Colles

semaine 7 : 11 octobre - 16 octobre

I. Questions de cours

Exercice 1
Le rang est une mesure du degré d'indépendance linéaire. Énoncé et démonstration.

Exercice 2
On considère une suite infinie de lancers d'un dé à 6 faces.
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note F_i : « obtenir un 6 au $i^{\text{ème}}$ lancer ».
a) Quelle est la probabilité de n'obtenir que des 6 au cours de l'expérience aléatoire ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir (au moins) un 6 au cours de l'expérience aléatoire ?

Exercice 3
Calcul du rang de la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

II. Autres exercices

Exercice 4
Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie.
Soit (e_1, e_2, e_3) une base de E. On pose $u_1 = e_1 - e_2 + e_3$, $u_2 = e_1 - 2e_3$ et $u_3 = 2e_1 - 2e_2 + e_3$.
a. Montrer que (u_1, u_2, u_3) forme une base de E.
b. Déterminer les coordonnées de e_1, e_2 puis de e_3 dans cette nouvelle base (u_1, u_2, u_3).

Exercice 5
On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille (e_1, e_2, e_3, e_4) une famille de quatre vecteurs linéairement indépendants.
a. Que peut-on dire de n ?
b. La famille $(e_1, 2e_2, e_3)$ est-elle libre ?
c. La famille $(3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3)$ est-elle libre ?
d. La famille $(2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1)$ est-elle libre ?

Exercice 6
On considère les vecteurs v_1, v_2, v_3 et v_4 de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définis par :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On note $F = \text{Vect}\,(v_1, v_2, v_3, v_4)$.
a. La famille $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est-elle une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?
b. La famille $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est-elle une famille génératrice de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?
c. Extraire de la famille $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ une base de F.

Exercice 7
On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs suivants : $u = (0,1,2,3)$; $v = (1,1,1,1)$; $w = (1,1,1,-4)$.
Soit $P = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x+y+z+t = 0\}$.

1. Le vecteur w appartient-il à $\mathrm{Vect}\,(u,v)$?

2. Montrer que (u,v,w) est une famille libre.

3. ***a)*** Montrer que P est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
Déterminer une base de P.

b) Montrer que $P + \mathrm{Vect}\,(u,v) = \mathbb{R}^4$.

c) Déterminer $P \cap \mathrm{Vect}\,(u,v)$.

Exercice 8
On considère les vecteurs $u = (1,0,2,3)$, $v = (0,1,2,3)$ et $w = (1,2,0,3)$ de $\mathbb{R}^4$.

a. Peut-on compléter la famille (u,v,w) pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$?

b. Dans l'affirmative, compléter effectivement cette famille pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 9
On se place dans $\mathbb{R}^2$. Soient $u = (1,2)$, $v = (-1,-2)$, $w = (3,4)$ et $z = (4,6)$.

a. La famille (u,v,w) est-elle libre ?

b. Quelle est la dimension de $\mathrm{Vect}\,(u,v,w)$?

c. La famille (u,v,w,z) est-elle libre ?

d. Quelle est la dimension de l'espace $\mathrm{Vect}\,(u,v,w,z)$?

Exercice 10
On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs suivants : $u = (0,1,2,3)$, $v = (1,1,1,1)$, $w = (1,1,1,-4)$.
Soit $P = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0\}$.

1) Le vecteur w appartient-il à $\mathrm{Vect}\,(u,v)$?

2) Montrer que (u,v,w) est une famille libre.

3) ***a.*** Montrer que P est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
Déterminer une base de P.

b. Déterminer $P \cap \mathrm{Vect}\,(u,v)$.

Exercice 11
On note $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que $E = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X \right\}$ est un espace vectoriel réel.

b. Déterminer la dimension de E.

Exercice 12

a. Montrer que l'ensemble des matrices symétriques d'ordre 2 à coefficients réels, noté $\mathcal{S}_2((\mathbb{R})$, forme un espace vectoriel réel. Donner la dimension de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

b. Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 13

a. Montrer que $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right)$ forme une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Donner les coordonnées de $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ dans cette base, puis les coordonnées de $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$.

