $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ une base de F.

Exercice 10
On note $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que $E = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X \right\}$ est un espace vectoriel réel.

b. Déterminer la dimension de E.

Exercice 11

a. Montrer que l'ensemble des matrices symétriques d'ordre 2 à coefficients réels, noté $\mathcal{S}_2((\mathbb{R})$, forme un espace vectoriel réel. Donner la dimension de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

b. Montrer que $\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right)$ forme une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 12

a. Montrer que $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a+b \\ a & c & a+c \\ a & a-b & a-c \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ est un espace vectoriel réel.

b. Déterminer la dimension de E.

Exercice 13

a. Montrer que $E = \left\{ \begin{pmatrix} 2a & b & a-b \\ a+b & b & a \\ a & a & a \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un espace vectoriel réel.

b. Déterminer la dimension de E.

Exercice 14

Soient F et G deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0\}$$

1) Montrer que F et G sont deux espaces vectoriels réels.

2) Déterminer une base de F et une base de G.

3) Déterminer $F \cap G$.

4) Soit un vecteur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

a. Montrer qu'il existe u dans F et v dans G tels que $(a,b,c) = u + v$.

b. Les vecteurs u et v sont-ils uniques ?

Exercice 15

On considère les sous-ensembles $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$.

a. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

b. Déterminer la dimension de F et celle de G.

c. Déterminer $F \cap G$.

d. Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

e. Que peut-on en déduire de $F + G$? En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ différente de la base canonique.

Exercice 16

Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 3z = 0\}$.

a. Montrer que F et G sont deux espaces vectoriels réels.

b. Déterminer une base de F et une base de G.

c. La famille obtenue en réunissant les vecteurs de la base de F et de ceux de la base de G obtenues à la question précédente est-elle une famille libre ?

d. Déterminer l'espace vectoriel $F \cap G$.

Exercice 17

Soit $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n\}$.

a. Montrer que E est un espace vectoriel réel.

b. Montrer que $(\,(2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (1)_{n\in\mathbb{N}}\,)$ forme une famille génératrice de E.

c. En déduire la dimension de E.

Exercice 18

a. Montrer que $(X^2+1, X+1, 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

b. Déterminer les coordonnées de X^2+1 dans cette base.

c. Montrer que l'on peut compléter $(X^2+1, X+1, 1)$ en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
Proposer une telle base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 19

a. Démontrer que $E = \{P(X) \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(1) = 0 \text{ et } P(2) = 0\}$ est un espace vectoriel réel.

b. Déterminer une base de E.

Exercice 20

On considère l'ensemble :

$$E = \left\{ \begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x}\, P(x) \end{array} \mid P \in \mathbb{R}_4[X] \right\}$$

a. Montrer que E est un espace vectoriel réel.

b. Déterminer une base de E.

Exercice 21

Pour chacune des séries suivantes, justifier la convergence de la série et calculer sa somme.

a. $\sum \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n+1}$

b. $\sum n \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n+1}$

c. $\sum \dfrac{n^2}{2^n}$

d. $\sum \dfrac{n^2 + 2^n}{n!}$

e. $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$

f. $\sum \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$

g. $\sum \dfrac{n(n+3)}{3^{n+2}}$

h. $\sum \ln\left(\dfrac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right)$

i. $\sum \dfrac{2n^2 - n + 1}{n!}$

Exercice 22

Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

a. $\sum \dfrac{\ln n}{3^n}$

b. $\sum \dfrac{\ln n}{n^3}$

c. $\sum (-1)^n \dfrac{\ln n}{3^n}$

d. $\sum \dfrac{n^4}{2^n}$

e. $\sum \dfrac{\sqrt{n!}}{(n+2)!}$

f. $\sum \dfrac{n^3}{\mathrm{e}^{n+1}}$

g. $\sum \ln(1 + n\,\mathrm{e}^{-n})$

h. $\sum \dfrac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$

i. $\sum \dfrac{\sqrt{n}\,\ln n}{n+1}$

Exercice 23

a. Démontrer que la fonction $F : x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$.

