Colles

semaine 8 : 18 octobre - 23 octobre

I. Questions de cours

Exercice 1
On considère une urne contenant 5 boules rouges et 8 boules blanches.
On effectue 3 tirages successifs et sans remise dans l'urne.
Déterminer la probabilité d'obtenir 3 boules blanches.

Exercice 2
Démontrer la formule des probabilités totales.

Exercice 3
On considère une suite infinie de lancers d'un dé à 6 faces.
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note F_i : « obtenir un 6 au $i^{\text{ème}}$ lancer ».

a) Quelle est la probabilité de n'obtenir que des 6 au cours de l'expérience aléatoire ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir (au moins) un 6 au cours de l'expérience aléatoire ?

II. Autres exercices

Exercice 4
Une urne contient initialement v boules vertes et r boules rouges.
On effectue une série de tirages de la façon suivante. On choisit une boule au hasard dans l'urne.

- Si cette boule est verte, on la remet dans l'urne.
- Si elle est rouge, on la remplace par une boule verte.

On procède ainsi pour tous les tirages suivants.

1. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on note R_j l'événement : « on obtient une boule rouge au $j^{\text{ème}}$ tirage », et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n l'événement « on obtient pour la première fois une boule verte au $n^{\text{ème}}$ tirage ». Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Exprimer l'événement A_n en fonction d'événements des familles $(R_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\overline{R_k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

   b) Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.

2. Pour tout $s \in \mathbb{N}$, on note B_s l'événement : « il reste s boules rouges dans l'urne lorsque l'on obtient la première boule verte ».

   a) Calculer $\mathbb{P}(B_0)$.

   b) On pose $N = v + r$ (c'est le nombre de boules initialement contenue dans l'urne).
   Montrer que : $\forall s \in [\![0, r]\!],\ \mathbb{P}(B_s) = \frac{r!}{N^r}\ \left(\frac{N^s}{s!} - \frac{N^{s-1}}{(s-1)!}\right)$.

   c) Vérifier par le calcul : $\sum\limits_{s=0}^{r} \mathbb{P}(B_s) = 1$.

Exercice 5

Une marque de restauration rapide offre un jouet dans chaque menu. La nouvelle collection est constituée de 4 figurines représentant les personnages d'un film à gros budget.
Un collectionneur souhaite obtenir la collection en entier. On suppose les achats indépendants et on suppose que les figurines sont distribués de manière uniforme dans les menus.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \{1;2;3;4\}$, on note $A_{i,n}$ l'événement « le collectionneur n'a toujours pas obtenu la figurine n° i au bout de n achats ». Calculer $\mathbb{P}(A_{i,n})$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la probabilité qu'au bout de n achats de menus, il manque toujours au moins une figurine au collectionneur est : $p_n = 4\left(\frac{3}{4}\right)^n - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

c. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de menus que le colectionneur a acheté lorsqu'il a, pour la première fois, obtenu toutes les figurine.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\mathbb{P}([X > n])$ à l'aide la probabilité p_n.

d. En déduire que X admet une espérance, et la calculer.

Exercice 6

Soit T une v.a.r. à valeurs entières définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On suppose :

× pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([T \geqslant n]) > 0$.

× pour tout $n, p \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}_{[T \geqslant n]}([T \geqslant n+p]) = \mathbb{P}([T \geqslant p])$.

Montrer que T suit une loi géométrique.

Exercice 7

1. Considérons n personnes, quelle est la probabilité notée $p(n)$ d'avoir au moins deux personnes nées le même jour de l'année ? Pour simplifier, toutes les années sont non-bissextiles.

2. En utilisant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$, montrer :
$$p(n) \geqslant 1 - \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2 \times 365}\right)$$

3. En déduire le nombre de personnes nécessaires pour avoir une chance sur deux que deux personnes aient leurs anniversaires le même jour.

Exercice 8

Trois personnes a_1, a_2, a_3 entrent à l'instant 0 dans un bureau de poste qui ne comporte que deux guichets. Les personnes a_1 et a_2 peuvent être servies immédiatement alors que a_3 doit attendre qu'un guichet soit libéré pour être servie. On supposera que le temps est mesuré par des nombres entiers avec une unité fixée.
Soit $p \in \,]0,1[$. On suppose que pour $i \in \{1,2,3\}$ le temps de service de la personne a_i est une variable aléatoire X_i dont la loi est donnée par :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_i = k]) = (1-p)\, p^k$$
On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes.
On désigne par Y l'instant de première sortie (celle de a_1 ou a_2) qui est aussi l'instant où a_3 commence à se faire servir. Enfin, Z désigne l'instant de sortie de a_3.