Exercice 14

a. Montrer que $E=\left\{\begin{pmatrix}2a&b&a-b\\a+b&b&a\\a&a&a\end{pmatrix}\mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ est un espace vectoriel réel.

b. Déterminer la dimension de E.

Exercice 15

Soient F et G deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y-z=0\big\} \quad\text{et}\quad G=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+y+z=0\big\}$$

1) Montrer que F et G sont deux espaces vectoriels réels.

2) Déterminer une base de F et une base de G.

3) Déterminer $F\cap G$.

4) Soit un vecteur $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

- ***a.*** Montrer qu'il existe u dans F et v dans G tels que $(a,b,c)=u+v$.
- ***b.*** Les vecteurs u et v sont-ils uniques ?

Exercice 16

On considère les sous-ensembles $F=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\big\}$ et $G=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=y=z\big\}$.

a. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

b. Déterminer la dimension de F et celle de G.

c. Déterminer $F\cap G$.

d. Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

e. Que peut-on en déduire de $F+G$? En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ différente de la base canonique.

Exercice 17

Soient $F=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=0\big\}$ et $G=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y-3z=0\big\}$.

a. Montrer que F et G sont deux espaces vectoriels réels.

b. Déterminer une base de F et une base de G.

c. La famille obtenue en réunissant les vecteurs de la base de F et de ceux de la base de G obtenues à la question précédente est-elle une famille libre ?

d. Déterminer l'espace vectoriel $F\cap G$.

Exercice 18

Soit $E=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n\}$.

a. Montrer que E est un espace vectoriel réel.

b. Montrer que $(\,(2^n)_{n\in\mathbb{N}},(1)_{n\in\mathbb{N}}\,)$ forme une famille génératrice de E.

c. En déduire la dimension de E.

Exercice 19

a. Montrer que $(X^2+1, X+1, 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

b. Déterminer les coordonnées de X^2+1 dans cette base.

c. Montrer que l'on peut compléter $(X^2+1, X+1, 1)$ en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
Proposer une telle base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 20

a. Démontrer que $E = \{P(X) \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(1) = 0 \text{ et } P(2) = 0\}$ est un espace vectoriel réel.

b. Déterminer une base de E.

Exercice 21

On considère l'ensemble : $E = \left\{ \begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & e^{-x}\ P(x) \end{array} \mid P \in \mathbb{R}_4[X] \right\}$.

a. Montrer que E est un espace vectoriel réel.

b. Déterminer une base de E.

Exercice 22

Soit K une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ différente de I_n. On note E l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $MK = KM = M$.

1. ***a)*** Montrer que E est une espace vectoriel.

b) Montrer qu'aucune matrice de E n'est inversible.

2. Dans cette question, on pose $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Donner la forme des matrices de E puis déterminer une famille génératrice de E.

b) Retrouver le fait que les matrices de E ne sont pas inversibles.

c) On considère l'ensemble F des matrices de la forme $M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$ avec x, y et z réels.

Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E et donner une famille génératrice de F.

Exercice 23

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et l'ensemble :

$$F = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM - MA = 0\}$$

Montrer que F est un espace vectoriel et que $F = \text{Vect}\,(A, I_2)$.

Exercice 24

Soient a, b et c des réels. On considère les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

et $F = \{M_{a,b,c} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.

2. Exprimer A^2 comme combinaison linéaire de I, A et J, puis montrer que : $F = \text{Vect}\,\big(I, A, A^2\big)$.

3. La famille (I, A, A^2) est-elle libre ?

Exercice 25 (EDHEC 2019)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathscr{B} = (e_1,\ e_2,\ e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est I.

1. ***a)*** Déterminer $(A - I)^2$.

b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et de A.

2. On pose $A = N + I$.

a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et de N puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.

b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

3. ***a)*** Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur propre de A.

b) En déduire si A est ou n'est pas diagonalisable.

4. On pose $u_1 = (f - \mathrm{id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.

a) Montrer que le rang de $f - \mathrm{id}$ est égal à 1.

b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.

5. ***a)*** Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice T de f dans cette même base.

6. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier l'inversibilité de P puis écrire la relation existant entre les matrices A, T, P et P^{-1}.