b. Démontrer que : $\forall k \geqslant 2,\ \displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln(t)\ dt \ \leqslant\ \ln(k)\ \leqslant\ \int_{k}^{k+1} \ln(t)\ dt$.

c. En déduire que : $\forall n \geqslant 2,\ n\ \ln(n) - n\ \leqslant\ \ln(n!)\ \leqslant\ (n+1)\ \ln(n+1) - (n+1)$.

d. En déduire un équivalent simple de $\ln(n!)$.

e. La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{\ln(n!)}{n^3}$ est-elle convergente ?

Exercice 24 *(d'après* `EML - Maths I - 2004`*)*
On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à éléments réels, I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

On considère, pour toute matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles :

$$\begin{aligned} & E_1(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid A\,M = M\} \\ \text{et} \quad & E_2(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^2 M = AM\} \end{aligned}$$

Partie 1

1) Montrer que $E_1\,(A)$ et $E_2\,(A)$ sont des espaces vectoriels réels.

2) ***a.*** Établir : $E_1\,(A) \subset E_2\,(A)$.

b. Montrer que, si A est inversible, alors $E_1\,(A) = E_2\,(A)$.

3) ***a.*** Établir que, si $A - I$ est inversible, alors $E_1\,(A) = \left\{0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\right\}$.

b. Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1\,(B)$ et $E_2\,(B)$.

Partie 2

On considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $F_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid CX = 2X\}$ est un espace vectoriel réel. Déterminer une base de F_2.

2) Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.

3) Calculer la matrice $D = P^{-1}CP$.

4) ***a.*** Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que : $M \in E_1(C) \Leftrightarrow P^{-1}M \in E_1(D)$.

b. Montrer que, pour tout $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $N \in E_1(D)$ si, et seulement si, il existe trois réels a, b, c tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c. En déduire l'expression générale des matrices de $E_1(C)$ et déterminer une base de $E_1(C)$. Quelle est la dimension de $E_1(C)$?

d. Donner l'expression générale des matrices de $E_2(C)$ et déterminer une base de $E_2(C)$. Quelle est la dimension de $E_2(C)$?
A-t-on $E_1(C) = E_2(C)$?

5) ***a.*** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $C^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de la matrice C^n en fonction de n.

Exercice 25 (`EML 2015`)

Partie II : Étude d'une suite

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^3\,\mathrm{e}^x$,
et la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

2. Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3. Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

Partie III : Étude d'une série

4. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{f(n)}$ converge. On note $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{f(n)}$.

5. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| S - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{f(k)} \right| \leqslant \dfrac{1}{(\mathrm{e}-1)\,\mathrm{e}^n}$.

6. En déduire une fonction en **Scilab** qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Exercice 26 (`EML 2016`)
On considère l'application $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0,+\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On admet : $0,\ 69 < \ln(2) < 0,\ 70$.

Partie I : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0,+\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.

3. Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.

4. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
   a) Montrer que C admet une tangente en 0 et préciser celle-ci.
   b) Montrer que C admet un point d'inflexion et un seul, noté I, et préciser les coordonnées de I.
   c) Tracer l'allure de C.

5. Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in [0,+\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

Partie III : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

6. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

7. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

8. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
(on pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto t - \ln(t)$)

9. Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche un entier naturel N tel que $1-u_N < 10^{-4}$.

Exercice 27 (`ESCP 2005`)

1. Quelle est la nature des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n+1}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(n+1)^2}$?

2. Écrire une fonction **Scilab** qui prend en paramètre un entier `n` et renvoie $S_{\mathtt{n}} = \sum\limits_{k=0}^{\mathtt{n}} \dfrac{1}{(k+1)^2}$, somme partielle d'ordre `n` de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

3. On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle.
Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n \ = \ \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k, \quad v_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k, \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante, et que la suite (v_n) est croissante.

b) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n \leqslant u_n$.
En déduire que la suite (u_n) admet une limite s et que la suite (v_n) admet la même limite s.

c) En déduire que la suite (s_n) converge vers s.

4. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n$ est convergente.

5. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente. On note $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$ sa somme.

6. *a)* Établir, pour tout réel t positif et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k \ = \ \frac{1}{1+t} - (-1)^n \, \frac{t^n}{1+t}$$

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \ = \ \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt$$

c) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt \right| \ \leqslant \ \frac{1}{n+1}$$

d) En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$.

Exercice 28 (EML 2021)
On considère la fonction φ définie sur $]-\infty,1]$ par :

$$\forall x \in\,]-\infty,1], \quad \varphi(x) = \begin{cases} x+(1-x)\ln(1-x) & \text{si } x<1 \\ 1 & \text{si } x=1 \end{cases}$$

Partie A : Étude de la fonction φ

1. Montrer que la fonction φ est continue sur $]-\infty,1]$.

2. ***a)*** Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$ et calculer, pour tout $x \in\,]-\infty,1[$, $\varphi'(x)$.

b) En déduire les variations de φ sur $]-\infty,1]$.

c) La fonction φ est-elle dérivable en 1 ?

3. Calculer la limite de φ en $-\infty$.

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de φ en soignant le tracé aux voisinages de 0 et 1.

5. ***a)*** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\ln(t)\,dt$ converge et calculer sa valeur.

b) En déduire : $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \frac{1}{4}$.

Partie B : Étude de deux séries

Soit x un réel appartenant à $[0,1[$.

6. ***a)*** Vérifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $[0,x]$: $\displaystyle\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{t^n}{1-t}$.

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle -\ln(1-x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$.

7. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leqslant \frac{1}{(n+1)(1-x)}$.

En déduire la limite de $\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

8. Montrer alors que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

9. ***a)*** Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.

b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge et que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \varphi(x)$.

10. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et que l'on a encore : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \varphi(1)$.

Exercice 29 (EML 2019)
On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall t \in\,]0,+\infty[,\ \ f(t) = t + \frac{1}{t}$$

PARTIE A : Étude d'une fonction d'une variable

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites en 0 et $+\infty$.

2. Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ vers $[2,+\infty[$.

On note $g : [2,+\infty[\ \to [1,+\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1,+\infty[$.

3. ***a)*** Dresser le tableau de variations de g.

b) Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2,+\infty[$.

c) Soit $y \in [2,+\infty[$. En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in\,]0,+\infty[$. En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y.

PARTIE C : Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2\, u_n} = \frac{1}{n}\, f(n\, u_n)$$

8. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.

9. Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie la valeur de u_n.

```
1 function u=suite(n)
2   u = 1
3   for k = ..................
4     u = .................
5   end
6 endfunction
```

10. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

b) En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$.

c) Calculer, pour tout n supérieur ou égal à 2, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} v_k$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, que l'on ne cherchera pas à déterminer.

11. ***a)*** Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\, dt$.

b) Pour tous entiers n et p tels que $2 \leqslant p < n$, calculer $\sum\limits_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire :

$$0 \ \leqslant\ u_n - u_p \ \leqslant\ \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\, dt$$

c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_2 \leqslant u_n \leqslant 1 + u_2$.
Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2, 3]$.

d) Montrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :

$$0 \ \leqslant\ \ell - u_p \ \leqslant\ \frac{1}{p-1}$$

e) En déduire une fonction **Scilab** qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

Exercice 30 (`EML 1998`)
La fonction logarithme népérien est notée ln .

1. Soit $x \in [-1; 1[$.

a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout t de $[-1; 1[$:

$$\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout t de $[-1; x]$:

$$\left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k \right| \leqslant \frac{|t|^{n+1}}{1-x}$$

c) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\left| -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| \leqslant \frac{1}{(n+2)(1-x)}$$

d) En déduire que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ converge et a pour somme $-\ln(1-x)$.
En particulier, montrer : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k\, 2^k} = \ln(2)$.

e) Écrire un programme **Scilab** qui calcule et affiche une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-3} près.