1. Exprimer l'événement $[Y \geqslant k]$ à l'aide des variables aléatoires X_1 et X_2.
Calculer pour tout entier $k \geqslant 0$, le nombre $\mathbb{P}([Y \geqslant k])$. Déterminer alors la loi de Y.

2. Exprimer Z en fonction de Y et X_3. Déterminer la loi de Z.

3. Calculer le temps moyen passé par a_3 à la poste.

Exercice 9

On considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par P_n l'événement « Pile apparaît au $n^{\text{ème}}$ lancer » et par F_n l'événement « Face apparaît au $n^{\text{ème}}$ lancer ».

Soit Y la v.a.r. désignant le rang du lancer où, pour la première fois, apparaît un Face précédé d'au moins deux Pile si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si cette configuration n'apparaît jamais.

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

On pose $c_1 = c_2 = 0$ et pour tout $n \geqslant 3$, $c_n = \mathbb{P}([Y = n])$. On note également :

$$\forall n \geqslant 3,\ B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n \quad \text{et} \quad U_n = \bigcup_{i=3}^{n} B_i$$

On pose enfin $u_1 = u_2 = 0$ et pour tout $n \geqslant 3$, $u_n = \mathbb{P}(U_n)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$ est monotone et convergente.

2. ***a)*** Pour tout $n \geqslant 3$, calculer $\mathbb{P}(B_n)$.

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, les événements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.

c) Calculer les valeurs de u_3, u_4 et u_5.

3. Dans cette question, on suppose $n \geqslant 5$.

a) Comparer les événements $U_n \cap B_{n+1}$ et $U_{n-2} \cap B_{n+1}$. Préciser leurs probabilités respectives.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

d) Calculer $\mathbb{P}([Y = 0])$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = 1 - u_n$.

a) Trouver $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \beta v_{n+2} + \gamma v_{n+3}$.

b) Montrer que la série de terme général v_n est convergente et calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Exercice 10

Un canal de transmission transmet des bits avec erreur selon le modèle suivant : il transmet fidèlement un bit avec probabilité p et de façon erronée avec probabilité $1 - p$ avec $p \in [0, 1]$. On considère n canaux en série, et que chaque canal fonctionne indépendamment des autres. On note X_k le bit reçu en sortie du $k^{\text{ème}}$ canal et X_0 le bit à l'entrée du premier canal.

On désire calculer la probabilité qu'au bout des n canaux, le signal reste inchangé.

1. Que vaut $\mathbb{P}_{[X_k=0]}([X_{k+1} = 1])$ et $\mathbb{P}_{[X_k=1]}([X_{k+1} = 1])$?

2. Posons $A_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 1]) \\ \mathbb{P}([X_n = 0]) \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Montrer que $A_{n+1} = M A_n$.

3. On admet que $M = P^{-1} D P$ où P et D sont deux matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définies par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}$$

En déduire la probabilité qu'un bit soit fidèlement transmis au bout de n canaux.

Que dire à la limite ?

Exercice 11
On considère un dé à 6 faces, que l'on lance une infinité de fois. Une face est rouge et les 5 autres faces sont bleues. On écrit sous forme d'une suite les résultats successifs obtenus, par exemple $BRRBBBRRRBRBRRR$. (B signifiant bleu et R rouge).
On s'intéresse à la première série de nombres obtenus, c'est-à-dire la première série constituée uniquement de B si on obtient un B au premier lancer, ou la première série constituée uniquement de R si on obtient un R au premier lancer.
Par exemple :

1. $BBBRBR\dots$: la première série est BBB.

2. $RBRBBBRBB\dots$: la première série est réduite à R.

3. $RRRRRRRRRBR\dots$: la première série est $RRRRRRRR$.

On appelle X la variable aléatoire correspondant à la longueur de la première série.
Déterminer la loi de X et l'espérance de X.