7. On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que pour tout $(i, j) \in [\![1, 3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de E est égale à 5.

b) Soit N une matrice quelconque de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :

$$NA = AN \quad \Leftrightarrow \quad \left(P^{-1}NP\right)T \;=\; T\left(P^{-1}NP\right)$$

c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\left(P\,(E_{1,1}+E_{3,3})\,P^{-1}, P\,E_{1,2}\,P^{-1}, P\,E_{1,3}\,P^{-1}, P\,E_{2,2}\,P^{-1}, P\,E_{2,3}\,P^{-1}\right)$.

Exercice 26 (EDHEC 2020)
On note ${}^tB$ la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire.
On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$, et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère une matrice A fixée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f, qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) \ = \ ({}^tA)\, M + M\, A$$

2. ***a)*** Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.

b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On considère les trois matrices : $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

4. ***a)*** Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.

b) En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathscr{B}$.

c) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ puis en donner une base.

5. ***a)*** Écrire la matrice F de f dans la base $\mathscr{B}$. On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1, 0\}$.

b) En déduire les valeurs propres de f.

c) On note id l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de $f + \mathrm{id}$ et dire si f est ou n'est pas diagonalisable.

Exercice 27 (EDHEC 2021)
On considère un nombre réel a élément de $]0, 1[$ et l'endomorphisme f_a de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix}$.

1. ***a)*** Donner les valeurs propres de M_a.

b) Déterminer les sous espaces propres associés à ces valeurs propres.

c) En déduire que M_a n'est pas diagonalisable.

2. On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on note E l'espace vectoriel engendré par I, M_a et M_a^2.

a) Quelle est la dimension de E ?

b) On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $J\,K^2$ puis en déduire $(M_a - I)\,(M_a - aI)^2$.

c) En déduire que M_a^3 appartient à E.

3. ***a)*** Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un unique triplet de réels (u_n, v_n, w_n) tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_a^n \; = \; u_n\, M_a^2 + v_n\, M_a + w_n\, I$$

On donnera les valeurs de u_0, v_0 et w_0 et on écrira les relations liant u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1} à u_n, v_n et w_n.

b) En utilisant les relations précédentes, expliquer pourquoi le script **Scilab** qui suit ne permet pas de calculer et d'afficher les valeurs de u_n, v_n et w_n lorsque n et a sont entrés par l'utilisateur. On pourra examiner attentivement la boucle « for ».

```
n = input('entrez une valeur pour n : ')
a = input('entrez une valeur pour a : ')
u = 0
v = 0
w = 1
for k = 1:n
u = (2 * a + 1) * u + v
v = -a * (a + 2) * u + w
w = a * a * u
end
disp(w, v, u)
```

c) Modifier la boucle de ce script en conséquence.

4. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = (2a+1)\,u_{n+2} - a\,(a+2)\,u_{n+1} + a^2\,u_n$.

On **admet** que l'on peut en déduire u_n, pour tout entier naturel n, sous la forme :

$$u_n \; = \; \frac{(n-1)\,a^n - n\,a^{n+1} + 1}{(a-1)^2}$$

5. On dit qu'une suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers la matrice A lorsque n tend vers $+\infty$ si chaque coefficient de A_n tend vers le coefficient situé à la même place dans A. Il en résulte (et on admet ce résultat) :

$$\lim_{n\to+\infty} M_a^n = \left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) M_a^2 + \left(\lim_{n\to+\infty} v_n\right) M_a + \left(\lim_{n\to+\infty} w_n\right) I$$

a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

b) En déduire la limite L_a lorsque n tend vers $+\infty$, de la suite $(M_a^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Vérifier : $L_a^2 = L_a$.

6. On note φ_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est L_a.
Démontrer :

a) $\forall x \in \mathrm{Ker}\,(f_a - \mathrm{id})$, $\varphi_a(x) = x$.

b) $\forall x \in \mathrm{Im}\,(f_a - \mathrm{id})$, $\varphi_a(x) = 0$.

Exercice 28 *(d'après* `EML 2004`*)*
On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à éléments réels, I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

On considère, pour toute matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles :

$$\begin{aligned} & E_1(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid A\,M = M\} \\ \text{et} \quad & E_2(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^2M = AM\} \end{aligned}$$

Partie 1

1) Montrer que $E_1\,(A)$ et $E_2\,(A)$ sont des espaces vectoriels réels.