2. Un joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention du premier pile. S'il lui a fallu n lancers ($n \in \mathbb{N}^*$) pour obtenir ce premier pile, on lui fait alors tirer au hasard un billet de loterie parmi n billets dont un seul est gagnant.
Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

Exercice 31 (EML 2010)
On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application de classe C^2, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x^2)$$

et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
On donne la valeur approchée : $\ln(2) \approx 0,69$.

Partie I : Étude de f et tracé de $\mathcal{C}$

1. ***a)*** Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$.

b) En déduire le sens de variation de f.

c) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.

3. Montrer que $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

4. Tracer $\mathcal{C}$. On utilisera un repère orthonormé d'unité graphique 2 centimètres, et on précisera la tangente à $\mathcal{C}$ en l'origine et en chacun des points d'inflexion.

5. Calculer $\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx$.
A cet effet, on pourra utiliser le changement de variable défini par $t = 1 + x^2$.

Partie II : Étude d'une suite et d'une série associées à f

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

6. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

7. Établir que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.

8. Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche un entier n tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$.

9. ***a)*** Établir : $\forall x \in [0;1],\ f(x) \leqslant x - \dfrac{1}{2}x^2$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 \leqslant 2\,(u_n - u_{n+1})$.

c) Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge.

Exercice 32 `(EDHEC 2018 - voie S)`

1. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $a_n = \dfrac{1}{n\ \ln(n)}$.

a) Montrer : $\forall k \geqslant 2,\ \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t\ \ln(t)}\ dt \ \leqslant\ \frac{1}{k\ \ln(k)}$.

b) En déduire, par sommation, la nature de la série de terme général a_n.

Dans la suite, on considère la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} & \text{si } x \in \,]-\infty, 0[\, \cup\,]0,1[\\[2ex] 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. *a)* Montrer que f est continue sur $]-\infty, 1[$.

b) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

3. *a)* Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0,1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]-\infty, 0[\, \cup\,]0,1[$.

b) Étudier le signe de la quantité $\ln(1-x)+x$, lorsque x appartient à $]-\infty, 1[$, puis en déduire les variations de f.

c) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, puis dresser son tableau de variation.

4. *a)* Établir que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un seul réel de $[0,1[$, noté u_n, tel que $f(u_n) = n$ et donner la valeur de u_1.

b) Montrer que la suite (u_n) converge et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $f\left(1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ puis en déduire qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant 1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

d) En déduire, à l'aide de la première question, que la série de terme général $\dfrac{1}{-n\ln(1-u_n)}$ est divergente.

e) Conclure, en revenant à la définition de u_n, que la série de terme général $1-u_n$ est divergente.

Exercice 33 `(EDHEC 2013 - voie S)`

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum \dfrac{1}{a_n}$ converge.

Le but de cet exercice est de démontrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{n}{a_1 + \ldots + a_n}$ converge également et que, de plus :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \ \leqslant \ 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$$

1. **Étude d'un exemple**

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = n\,(n+1)$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier : $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, puis en déduire que la série $\sum \dfrac{1}{a_n}$ converge et donner sa somme.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer u_n en fonction de n.

c) Établir la convergence de la série $\sum u_n$ et donner sa somme puis établir l'inégalité demandée.

2. **Étude d'un deuxième exemple**

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = n!$.

a) Établir la convergence de la série $\sum \dfrac{1}{a_n}$.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \ \leqslant \ \dfrac{1}{(n-1)!}$.

c) En déduire que la série $\sum u_n$ converge et établir l'inégalité demandée.

On revient maintenant au cas général.