Exercice 12
N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Un joueur lance une pièce équilibrée indéfiniment. On note X_N la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de fois où, au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs ont été différents. On peut appeler X_N le « nombre de changements » au cours de N premiers lancers.
Par exemple, si les $N = 9$ premiers lancers ont donné successivement :
Pile, Pile, Face, Pile, Face, Face, Face, Pile, Pile, alors la variable X_9 aura pris la valeur 4 (quatre changements aux 3$^{\text{ème}}$, 4$^{\text{ème}}$, 5$^{\text{ème}}$ et 8$^{\text{ème}}$ lancers).

1. Justifier que $X_N(\Omega) = [\![0, N-1]\!]$.

2. Déterminer la loi de X_2, ainsi que son espérance. Déterminer la loi de X_3.

3. Montrer : $\mathbb{P}([X_N = 0]) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{N-1}$ et $\mathbb{P}([X_N = 1]) = 2(N-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{N}$.

4. ***a)*** Justifier que pour tout entier $k \in [\![0, N-1]\!]$, $\mathbb{P}_{[X_N=k]}([X_{N+1} = k]) = \dfrac{1}{2}$.

b) En déduire que pour tout entier $k \in [\![0, N-1]\!]$:

$$\mathbb{P}\left([X_{N+1} - X_N = 0] \cap [X_N = k]\right) = \frac{1}{2}\mathbb{P}([X_N = k])$$

c) En sommant cette relation pour k variant de 0 à $N-1$, montrer :

$$\mathbb{P}\left([X_{N+1} - X_N = 0]\right) = \frac{1}{2}$$

d) Montrer que la variable $X_{N+1} - X_N$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
En déduire la relation $\mathbb{E}(X_{N+1}) = \dfrac{1}{2} + \mathbb{E}(X_N)$, puis donner $\mathbb{E}(X_N)$ en fonction de N.

5. ***a)*** Montrer grâce aux résultats ***4.b)*** et ***4.c)*** que les variables $X_{N+1} - X_N$ et X_N sont indépendantes.

b) En déduire par récurrence sur N que X_N suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(N-1, \dfrac{1}{2}\right)$.
En déduire la variance $\mathbb{V}(X_N)$.

Exercice 13
Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On effectue des tirages successifs d'un jeton avec remise. X est la v.a.r. égale au rang du premier tirage qui amène, pour la première fois, un jeton différent des jetons tirés précédemment.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note A_i : « le jeton numéro i est obtenu au premier tirage ».

1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, calculer $\mathbb{P}_{A_i}\big([X = k] \big)$.

2. En appliquant la formule des probabilités totales, déterminer la loi de X.

3. Déterminer la loi de $Y = X - 1$. La reconnaître et en déduire sans calculs $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 14

1. On effectue une succession (infinie) de lancers d'un dé équilibré.
On note X le rang du premier 1 obtenu.
   a) Rappeler la loi de X, son espérance et sa variance.
   b) Calculer $\mathbb{P}([X \leqslant k])$ puis $P([X > k])$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2. On effectue une succession (infinie) de lancers d'un dé à 6 faces équilibré.
On note Y_n le rang d'apparition du $n^{\text{ème}}$ 1 obtenu.
Pour tout $M \in \mathbb{N}^*$, on note également C_M la variable aléatoire égale au nombre de 1 obtenus au cours des M premiers lancers.
   a) Déterminer la loi de C_M.
   b) Soit $k \geqslant n$, exprimer l'événement $[Y_n = k]$ à l'aide de la variable aléatoire C_{k-1} et de l'événement A_k : « obtenir la face 1 au $k^{\text{ème}}$ lancer ».
   c) En déduire la loi de Y_n.

Exercice 15

1. On considère une v.a.r. X telle que : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
Déterminer l'espérance de la v.a.r. $Y = (-1)^X$.

2. On considère une v.a.r. X telle que : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.
Déterminer l'espérance de la v.a.r. $Y = \dfrac{1}{X+1}$.

Exercice 16

1. On effectue une succession (infinie) de lancers d'un dé équilibré. On note X le rang du premier 1 obtenu.
   a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   b) Calculer $\mathbb{P}([X \leqslant k])$ puis $P([X > k])$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2. On effectue une succession (infinie) de lancers d'un dé à 6 faces équilibré.
On note Y_n le rang d'apparition du $n^{\text{ème}}$ 1 obtenu.
On note également C_M la variable aléatoire égale au nombre de 1 obtenus au cours des M premiers lancers.
   a) Déterminer la loi de C_M.
   b) Soit $k \geqslant n$, exprimer l'événement $[Y_n = k]$ à l'aide de la variable aléatoire C_{k-1} et de l'événement A_k : « obtenir la face 1 au $k^{\text{ème}}$ lancer ».
   c) En déduire la loi de Y_n.