2) ***a.*** Établir : $E_1\,(A) \subset E_2\,(A)$.

b. Montrer que, si A est inversible, alors $E_1\,(A) = E_2\,(A)$.

3) ***a.*** Établir que, si $A - I$ est inversible, alors $E_1\,(A) = \left\{0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\right\}$.

b. Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1\,(B)$ et $E_2\,(B)$.

Partie 2
On considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $F_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid CX = 2X\}$ est un espace vectoriel réel. Déterminer une base de F_2.

2) Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.

3) Calculer la matrice $D = P^{-1}CP$.

4) ***a.*** Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que : $M \in E_1(C) \Leftrightarrow P^{-1}M \in E_1(D)$.

b. Montrer que, pour tout $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $N \in E_1(D)$ si, et seulement si, il existe trois réels a, b, c tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c. En déduire l'expression générale des matrices de $E_1(C)$ et déterminer une base de $E_1(C)$. Quelle est la dimension de $E_1(C)$?

d. Donner l'expression générale des matrices de $E_2(C)$ et déterminer une base de $E_2(C)$. Quelle est la dimension de $E_2(C)$?
A-t-on $E_1(C) = E_2(C)$?

5) ***a.*** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $C^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de la matrice C^n en fonction de n.

Exercice 29 (EML 2018)
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère également l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ g(x, y, z) = (x + y - z,\ 2y,\ -x + y + z)$$

Enfin, on pose :

$$u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0) \quad \text{et} \quad v = f(e_1) + e_1$$

1. ***a)*** Calculer v.

b) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathcal{C}$.
Expliciter la matrice P et calculer P^{-1}.

2. ***a)*** Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{C}$.

b) En déduire les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

c) L'endomorphisme f est-il bijectif ?

d) Expliciter, sans justification, le lien entre les matrices A, A', P et P^{-1}.

3. ***a)*** Déterminer la matrice B de g dans la base $\mathscr{B}$.

b) Montrer : $B^2 = 2\,B$.

c) En déduire les valeurs propres de g, ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre.

d) L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

On pose : $\mathcal{E} = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MA\}$.

4. ***a)*** Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.

b) Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{E}$.
Montrer que M n'est pas inversible. *(On pourra raisonner par l'absurde).*

5. On cherche à montrer que $\mathcal{E}$ n'est pas réduit à l'ensemble $\{0\}$.

a) Justifier que, pour tout réel λ, les matrices $A - \lambda\,I_3$ et $({}^tA) - \lambda\,I_3$ ont même rang, la matrice I_3 désignant la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

b) En déduire que la matrices B et ${}^tA$ admettent une valeur propre en commun, notée α.

c) Soient X un vecteur propre de B associé à la valeur propre α, et Y un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre α. On note : $N = X\,{}^tY$.
Montrer que la matrice N est non nulle et que N appartient à $\mathcal{E}$.

d) En déduire : $\dim(\mathcal{E}) \geqslant 2$.

Exercice 30 (EML 2020)
On définit, pour tous réels a et b, $M(a,b)$ la matrice carrée d'ordre 4 par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$$

et on note : $E = \{M(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.
L'objectif de cet exercice est de déterminer les matrices de E qui sont diagonalisables.

1. *a)* Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.
Déterminer une base de E et sa dimension.

b) Le produit de deux matrices quelconques de E appartient-il encore à E ?

2. **Étude du cas** $a = 0$ **et** $b = 0$.
Justifier que la matrice $M(0,0)$ est diagonalisable.

3. **Étude du cas** $a \neq 0$ **et** $b = 0$.
Soit a un réel non nul. On note A la matrice $M(a,0)$.

a) Calculer A^2 et déterminer un polynôme annulateur de A.

b) En déduire les valeurs propres de la matrice A et préciser une base de chacun des sous-espaces propres associés.

c) En déduire que la matrice A est diagonalisable. Déterminer une matrice P de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et une matrice D de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.

4. **Étude du cas** $a = 0$ **et** $b \neq 0$.
Soit b un réel non nul. On note B la matrice $M(0,b)$.

a) Déterminer le rang des matrices B et $B - b\,I_4$, I_4 désignant la matrice identité d'ordre 4.

b) En déduire l'ensemble des valeurs propres de B en précisant la dimension des sous-espaces propres associés.

c) La matrice B est-elle diagonalisable ?