3. `(ADMIS)`
Montrer, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \big(1 + \ldots + n\big)^2 \ \leqslant \ \big(a_1 + \ldots + a_n\big) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \ldots + \frac{n^2}{a_n}\right)$$

4. *a)* Utiliser le résultat précédent pour établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{2n+1}{a_1 + \ldots + a_n} \ \leqslant \ 4 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}$$

b) En déduire, par sommation : $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1 + \ldots + a_n} \ \leqslant \ 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k}$.

c) Montrer enfin que la série $\sum \dfrac{2n+1}{a_1 + \ldots + a_n}$ converge puis établir le résultat demandé.

Exercice 34 (ECRICOME 2019)

Partie B

Pour tout entier n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad h_n(x) \ = \ f(x^n, 1) \ = \ x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

3. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

4. En déduire que pour tout entier n non nul, l'équation $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.

5. *a)* Démontrer :

$$\forall x > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1} - 1)}{x^{n+1}}$$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ h_{n+1}(v_n) \geqslant 4$.

c) Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.

6. *a)* Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et montrer : $\ell \geqslant 1$.

b) En supposant que $\ell > 1$, démontrer : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n^n = +\infty$.
En déduire une contradiction.

c) Déterminer la limite de (v_n).

7. *a)* Montrer : $\forall n \geqslant 1, \ v_n \leqslant 3$.

b) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function y = h(n,x)` qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel n non nul et un réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ en entrée.

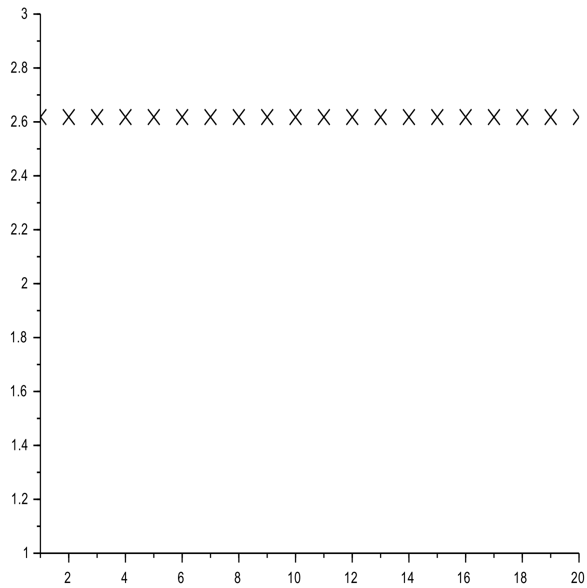
c) Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de v_n par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier $n \geqslant 1$ en entrée :

```
function res = v(n)
  a = 1
  b = 3
  while (b-a) > 10^(-5)
    c = (a+b)/2
    if h(n,c) < 4 then
      ........
    else
      ........
    end
  end
  ..........
endfunction
```

d) À la suite de la fonction `v`, on écrit le code suivant :

```
X = 1:20
Y = zeros(1,20)
for k = 1:20
  Y(k) = v(k) ^k
end
plot2d(X, Y, style=-2, rect=[1,1,20,3])
```

À l'exécution du programme, on obtient la sortie graphique suivante :



Expliquer ce qui est affiché sur le graphique ci-dessus.
Que peut-on conjecturer ?

e) Montrer : $\forall n \geqslant 1,\ (v_n)^n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

f) Retrouver ainsi le résultat de la question ***4.c)***.

Exercice 35 (EDHEC 2020)
On note ${}^tB$ la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire.
On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$, et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère une matrice A fixée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f, qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) \;=\; ({}^tA)\,M + M\,A$$

2. ***a)*** Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.

b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On considère les trois matrices : $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

4. ***a)*** Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.

b) En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathscr{B}$.

c) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ puis en donner une base.

5. ***a)*** Écrire la matrice F de f dans la base $\mathscr{B}$. On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1, 0\}$.

b) En déduire les valeurs propres de f.

c) On note id l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de $f + \mathrm{id}$ et dire si f est ou n'est pas diagonalisable.