Exercice 17
Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On effectue des tirages successifs d'un jeton avec remise. X est la v.a.r. égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois deux numéros distincts.
On note A_i : « le jeton numéro i est obtenu au premier tirage ».

1. Calculer $\mathbb{P}_{A_i}([X = k])$.

2. En appliquant la formule des probabilités totales, déterminer la loi de X.

3. Déterminer la loi de $Y = X - 1$. La reconnaître et en déduire sans calculs $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 18
Soit p un réel appartenant à l'intervalle ouvert $]0; 1[$. On note $q = 1 - p$.
On dispose dans tout l'exercice d'une même pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut p.
On procède à l'expérience consistant en succession illimitée de lancers de la pièce. On note :

× pour tout entier naturel non nul n, X_n la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n premiers lancers de la pièce ;

× pour tout entier naturel non nul j, F_j : « La pièce donne FACE lors du j-ième lancer » ;

× Y la v.a.r. égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du second PILE.

Par exemple, si les lancers ont donné dans cet ordre :

FACE, PILE, FACE, FACE, FACE, PILE

alors Y prend la valeur 4.

1. Soit n un entier naturel non nul.

a) Donner la loi de X_n.

b) Préciser la valeur de son espérance $\mathbb{E}(X_n)$ et de sa variance $\mathbb{V}(X_n)$.

2. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire Y.

3. Donner les valeurs des probabilités :

$$\mathbb{P}([Y = 0]), \quad \mathbb{P}([Y = 1]) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Y = 2])$$

4. Soit n un entier naturel. Comparer les événements :

$$[Y = n] \quad \text{et} \quad [X_{n+1} = 1] \cap \overline{F_{n+2}}$$

5. Prouver :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y = n]) = (n + 1)p^2 q^n$$

6. Vérifier par le calcul :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = n]) = 1$$

7. Démontrer que la variable aléatoire Y possède une espérance $\mathbb{E}(Y)$ et donner sa valeur.

8. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note Y_k la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du $k^{\text{ème}}$ PILE. En particulier, on a $Y_2 = Y$.
En généralisant la méthode utilisée dans les questions précédentes, déterminer la loi de Y_k.

Exercice 19

Toutes les v.a.r. de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Soit $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. mutuellement indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

Soit N une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des U_i et X et Y les v.a.r. définies par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} U_i(\omega) \qquad \text{et} \qquad Y = N - X$$

1. Vérifier que pour tout $(\ell, k) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}\big([X = k] \cap [Y = \ell] \big) = \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell\, \mathbb{P}\big([N = k+\ell] \big)$.

2. On suppose que N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

a) Déterminer la loi de X.

b) Montrer que les v.a.r. X et Y sont indépendantes.

3. On suppose que X et Y sont indépendantes et que N prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose également : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big([X = k] \big) \neq 0$ et $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big([Y = \ell] \big) \neq 0$.

a) Vérifier que pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$:

$$(k+1)\ \mathbb{P}\big([X = k+1] \big)\mathbb{P}\big([Y = \ell] \big)\ (1-p) \ = \ (\ell+1)\ \mathbb{P}\big([X = k] \big)\mathbb{P}\big([Y = \ell+1] \big)\ p$$

b) En déduire la loi suivie par X puis celle suivie par Y.

c) Justifier que N suit une loi de Poisson. Préciser son paramètre.

Exercice 20

Une pièce truquée donne Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q = 1-p$.

On propose l'expérience suivante pour « rééquilibrer » la pièce.

- L'expérience est constituée d'une suite de parties consécutives.
- Chaque partie consiste à lancer la pièce *deux fois de suite.*
  - × Si à l'issue d'une partie on obtient deux fois le même résultat (2 Pile ou 2 Face), on refait une partie ;
  - × Si à l'issue d'une partie on obtient deux résultats différents, alors on arrête l'expérience et on rend le résultat du dernier lancer.
- L'expérience est modélisée à l'aide d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Soit T la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour que l'expérience se termine.