5. **Étude du cas** $a \neq 0$ **et** $b \neq 0$.
Soient a et b deux réels non nuls. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $M(a,b)$.
On pose :

$$v_1 = (1,1,1,0), \qquad v_2 = (0,0,0,1) \qquad \text{et} \qquad T = \begin{pmatrix} a & a \\ 3b & b \end{pmatrix}$$

a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 2 et préciser une base (v_3, v_4) de $\mathrm{Ker}(f)$.

b) Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

c) Déterminer la matrice notée N de l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}'$.

d) Soient λ un réel non nul et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Montrer :

$$X \text{ est un vecteur propre de } N \text{ associé à la valeur propre } \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } T \text{ associé à} \\ \text{la valeur propre } \lambda \\ \text{et} \\ z = t = 0 \end{array} \right.$$

e) On suppose dans cette question **uniquement** que $(a, b) = (1, 1)$.
Déterminer les valeurs propres de T. En déduire que la matrice $M(1, 1)$ est diagonalisable.

f) On suppose dans cette question **uniquement** que $(a, b) = (1, -1)$.
Justifier que T n'admet aucune valeur propre. La matrice $M(1, -1)$ est-elle diagonalisable ?

g) Montrer l'équivalence : $M(a, b)$ est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $a^2 + 10\,ab + b^2 > 0$

Exercice 31 (ECRICOME 2016)

Partie A

Pour tout couple de réels (x, y), on définit la matrice $M(x, y)$ par :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}$$

On appelle E l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où x et y décrivent $\mathbb{R}$:

$$E = \{M(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

On note $A = M(1, 0)$ et $B = M(0, 1)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
En déterminer une base et donner sa dimension.

2. Montrer que 1, 2 et 3 sont valeurs propres de A et déterminer les espaces propres associés.
A est-elle diagonalisable ?

3. Déterminer une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et telle que :

$$A = PD_AP^{-1}, \quad \text{où} \quad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Déterminer P^{-1} (faire figurer le détail des calculs sur la copie).

5. En notant X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs colonnes formant la matrice P, calculer BX_1, BX_2 et BX_3. En déduire l'existence d'une matrice diagonale D_B que l'on explicitera telle que :

$$B = PD_BP^{-1}$$

6. En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x, y)$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$M(x,y) = PD(x,y)P^{-1}$$

7. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) pour que $M(x, y)$ soit inversible.

8. Montrer que B^2 est un élément de E. La matrice A^2 est-elle aussi un élément de E ?

Exercice 32 (ECRICOME 2020)
Dans cet exercice, on désigne par $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3, et on note I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Soit a un réel ; on pose $M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie A : Étude du cas où $a = 1$

Dans toute cette partie, on suppose que $a = 1$.

1. Expliciter la matrice M, puis calculer $(M - I_3)^2$.

2. En déduire l'unique valeur propre possible de M.

3. La matrice M est-elle inversible ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie B : Étude du cas où $a = 0$

Dans cette partie, on suppose que $a = 0$.

4. Démontrer que 1 est une valeur propre de M, et donner une base et la dimension du sous-espace propre associé.

5. Démontrer que M n'est pas inversible.

6. En utilisant les deux questions précédentes, déterminer l'ensemble des valeurs propres de M, et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie C : Étude du cas où a est différent de 0 et de 1

Dans cette partie, on suppose que a est différent de 0 et de 1.
On pose $E = \mathbb{R}^3$, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice M.
Soit $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 0)$.

7. Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de E.

8. Calculer $f(u)$, $f(v)$.

9. Calculer $f(w)$ et trouver deux réels α et β tels que $f(w) = \alpha v + \beta w$.

10. Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$, que l'on notera T.