Exercice 36 (EML 2020)
On définit, pour tous réels a et b, $M(a,b)$ la matrice carrée d'ordre 4 par :

$$M(a,b) \;=\; \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$$

et on note : $E = \big\{M(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\big\}$.
L'objectif de cet exercice est de déterminer les matrices de E qui sont diagonalisables.

1. ***a)*** Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.
Déterminer une base de E et sa dimension.

b) Le produit de deux matrices quelconques de E appartient-il encore à E ?

2. **Étude du cas** $a = 0$ **et** $b = 0$.
Justifier que la matrice $M(0,0)$ est diagonalisable.

3. **Étude du cas $a \neq 0$ et $b = 0$.**
Soit a un réel non nul. On note A la matrice $M(a, 0)$.

a) Calculer A^2 et déterminer un polynôme annulateur de A.

b) En déduire les valeurs propres de la matrice A et préciser une base de chacun des sous-espaces propres associés.

c) En déduire que la matrice A est diagonalisable. Déterminer une matrice P de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et une matrice D de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.

4. **Étude du cas $a = 0$ et $b \neq 0$.**
Soit b un réel non nul. On note B la matrice $M(0, b)$.

a) Déterminer le rang des matrices B et $B - b\,I_4$, I_4 désignant la matrice identité d'ordre 4.

b) En déduire l'ensemble des valeurs propres de B en précisant la dimension des sous-espaces propres associés.

c) La matrice B est-elle diagonalisable ?

5. **Étude du cas $a \neq 0$ et $b \neq 0$.**
Soient a et b deux réels non nuls. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $M(a, b)$.
On pose :

$$v_1 \ = \ (1,1,1,0), \qquad v_2 \ = \ (0,0,0,1) \qquad \text{et} \qquad T \ = \ \begin{pmatrix} a & a \\ 3b & b \end{pmatrix}$$

a) Montrer que $\text{Ker}(f)$ est de dimension 2 et préciser une base (v_3, v_4) de $\text{Ker}(f)$.

b) Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

c) Déterminer la matrice notée N de l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}'$.

d) Soient λ un réel non nul et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Montrer :

$$\begin{array}{c} X \text{ est un vecteur propre de } N \\ \text{associé à la valeur propre } \lambda \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } T \text{ associé à} \\ \text{la valeur propre } \lambda \\ \text{et} \\ z = t = 0 \end{array} \right.$$

e) On suppose dans cette question **uniquement** que $(a, b) = (1, 1)$.
Déterminer les valeurs propres de T. En déduire que la matrice $M(1, 1)$ est diagonalisable.

f) On suppose dans cette question **uniquement** que $(a, b) = (1, -1)$.
Justifier que T n'admet aucune valeur propre. La matrice $M(1, -1)$ est-elle diagonalisable ?

g) Montrer l'équivalence :

$$M(a, b) \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow \ a^2 + 10\,ab + b^2 > 0$$

Exercice 37 (EDHEC 2019)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathscr{B} = (e_1,\ e_2,\ e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est I.

1. ***a)*** Déterminer $(A - I)^2$.

b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et de A.

2. On pose $A = N + I$.

a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et de N puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.

b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

3. ***a)*** Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur propre de A.

b) En déduire si A est ou n'est pas diagonalisable.

4. On pose $u_1 = (f - \mathrm{id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.

a) Montrer que le rang de $f - \mathrm{id}$ est égal à 1.

b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.

5. ***a)*** Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice T de f dans cette même base.

6. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier l'inversibilité de P puis écrire la relation existant entre les matrices A, T, P et P^{-1}.

7. On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de E est égale à 5.

b) Soit N une matrice quelconque de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :

$$NA = AN \quad \Leftrightarrow \quad \left(P^{-1}NP\right) T \ = \ T \left(P^{-1}NP\right)$$

c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\left(P\,(E_{1,1}+E_{3,3})\,P^{-1}, P\,E_{1,2}\,P^{-1}, P\,E_{1,3}\,P^{-1}, P\,E_{2,2}\,P^{-1}, P\,E_{2,3}\,P^{-1}\right)$.