1. Écrire un script **Scilab** qui simule la variable aléatoire T.

2. Donner l'ensemble des valeurs prises par T. En déduire $\mathbb{P}\big([T = 2k+1] \big)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

3. *a)* Calculer $\mathbb{P}\big([T = 2k]\big)$, pour $k \in \mathbb{N}$ (on pourra s'intéresser à l'événement $A = [X_1 = X_2]$, où X_1 et X_2 sont les v.a.r. donnant respectivement le résultat du 1^{er} et du $2^{\text{ème}}$ lancer.

b) En déduire que l'expérience se termine presque sûrement.

c) Calculer l'espérance de T.

4. Soit R la variable aléatoire donnant le résultat de l'expérience. Donner la loi de R.

Exercice 21
Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On rappelle que la fonction de répartition F_X d'une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ (où $\lambda > 0$) est donnée par :

$$F_X \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} 0 & si\ x \in \,]-\infty, 0[\\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & si\ x \in [0, +\infty[\end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. a) On pose : $T = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X). Montrer que la loi de T est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}([T = k]) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right) \left(\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^k$$

b) Quelle est la loi de $T + 1$? En déduire l'espérance et la variance de T.

2. On pose : $Z = X - \lfloor X \rfloor$.
Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z.

Exercice 22
Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0; 1[$ et on note $q = 1 - p$.
On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes deux la même loi géométrique de paramètre p.

1. On pose $Z = \min(X, Y)$ et on admet que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Démontrer, pour tout entier naturel k : $[Z > k] = [X > k] \cap [Y > k]$.

b) Pour tout entier naturel k, calculer $\mathbb{P}([Z > k])$.

c) En déduire que Z suit une loi géométrique.

2. On définit la variable aléatoire T de la façon suivante :
Pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel pair, on pose $T(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{2}$, et, pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel impair, on pose $T(\omega) = \dfrac{1 + X(\omega)}{2}$.
On admet que T est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Montrer que T prend des valeurs entières non nulles.

b) Réciproquement, justifier que tout entier naturel k non nul est élément de $T(\Omega)$ et en déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

c) Exprimer l'événement $[T = k]$ en fonction de certains événements $[X = i]$ puis montrer que T suit la même loi que Z.

Exercice 23 (EML 2014)
Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue une succession de $(n+1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.
Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la variable X_n prend ses valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$.
Par exemple, si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5, 3, 2, 2, 6, 3, alors $X_5 = 4$.
Pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au $k^{\text{ème}}$ tirage.

Partie I : Étude du cas $n = 3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n = 3$.
L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

1. *a)* Exprimer l'évenement $[X_3 = 4]$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables N_1, N_2, N_3. En déduire $\mathbb{P}([X_3 = 4])$.

b) Montrer que $\mathbb{P}([X_3 = 2]) = \dfrac{2}{3}$, et en déduire $\mathbb{P}([X_3 = 3])$.

2. Calculer l'espérance de X_3.

Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.

4. Calculer $\mathbb{P}([X_n = n+1])$.

5. Montrer, pour tout i de $[\![1, n]\!]$: $\mathbb{P}_{[N_1=i]}([X_n = 2]) = \dfrac{n-i+1}{n}$.

6. En déduire une expression simple de $\mathbb{P}([X_n = 2])$.

7. Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Justifier l'égalité d'événements suivante : $[X_n > k] = [N_1 > N_2 > \ldots > N_k]$.

En déduire que $\mathbb{P}([X_n > k]) = \dfrac{1}{n^k} \dbinom{n}{k}$.

Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.

8. Exprimer, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!], \mathbb{P}([X_n = k])$ à l'aide de $\mathbb{P}([X_n > k-1])$ et de $\mathbb{P}([X_n > k])$.

9. En déduire : $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n > k])$. Calculer ensuite $\mathbb{E}(X_n)$.

10. Montrer : $\forall k \in [\![2, n+1]\!],\ \mathbb{P}([X_n = k]) = \dfrac{k-1}{n^k} \dbinom{n+1}{k}$.

Exercice 24
Deux joueurs A et B s'affrontent dans un jeu de la manière suivante :
A joue le premier et jette deux dés : si la somme des points obtenus est 5, A gagne.
Le jeu cesse alors.
Sinon, B joue à son tour et jette deux dés : si la somme des points obtenus est 7, B gagne.
Le jeu cesse alors.
Sinon, le tour revient à A et on poursuit comme ci-dessus jusqu'à ce que A ou B ait gagné.