11. En déduire l'ensemble des valeurs propres de M, et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 33 (ECRICOME 2021)
Soit $E = \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
On note I_3 la matrice identité de E et 0_3 la matrice nulle de E.
Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices M de E vérifiant l'égalité :

$$M\,(M+I_3)\,(M+2\,I_3) \ = \ 0_3$$

Partie A : Exemple de matrices appartenant à $\mathscr{A}$

1. Déterminer l'ensemble des réels α tels que : $\alpha\, I_3 \in \mathscr{A}$.

2. L'ensemble $\mathscr{A}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

3. On note $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $B\,X_1$ et $B\,X_2$.

b) En déduire deux valeurs propres de B.
Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres associés.

c) Démontrer que B est diagonalisable, et expliciter une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que : $B = PDP^{-1}$.

d) Démontrer que $D \in \mathscr{A}$, puis que $B \in \mathscr{A}$.

4. Plus généralement, on suppose que M est une matrice de E diagonalisable, que le spectre de M soit inclus dans $\{0, -1, -2\}$.
Démontrer : $M \in \mathscr{A}$.

Partie B : Diagonalisabilité des matrices de $\mathscr{A}$

Soit M une matrice appartenant à $\mathscr{A}$. On note $\mathrm{Sp}(M)$ le spectre de M.

5. Déterminer un polynôme annulateur de M, et démontrer que le spectre de M est inclus dans $\{0, -1, -2\}$.

6. On suppose dans cette question que M admet 0, -1 et -2 comme valeurs propres.
Justifier que M est diagonalisable.

7. *a)* On suppose dans cette question que -1 est l'unique valeur propre de M.
Justifier que M et $M + 2\,I_3$ sont inversibles, puis démontrer : $M = -I_3$.

b) Que peut-on dire de M si $\mathrm{Sp}(M) = \{-2\}$? Si $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$?

8. On suppose dans cette question que M n'admet aucune valeur propre.
Justifier que les matrices M, $M + I_3$ et $M + 2\,I_3$ sont inversibles. Aboutir à une contradiction.

Exercice 34 `ORAL ESCP 2018 - 2.07`

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

  On dit que $X \geqslant 0$ (resp. $X > 0$) si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \geqslant 0$ (resp. $x_i > 0$).
- Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

  On dit que $A \geqslant 0$ (resp. $A > 0$) si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$ (resp. $a_{i,j} > 0$).
- Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices défini par : $\mathcal{E} = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ inversible et } A^{-1} \geqslant 0\}$.

1. On suppose que $A \in \mathcal{E}$. Montrer que $\{X \in \mathbb{R}^n \mid AX \geqslant 0\} \subseteq \{X \in \mathbb{R}^n \mid X \geqslant 0\}$.

2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\{X \in \mathbb{R}^n \mid AX \geqslant 0\} \subseteq \{X \in \mathbb{R}^n / X \geqslant 0\}$.

a) On suppose que $AX = 0$. Montrer que $X = 0$. En déduire que A est inversible.

b) En utilisant la base canonique de $\mathbb{R}^n$, montrer que $A^{-1} \geqslant 0$.

3. Soit B la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$

et $A = 2I_n - B$, où I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = AX$. En posant $x_0 = x_{n+1} = 0$, montrer que si $Y \geqslant 0$, alors $X \geqslant 0$.

(on pourra considérer $a = \min\limits_{0 \leqslant i \leqslant n+1} x_i$ et montrer que $a = 0$)

b) En déduire que la matrice A appartient à $\mathcal{E}$.

Exercice 35 `ORAL ESCP 2018 - 2.09`

Soit un entier $n \geqslant 2$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ fixés, on pose : $\Gamma_k = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^k M = A^{k-1} M\}$.

1. Montrer que l'ensemble Γ_k est un espace vectoriel.

2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\Gamma_k \subset \Gamma_{k+1}$.

3. Dans cette question *uniquement*, on prend $n = 3$ et on choisit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer Γ_1, Γ_2, et Γ_3.

4. On revient au cas général où $n \geqslant 2$.

a) Montrer que si A est inversible, alors $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

b) Étudier la réciproque.

On pourra s'intéresser à une matrice M dont toutes les colonnes valent X où X est un vecteur tel que $AX = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

5. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $u_k = \dim\big(\Gamma_k\big)$.

Montrer que la suite (u_k) est croissante et qu'il existe un unique entier p tel que :

$$\forall k < p,\ u_k < u_{k+1} \quad \text{et} \quad \forall k \geqslant p,\ u_k = u_p$$

6. Montrer que si A est diagonalisable et admet 0 pour valeur propre, alors $p = 2$.