1. ***a)*** Déterminer la probabilité pour que la somme des points lors du jet de deux dés soit égale à 5.

b) Déterminer la probabilité pour que la somme des points lors du jet de deux dés soit égale à 7.

2. ***a)*** Déterminer la probabilité pour que A gagne au $(2n+1)^{\text{ème}}$ jet des deux dés ($n \geqslant 0$).

b) Déterminer la probabilité pour que B gagne au $(2n+2)^{\text{ème}}$ jet des deux dés ($n \geqslant 0$).

3. En déduire les probabilités a et b pour que A et B gagnent le jeu.

4. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de jets de deux dés pour que le jeu s'arrête.
Montrer que N admet une espérance et la déterminer.

Exercice 25
Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

- Soit p, q et r des réels fixés de l'intervalle $]0,1[$ tels que $p+q+r=1$.
- Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,0,1\}$, indépendantes et de même loi donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X_n = 1]) = p,\ \mathbb{P}([X_n = -1]) = q,\ \mathbb{P}([X_n = 0]) = r.$$

- On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $Y_n = \prod\limits_{k=1}^{n} X_k$.

1. ***a)*** Pour tout entier $n \geqslant 1$, préciser $Y_n(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}([Y_n = 0])$.

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{E}(Y_n)$.

2. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = \mathbb{P}([Y_n = 1])$.

a) Calculer p_1 et p_2.

b) Établir une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.

c) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$p_n = \frac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2}$$

d) Pouvait-on à l'aide de la question 2, trouver directement la loi de Y_n ?

3. ***a)*** Établir l'inégalité : $(p+q)^n > (p-q)^{2n}$. Calculer $\mathbb{V}(Y_n)$.

b) Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$ des deux variables aléatoires Y_n et Y_{n+1}.

Exercice 26
Soit c un réel strictement positif et soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, telles que : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = c\ \dfrac{i+j}{i!j!}$.

1. *a)* Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}([X=i]) = c\ \dfrac{(i+1)}{i!}$ e.
En déduire la valeur de c.

b) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

2. *a)* Déterminer la loi de $X+Y-1$.

b) En déduire la variance de $X+Y$.

c) Calculer la covariance de X et de $X+5Y$.
Les variables aléatoires X et $X+5Y$ sont-elles indépendantes ?

3. On pose : $Z = \dfrac{1}{X+1}$.

a) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

b) Déterminer pour $i \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X=i]$.

c) Pour $A \in \mathscr{A}$, on pose : $g_A(Y) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} k P_A([Y=k])$.
Établir l'existence d'une fonction affine f telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, on a : $g_{[X=X(\omega)]}(Y) = f(Z(\omega))$.

Exercice 27
Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$.

1. On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie. On suppose qu'à chaque lancer la probabilité d'obtenir Pile est égale à p. On notera P et F les évènements « Obtenir Pile » et « Obtenir Face ».
On définit les variables aléatoires X_1 et X_2 de la façon suivante :
- × X_1 vaut k si le premier Pile de rang impair s'obtient au rang $2k-1$ (entier qui représente le $k^{\text{ème}}$ nombre impair de $\mathbb{N}^*$),
- × X_2 vaut k si le premier Pile de rang pair s'obtient au rang $2k$ (entier qui représente le k-ième nombre pair de $\mathbb{N}^*$.

Par exemple si l'on obtient (F, P, F, F, F, P, P) alors X_1 prend la valeur 4 et X_2 prend la valeur 1. On posera $X_1 = 0$ (respectivement $X_2 = 0$) si Pile n'apparaît à aucun rang impair (respectivement à aucun rang pair).

a) Prouver que $\mathbb{P}([X_1 = 0]) = \mathbb{P}([X_2 = 0]) = 0$.

b) Calculer $\mathbb{P}([X_1 = 1])$ et $\mathbb{P}([X_2 = 1])$. Déterminer les lois de X_1 et de X_2. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

c) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y égale au minimum de X_1 et de X_2.

2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.

a) Montrer que la variable aléatoire $Y = \left\lfloor \dfrac{X+1}{2} \right\rfloor$ suit une loi géométrique ($\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du nombre x).

b) Montrer que les variables aléatoires Y et $2Y - X$ sont indépendantes.